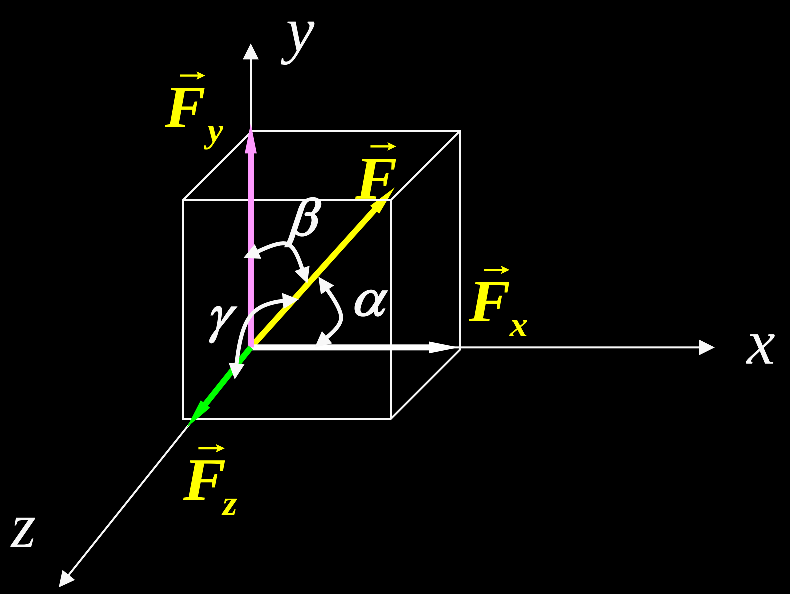
静力学

- 静力学的基本概念
- 静力学的公理和定理
- 力系的合成
- 力系的平衡方程
- 刚体系统平衡问题的解法
- 考虑摩擦的平衡问题解法
- 重心坐标公式

❖ 静力学的基本概念

1. 力

- 力是物体之间相互的机械作用；力可以使物体移动，也可以使物体转动。
- 力的分解：力可沿坐标轴分解。



$$\vec{F}_x = F\cos\alpha\ \vec{i}$$

$$\vec{F}_y = F\cos\beta\ \vec{j}$$

$$\vec{F}_z = F\cos\gamma\ \vec{k}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

$$= F\cos\alpha\ \vec{i} + F\cos\beta\ \vec{j} + F\cos\gamma\ \vec{k}$$

静力学的基本概念

- 力的投影：
  - 一次投影法
  - 二次投影法
- 已知投影求力

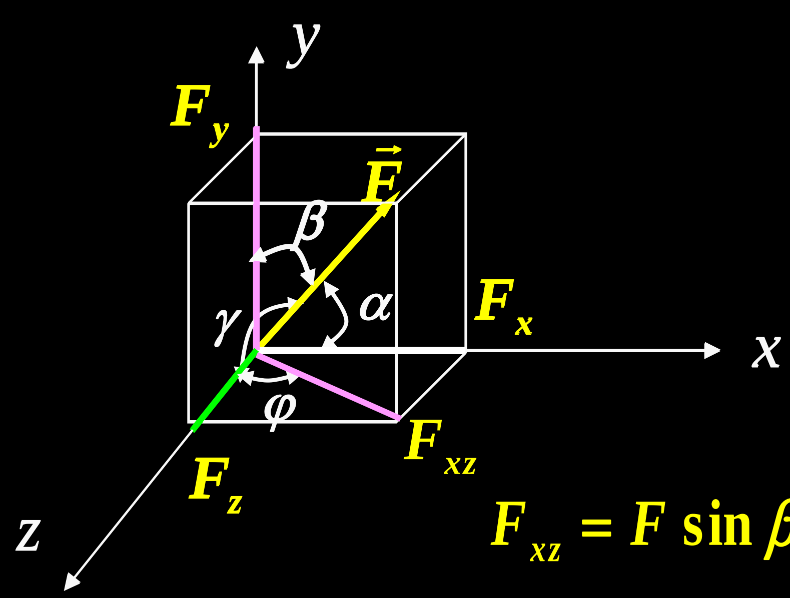
$$\begin{cases} F_x = F\cos\alpha \\ F_y = F\cos\beta \\ F_z = F\cos\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{xz}\sin\varphi = F\sin\beta\sin\varphi \\ F_y = F\cos\beta \\ F_z = F_{xz}\cos\varphi = F\sin\beta\cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$F = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2} + F_z^{\ 2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

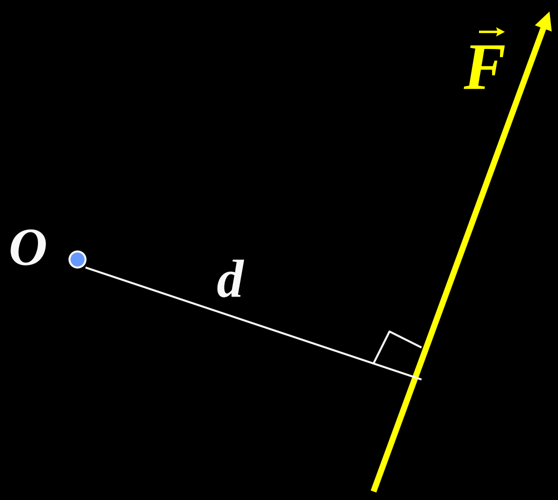


$$F_{xz} = F\sin\beta$$

2. 力矩

- 力矩是力使物体转动效应的度量。

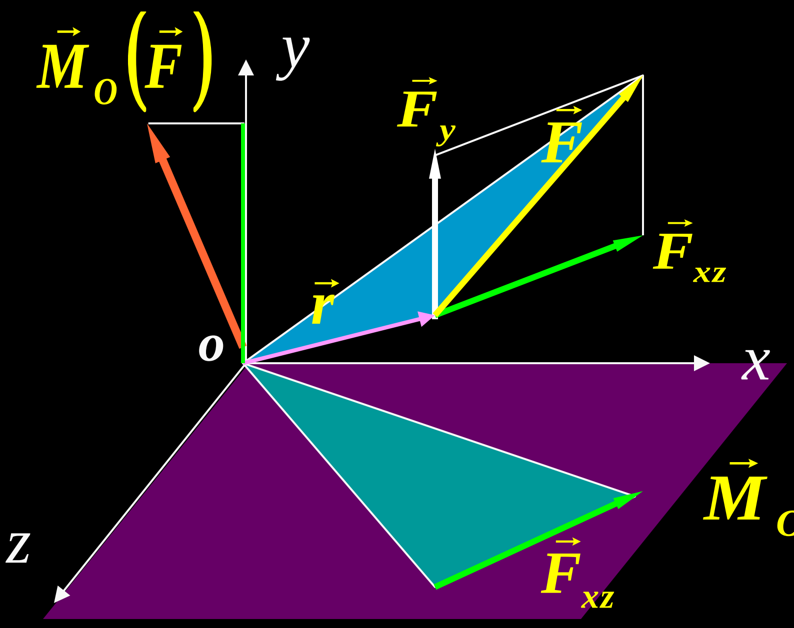
- 对于平面问题：把力的大小与力的作用线到某点O的距离之积定义为力对O点之矩，简称力矩。且规定逆时针方向转动的力矩为正值，顺时针方向转动为负值。



$$M_O\left(\vec{F}\right) = Fd$$

2. 力矩

- 对于空间问题：
  - 定义 $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ 为力对点之矩，其中 $\vec{r}$ 为力的作用点的矢径。
  - 定义 $M_y(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xz})$ 为力对轴之矩。当力与轴相交或平行，则力对轴之矩为零。



- 力矩关系定理：力对点之距与力对轴之矩的关系：

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y = M_y(\vec{F})$$

  - 利用力矩关系定理可方便地计算力对点之矩。

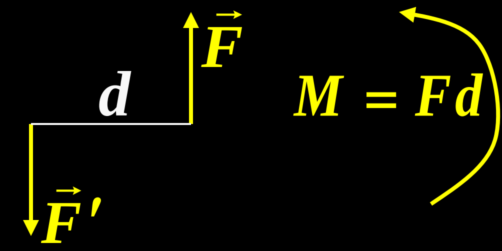
$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_x(\vec{F})\vec{i} + M_y(\vec{F})\vec{j} + M_z(\vec{F})\vec{k}$$

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

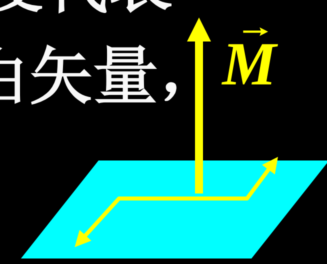
3.力偶与力偶矩：

- 力偶是大小相等、方向相反、作用在同一平面内作用线不重合的两个力。

$M = Fd$



- 力偶只能使物体转动。
- 力偶矩是力偶使物体转动效应的度量。
- 对于平面问题：力偶矩用代数量表示，大小等于力偶中任一力与力偶臂的积，用 M 表示，且规定逆时针方向转动为正值，顺时针方向转动为负值。
- 力偶对同一平面内任一点之矩都等于其力偶矩，只要不改变力偶矩的大小和转向，力偶可在其作用平面内任意的转动和移动。
- 对于空间问题：力偶矩用矢量 $\vec{M}$ 表示，矢量的长度代表大小，方向符合右手规则；但要注意力偶矩为自由矢量，而力矩是定位矢量。



4．**刚体：**永不变形的物体。

5．**平衡：**在外力作用下保持静止或匀速运动状态不变。

6．**力系及相关概念：**

- **力　　系：**作用在物体上的一组力。
- **等效力系：**如果两个力系对物体的作用效果完全相等，称这两个力系为等效力系。
- **力系的简化：**如用一简单力系等效代替一复杂力系称为力系的简化。
- **合　　力：**如果一个力系与一个力等效，则称该力为力系的合力。

- **平衡力系**：物体在一力系作用下，处于平衡状态，该力系称为平衡力系。
- **力系的平衡条件**：使物体平衡的力系需满足的条件称为力系的平衡条件。
- **力系的主矢**：力系中各力的矢量和。

$$\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\cdots\cdots,\vec{F}_n\right)$$

$$F'_{Rx}=\Sigma F_{ix}\quad F'_{Ry}=\Sigma F_{iy}\quad F'_{Rz}=\Sigma F_{iz}$$

$$\vec{F}_R{}'=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\cdots\cdots+\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

$$F'_R=\sqrt{F'^{2}_{Rx}+F'^{2}_{Ry}+F'^{2}_{Rz}}$$

- **力系的主矩**：力系中各力对任一点取矩的矢量和。

$$\vec{M}_O=\Sigma\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$$

$$\left[\vec{M}_O\right]_x=M_{Ox}=\Sigma M_x\left(\vec{F}_i\right)\qquad M_{Oy}=\Sigma M_y\left(\vec{F}_i\right)\qquad M_{Oz}=\Sigma M_z\left(\vec{F}_i\right)$$

$$M_O=\sqrt{M_{Ox}^2+M_{Oy}^2+M_{Oz}^2}$$

❖ 静力学公理及几个重要定理

1. 公理：

公理一：二力平衡公理；适用于刚体。

公理二：加减平衡力系公理；适用于刚体。

公理三：力的平行四边形法则；适用于物体。

公理四：作用与反作用公理；适用于物体。

公理五：刚化公理，适用于变形体。

推论一：力的可传性原理，适用于刚体。

推论二：三力平衡汇交定理：适用于刚体。

2．力线平移定理：

作用在刚体上的力可以向刚体上任一点平移，但必须附加一个力偶，附加力偶的力偶矩等于原来的力对移动后作用点之矩。

力线平移定理可用来简化力系，其逆定理亦成立。

3．合力投影定理：

力系的合力在任一轴上的投影等于力系中各力对同一轴投影的代数和。

4．合力矩定理

平面力系：合力对平面内任一点之矩等于力系中各力对同一点之矩的代数和。

空间力系：合力对任一点（轴）之矩等于力系中各力对同一点（轴）之矩的矢量和（代数和）。

5．力系等效定理

两个力系相互等效的充分必要条件是这两力系的主矢相等，对同一点的主矩相等。

6．平衡力系定理

力系作用下物体平衡的充分必要条件是力系为零力系，即：主矢为零、对任一点的主矩为零。

7．力矩关系定理：

力对某点的力矩矢在通过该点的任意轴上的投影等于力对该轴之矩。

❖ 力系的合成（简化）

1．平面力系：

对任一平面力系F_1，F_2……,F_n，任选简化中心O，可得到一个力和一个力偶；力的大小和方向由力系的主矢决定，即：$\vec{F}_R' = \Sigma\vec{F}_i$ ，它与简化中心的位置无关；力偶的力偶矩由力系对简化中心的主矩决定，即：$M_O=\sum\vec{M}_O(F_i)$ ，它与简化中心的位置选择有关。

对该力和力偶进一步简化可得到下列四种情况：

（1）$F_R'=0$，$M_o=0$，力系成平衡。

（2）$F_R'=0$，$M_o\neq 0$，力系合成为一合力偶M_o。

（3）$F_R'\neq 0$，$M_o=0$，合成一作用在简化中心的合力F'_R。

（4）$F_R'\neq 0$，$M_o\neq 0$，力系合成一作用线距简化中心为$d=|M_o/F_R'|$的合力$F_R=F_R'$。

1. 平面力系：

平面汇交力系：力系向汇交点简化可得到一个合力：$\vec{F}_R=\Sigma\vec{F}_i$

平面力偶系：力系向任意点简化均得到一合力偶：$M=\sum M_i$

2. 空间力系：

向任一点简化得到一个力 $\vec{F}_R'=\Sigma\vec{F}_i$ 和一个力偶 $\vec{M}_o=\Sigma\vec{M}_o(\vec{F}_i)$，进一步简化后情况如下：

（1）$F_R'=0$，$M_o=0$，力系平衡。

（2）$F_R'\neq0$，$M_o=0$，合力。

（3）$\vec{F}_R'=\vec{0}$，$M_o\neq0$，合力偶。

（4）$\vec{F}_R'\cdot\vec{M}_o\neq0$，力螺旋。

（5）$F_R'\neq0$，$M_o\neq0$，$F_R'\cdot M_o=0$，合力。

❖ 力系的平衡方程

力系的平衡条件：主矢为零 、主矩为零

力系种类	空间任意力系	空间汇交力系	空间平行力系	空间力偶力系	平面任意力系	平面汇交力系	平面平行力系	平面力偶力系
平衡方程	$\sum F_x=0$ $\sum F_y=0$ $\sum F_z=0$ $\sum M_x=0$ $\sum M_y=0$ $\sum M_z=0$	$\sum F_x=0$ $\sum F_y=0$ $\sum F_z=0$	$\sum F_z=0$ $\sum M_x=0$ $\sum M_y=0$	$\sum M_x=0$ $\sum M_y=0$ $\sum M_z=0$	$\sum F_x=0$ $\sum F_y=0$ $\sum M_O=0$	$\sum F_x=0$ $\sum F_y=0$	$\sum F_y=0$ $\sum M_O=0$	$\sum M=0$
其它形式	四矩式 五矩式 六矩式		三矩式		二矩式 三矩式		二矩式	
未知量数	6	3	3	3	3	2	2	1

❖ 刚体系统平衡问题的解法

1. 选择研究对象：首先分析题意：可以选取每个物体为研究对象（仅局部，不整体）；可以先取整体为研究对象求出一部分未知量，再取部分物体为研究对象进行研究（先整体，后局部）；可以先从系统中选取部分物体为研究对象，列平衡方程，然后再取整个系统为研究对象，列出另外的平衡方程。（先局部，后整体）。
2. 取分离体，画受力图：要把所选研究对象从周围物体中分离出来，画出基本轮廓，再画物体所受到的力。画受力图时应注意，要先画主动力，后画约束反力；约束反力一定要根据约束的类型和性质确定，常见约束的约束反力一定要熟练掌握，如固定铰、固定端、活动铰、光滑面支承、柔索等。有时需用二力平衡公理或三力平衡汇交定理及作用与反作用公理确定反力的方向。

❖刚体系统平衡问题的解法

1. 选择研究对象：

2. 取分离体，画受力图：

3.选择投影轴和矩心，列静力平衡方程求未知力。

通常先取矩后投影，矩心尽量选择在多个未知力的交点上；投影轴尽可能与未知力垂直或平行；以保证列一个方程可求出一个未知量，避免解联立方程组。

❖ 考虑摩擦的平衡问题解法

➢ 与一般问题的解题思路和方法相同，须注意以下问题：

1、受力分析时要加上摩擦力，摩擦力的方向总是与物体运动趋势的方向相反。

2、 列方程时应增加补充方程：$F_f \leq F_{fmax}=f_sF_N$

3、 解答结果是一个范围。

➢ 了解摩擦角的概念： $f_s= \tan\varphi_f$

❖ 重心坐标公式

$$x_c=\sum P_i x_i/\sum P_i$$

$$y_c=\sum P_i y_i/\sum P_i$$

$$z_c=\sum P_i z_i/\sum P_i$$

矢径公式: $\vec{r}_c=\sum P_i\vec{r}_i/\sum P_i$

受力分析及受力图

- 步骤：
  - 选研究对象
  - 取分离体并画出基本轮廓
  - 画物体所受到的力
- 画受力图注意事项：
  - 要先画主动力，后画约束反力；
  - 约束反力一定要根据约束的类型和性质确定，
  - 熟练掌握固定铰、固定端、活动铰、光滑面支承、柔索等常见约束的约束反力。
  - 应用二力平衡公理或三力平衡汇交定理及作用与反作用公理确定约束反力的方向。
  - 力的标注

刚体系统的平衡问题习题分析

解题步骤

① 选研究对象

② 画受力图（受力分析）

③ 选坐标、取矩点、列平衡方程。

④ 解方程求出未知数

解题技巧

① 先取矩，后投影，列一个平衡方程求一个未知力。

② 矩心最好选在未知力的交叉点上；

③ 坐标轴最好选在与未知力垂直或平行的投影轴上；

④ 注意判断二力杆；运用合力矩定理等。

题1：已知：l=40cm，h=20cm，r=10cm，q=2.5N/cm，Q=50N。求：A、C 处反力

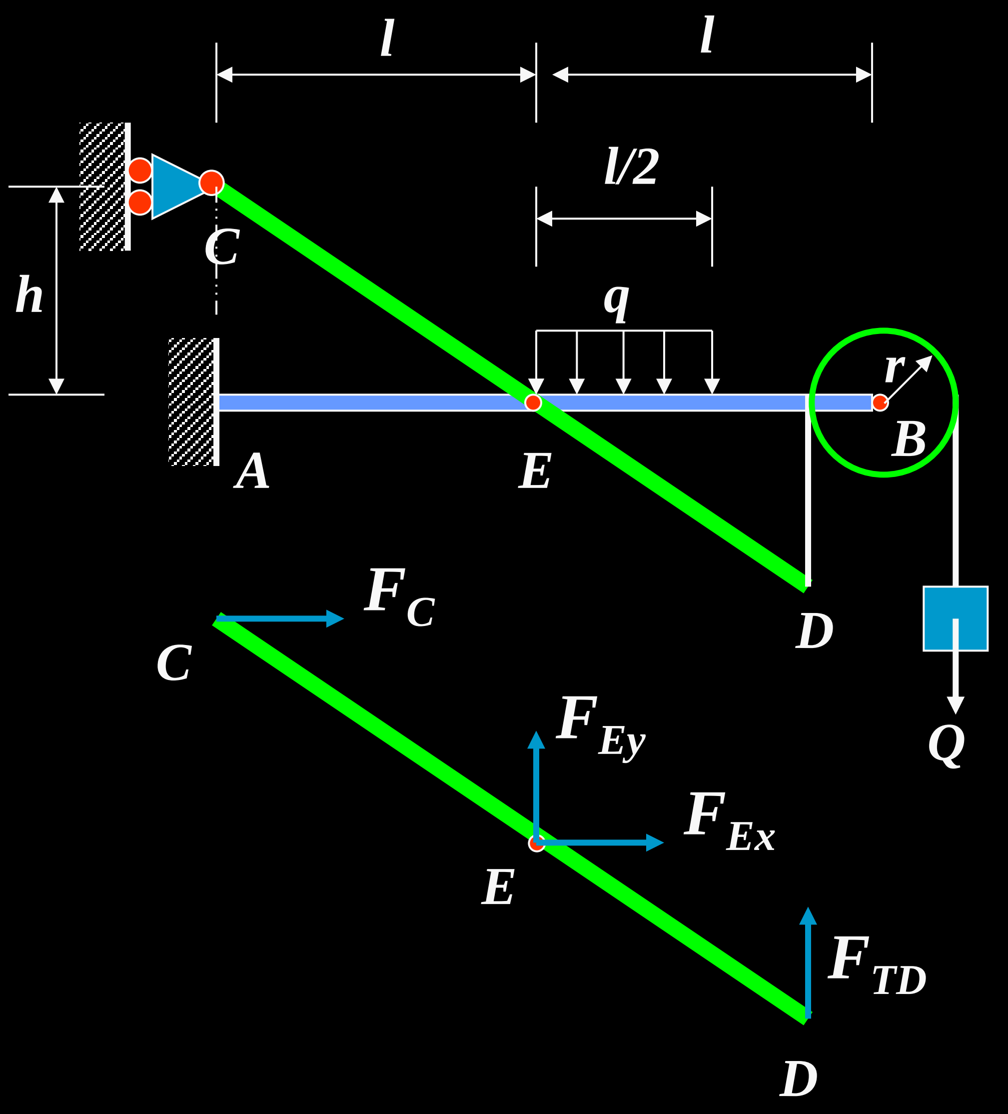
解：（1）选CD为研究对象

$$\sum M_E = 0$$

$$-F_C h + F_{TD}(l-r) = 0$$

$$F_{TD} = Q$$

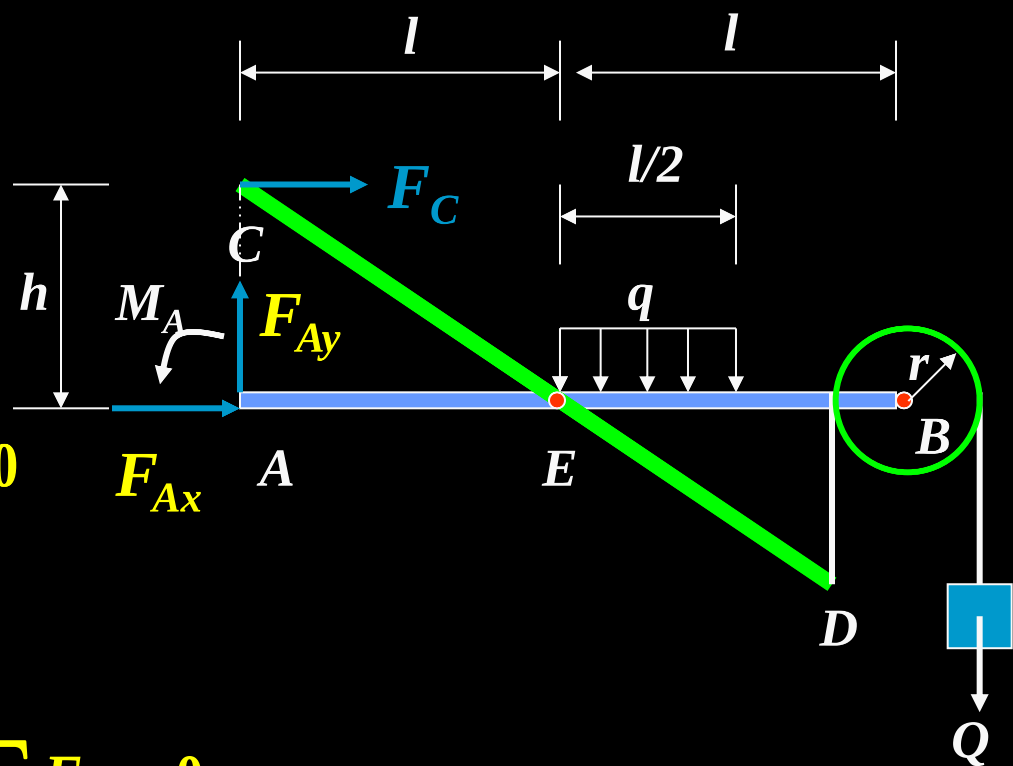
$$F_C = \frac{Q(l-r)}{h} = 75\text{N}$$



题1：已知：l=40cm，h=20cm，r=10cm，q=2.5N/cm，Q=50N。

求：A、C 处反力

（2）选整体为研究对象



$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - F_C h - \frac{ql}{2} \cdot \frac{5l}{4} - Q(2l + r) = 0$$

$$M_A = 85\text{Nm}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} + F_C = 0$$

$$F_{Ax} = -75\text{N}$$

$$\sum F_y = 0$$

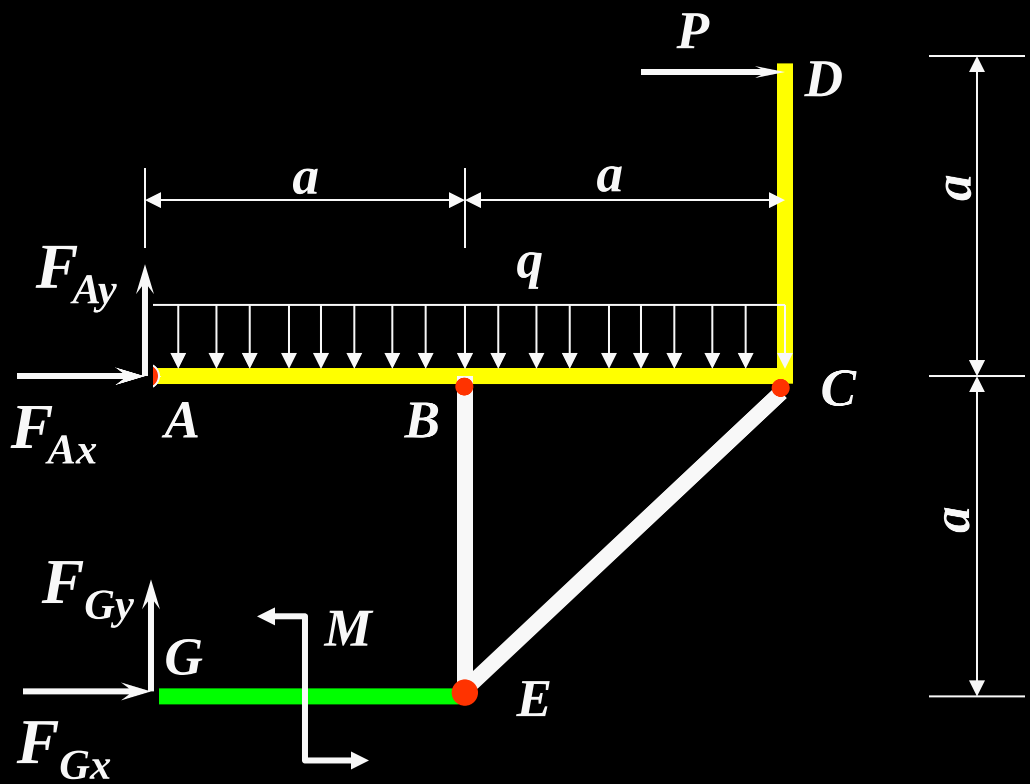
$$F_{Ay} - Q - \frac{ql}{2} = 0$$

$$F_{Ay} = 100\text{N}$$

题2：已知：a=2m，M=20kNm，q=10kN/m，P=20kN。

求：A、G 处反力及BE、CE杆内力。

解：（1）选整体为研究对象



$$\sum M_G = 0$$

$$-F_{Ax}a - 2qa^2 - 2Pa + M = 0$$

$$F_{Ax} = -70\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} + F_{Gx} + P = 0$$

$$F_{Gx} = 50\text{kN}$$

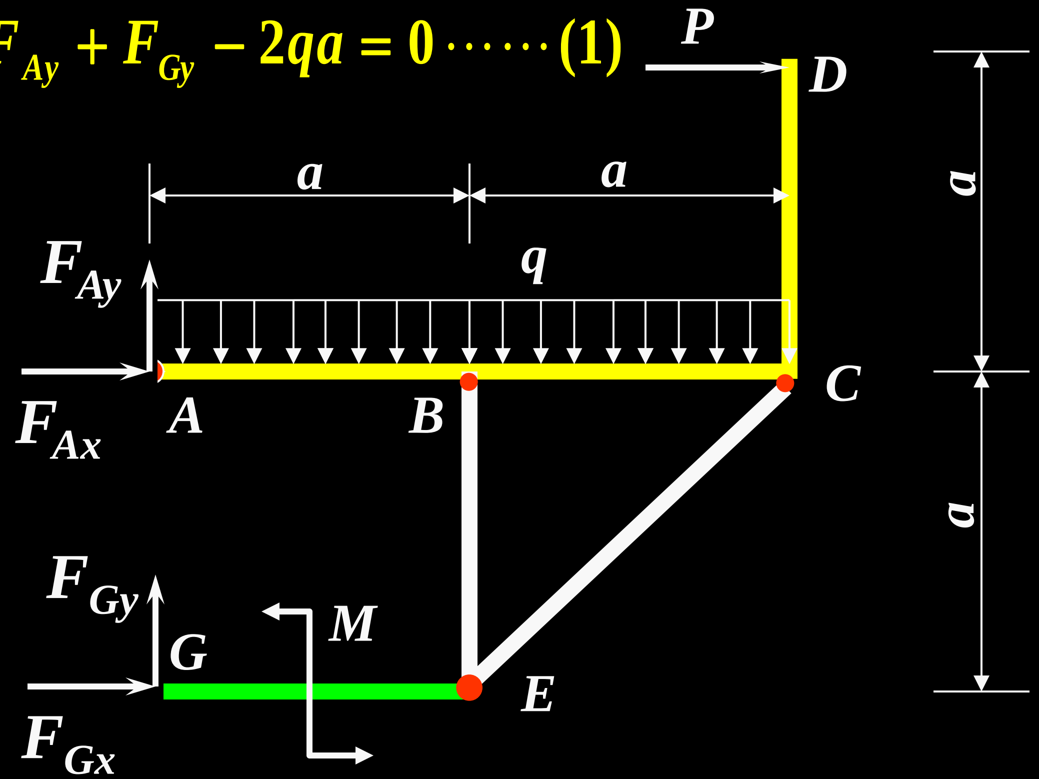
$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Ay} + F_{Gy} - 2qa = 0 \cdots\cdots(1)$$

题2：已知：a=2m，M=20kNm，q=10kN/m，P=20kN。

求：A、G 处反力及BE、CE杆内力。

$$F_{Ay} + F_{Gy} - 2qa = 0 \cdots\cdots (1)$$



（2）选GE为研究对象

$$\sum M_E = 0$$

$$-F_{Gy}a + M = 0$$

$$F_{Gy} = 10\text{kN} \qquad F_{Ay} = 30\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

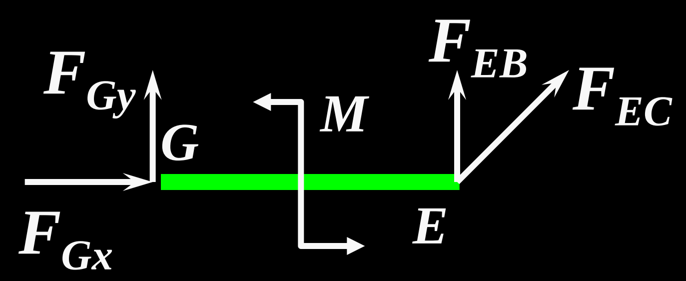
$$F_{EC}\cos 45^{o} + F_{Gx} = 0$$

$$F_{EC} = -50\sqrt{2}\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Gy} + F_{EB} + F_{EC}\cos 45^{o} = 0$$

$$F_{EB} = 40\text{kN}$$



题3：已知：l_1=2m，l_2=1.5m，M=26kNm，q=1kN/m，P=13kN。

求：A、D 处反力。

解：（1）选BCD为研究对象

$$\sum M_B = 0$$

$$2F_{Dy}l_1 + Pl_2 + M = 0$$

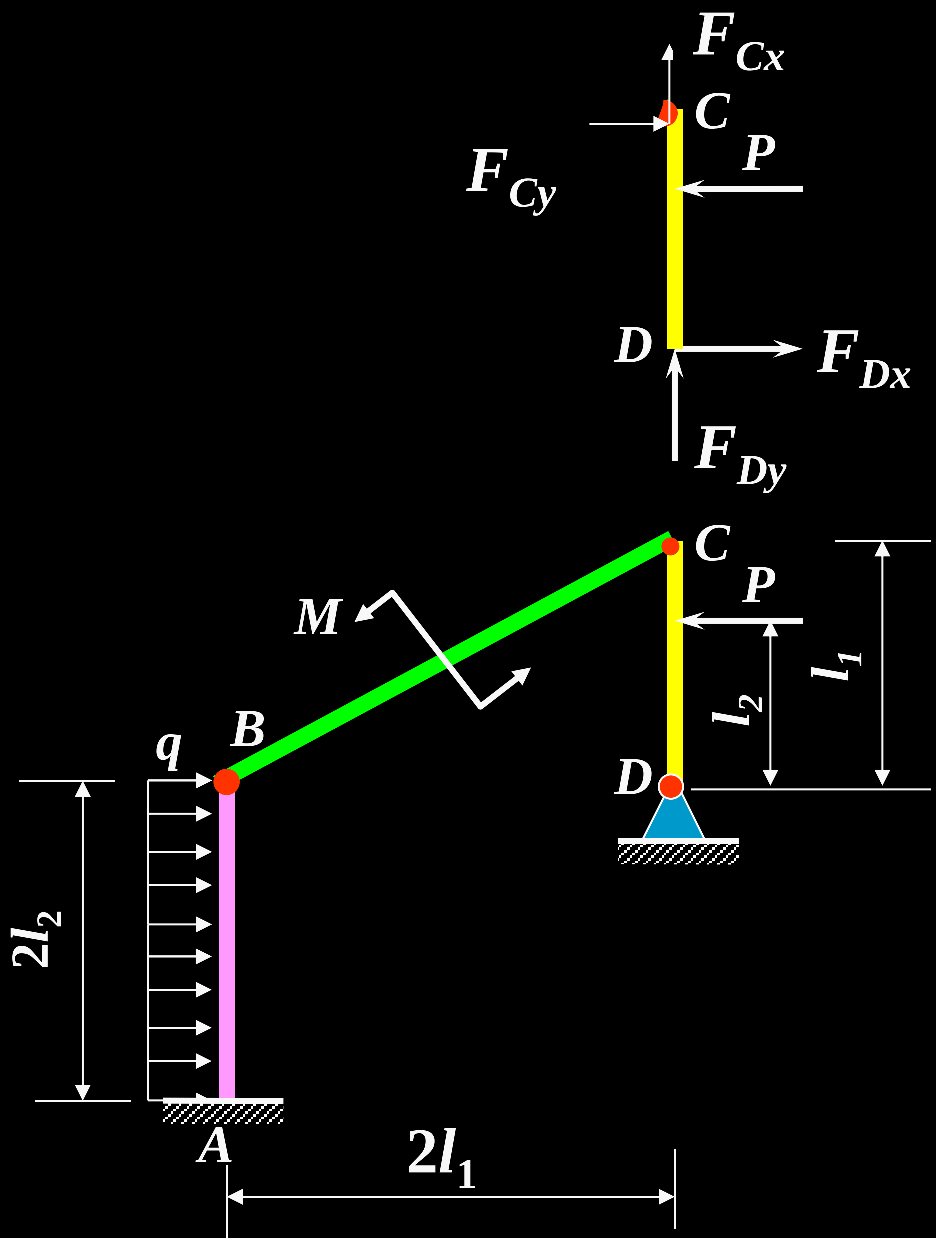
$$F_{Dy} = -11.375\text{kN}$$

（2）选CD为研究对象

$$\sum M_C = 0$$

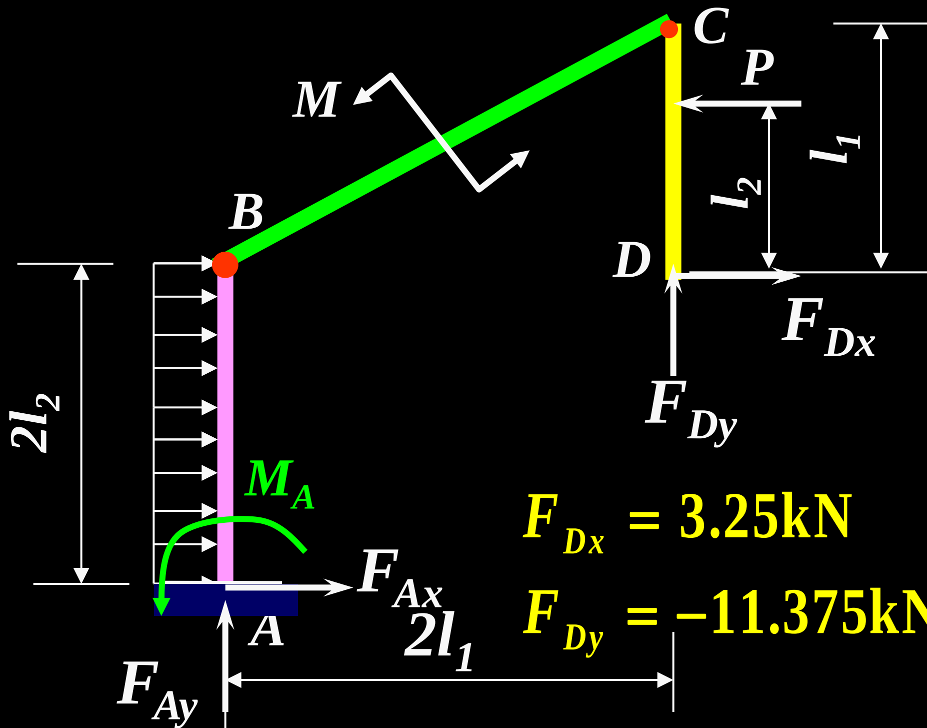
$$F_{Dx}l_1 - P\left(l_1 - l_2\right) = 0$$

$$F_{Dx} = 3.25\text{kN}$$



题3：已知：l_1=2m，l_2=1.5m，M=26kNm，q=1kN/m，P=13kN。求：A、D 处反力。

解：（3）选整体为研究对象



$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - 2F_{Dx}l_2 + 2F_{Dy}l_1 + 3Pl_2 + M - 2ql_2^2 = 0$$

$$M_A = -24.75\text{kNm}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} + F_{Dx} + 2ql_2 - P = 0$$

$$F_{Ax} = 6.75\text{kN}$$

$$F_{Dx} = 3.25\text{kN}$$

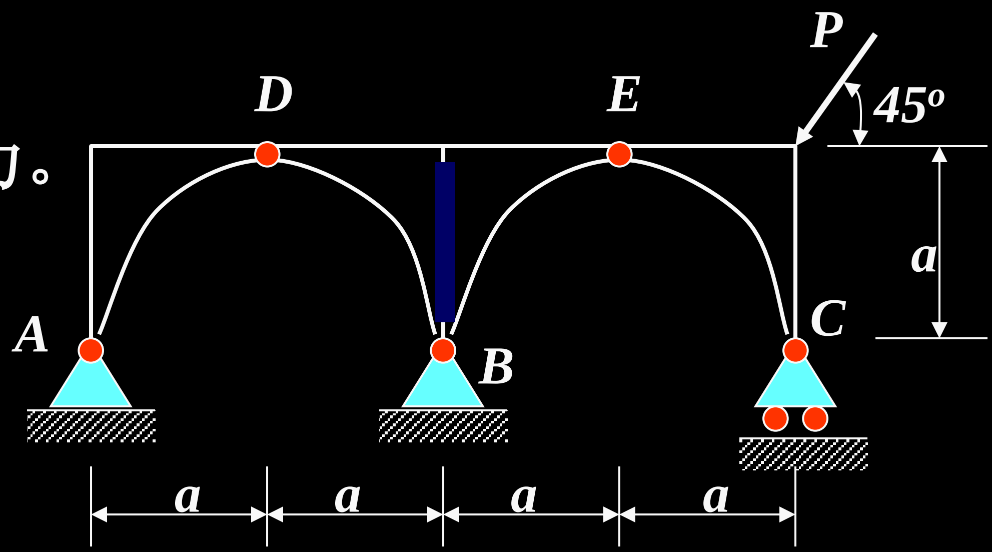
$$F_{Dy} = -11.375\text{kN}$$

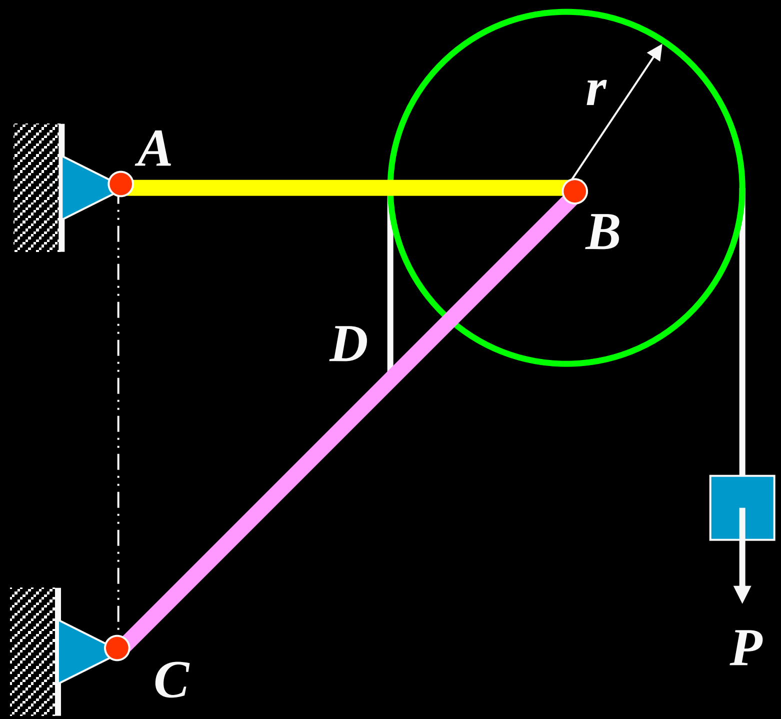
$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Ay} = 11.375\text{kN}$$

题1：已知：P、a

求：A、B、C的约束反力。



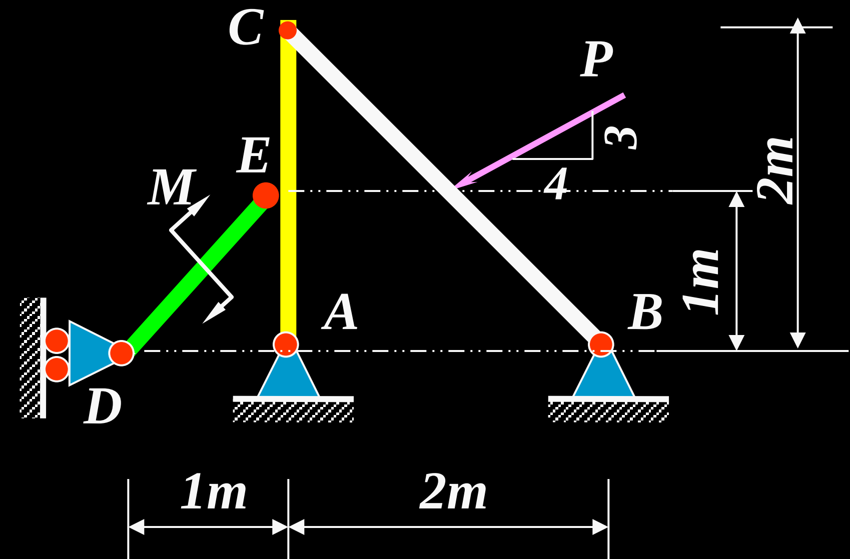


题2：已知：$AB=AC=2r$，P

求：BC 杆两端受力

题3：已知：M=12kNm，P=10kN

求：A、B、D 处反力。



运动学

一、点的运动

研究方法：

直角坐标法

自然坐标法

矢径法

动点动系法

研究内容：

- 运动（方程、轨迹）
- 速度
- 加速度

	直角坐标法	自然坐标法	矢径法	动点动系法
运动方程	$x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$	$s = s(t)$	$\vec{r} = \vec{r}(t)$	动点、动系的选择 分析绝对运动、相对运动、牵连运动.
速度	$v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$	$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$	$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$	$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ 分析绝对速度、相对速度、牵连速度.
加速度	$a_x = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ $a_y = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2$ $a_z = \mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2$	$\vec{a}_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$ $\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}$	$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ $= \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k$ 分析绝对加速度、相对加速度、牵连加速度和科氏加速度. $\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$
适用问题	轨迹未知	已知轨迹	公式推导	有相对运动的情形

❖点的合成运动（合成法、动点动系法）

- 绝对运动：动点相对于静系的运动。
- **相对运动：动点相对于动系的运动。**
- 牵连运动：动系相对于静系的运动。
- **绝对速度（加速度）：动点相对于静系的速度（加速度）。**
- 相对速度（加速度）：动点相对于动系的速度（加速度）。
- **牵连速度（加速度）：动系中与动点重合的点（牵连点）相对于静系的速度（加速度）。**

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \qquad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k$$

❖ 科氏加速度：

- 科氏加速度：当牵连运动为转动时，由于牵连转动与相对运动相互影响而产生的一种附加加速度。
- 科氏加速度的确定： $\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$

  科氏加速度的大小为：$a_k=2\,\omega_e v_r \sin\theta$

  式中 θ 是 ω_e、v_r 间的夹角；

  科氏加速度的方向由右手法则确定。
- 常见情况下，ω_e 与 v_r 相互垂直，故：$a_k=2\,\omega_e v_r$；方向由右手法则确定。

二、刚体的运动

- 刚体的运动形式
  - 平动
  - 定轴转动
  - 平面运动

- 研究内容
  - 运动方程
  - 速度与角速度
  - 加速度与角加速度

1．平动

- **定义：**刚体运动时，其上任一条直线的方位始终保持不变。
- **特点：**刚体平动时，其上各点的轨迹、位移、速度、加速度均相同。
- **研究方法：**用刚体上任一点的运动来表示刚体的平动。所有关于点的运动学的理论均可应用。

2. 定轴转动

- **定义：**刚体运动时，有且只有一条直线始终保持不变（这条直线称转轴）。
- **特点：**刚体转动时，与转轴平行的直线上各点的轨迹、速度、加速度相同）
- **转动刚体的整体描述：**
  - 运动方程：$\varphi=\varphi(t)$ （转角方程）
  - 角速度：$\omega=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$
  - 角加速度：$\alpha=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2$

❖ 转动刚体上一点的运动描述：

- 转动刚体上任一点的运动为圆周运动，圆心在转轴上，半径为该点到转轴的距离。
- 位移：$s = r\varphi$
- 速度：$v = r\omega$
- 加速度：

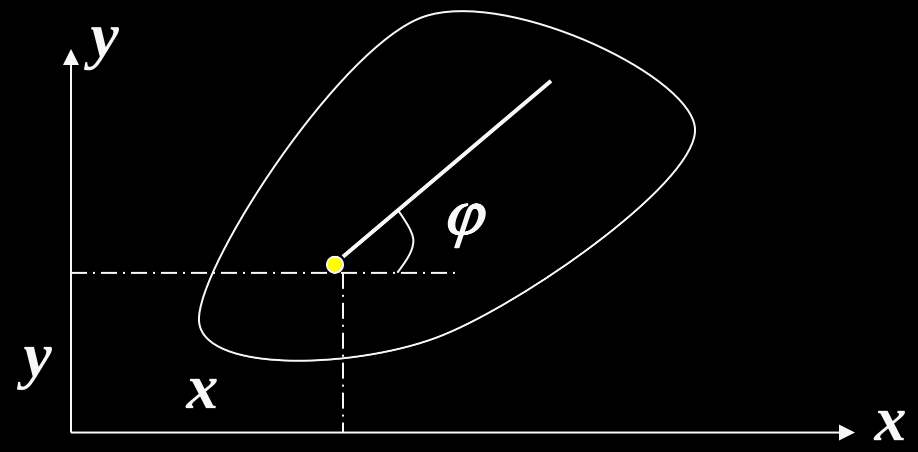
$$a_n = r\omega^2,\quad a_\tau = r\alpha,\quad a = r\,(\omega^4+\alpha^2)^{1/2}$$

$\tan\theta = \omega^2/\alpha$ （θ 为 a 与 a_τ 的夹角）

3. 平面运动

- **定义：**刚体运动时，其上任一点都在平行于某一固定的平面内运动。
- **特点：**刚体作平面运动时，与固定平面垂直的直线上各点具有相同的运动规律，故可用平面图形在其自身平面内的运动来研究。
- **运动方程：**

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$\varphi = \varphi(t)$$



- 刚体平面运动的分解：

刚体的平面运动 ↔ 随基点的平动＋绕基点的转动

注意：基点不同， 随基点平动的速度不同，但绕基点转动的角速度不变。

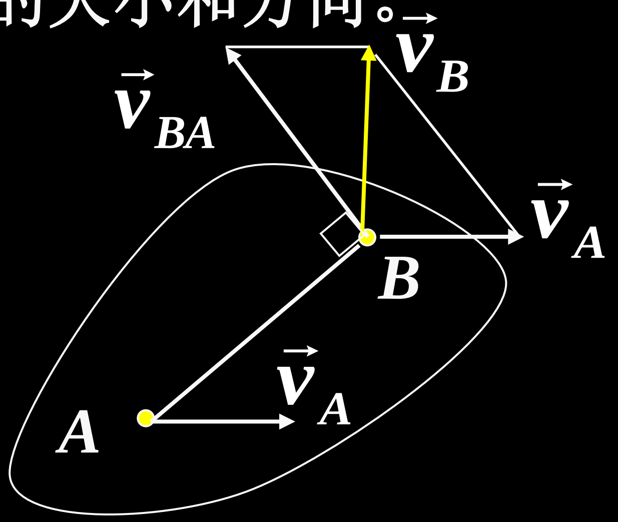
➢刚体平面运动时刚体上任一点速度的求法：

- 基点法：

（1）选择基点：已知速度的点（*A*）。

（2）列基点法基本公式，分析速度的大小和方向。

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$



（3）在所求点画速度平行四边形。

（4）利用三角函数关系求未知量。

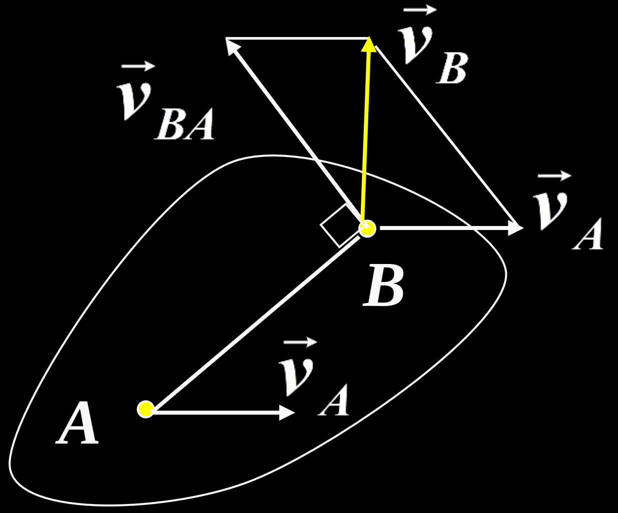
➢刚体平面运动时刚体上任一点速度的求法：

- 速度投影定理：

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

$$\left[\vec{v}_B\right]_{AB} = \left[\vec{v}_A\right]_{AB} + \left[\vec{v}_{BA}\right]_{AB}$$

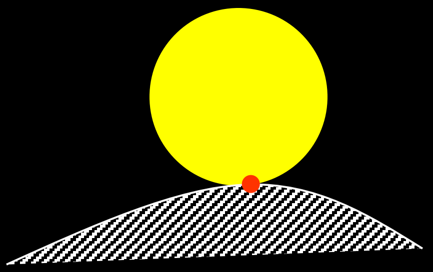
$$\left[\vec{v}_B\right]_{AB} = \left[\vec{v}_A\right]_{AB}$$

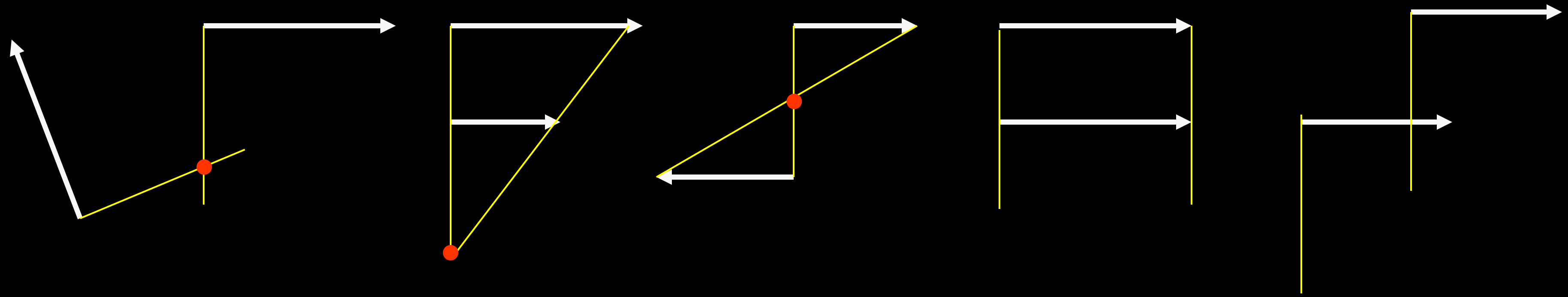


- 速度投影定理只适用已知一点速度的大小和方向及另一点的速度方向求另一点速度大小。

➢刚体平面运动时刚体上任一点速度的求法：

- 速度瞬心法：
- 速度瞬心：刚体运动时瞬时速度为零的点。
- 解题方法：
  - ➢ 确定瞬心*P*的位置
  - ➢ 求平面运动刚体的角速度：ω
  - ➢ 求任一点*A*的速度为：$v_A=AP\times\omega$ （方向垂直于*AP*，与 ω 保持一致）





❖ 刚体平面运动时任一点加速度的求法

- 基点法：

（1）选基点：已知加速度的点（*A*）。

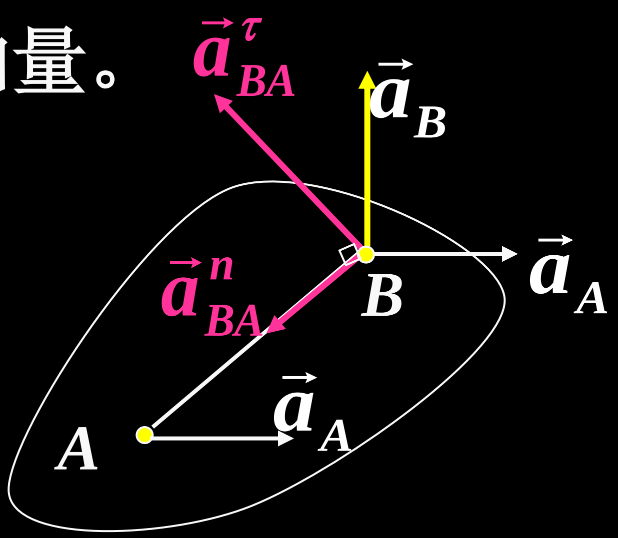
（2）列基点法公式：$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$

（3）画加速度矢量图：

（4）利用矢量投影定理求未知量。

$$\vec{a}_{BA}^n = -\omega^2 \cdot \vec{r}_{AB}$$

$$\vec{a}_{BA}^\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB}$$



三、运动学综合题解法

1. 分析机构中各构件的运动形式，哪些构件之间有**相对运动**，哪些构件作**平面运动**，在有相对运动的地方应用点的速度合成定理，对于平面运动的刚体，选择一种方法求速度（基点法、瞬心法或速度投影定理）。

2. 应用速度合成定理时，一定要正确**选择动点和动系**，使绝对运动能分解为比较直观、简单的相对运动和牵连运动，动点和动系一定不要选在同一个物体上。重点分析三种速度，特别要注意**牵连速度是动系上与动点重合的点相对静系的速度**；然后正确**画出**速度矢量图，即**速度平行四边形**，利用三角函数关系求解未知量。

3. 对平面运动的刚体，其上任一点速度的求法可采用基点法、速度投影法、瞬心法中任一种。

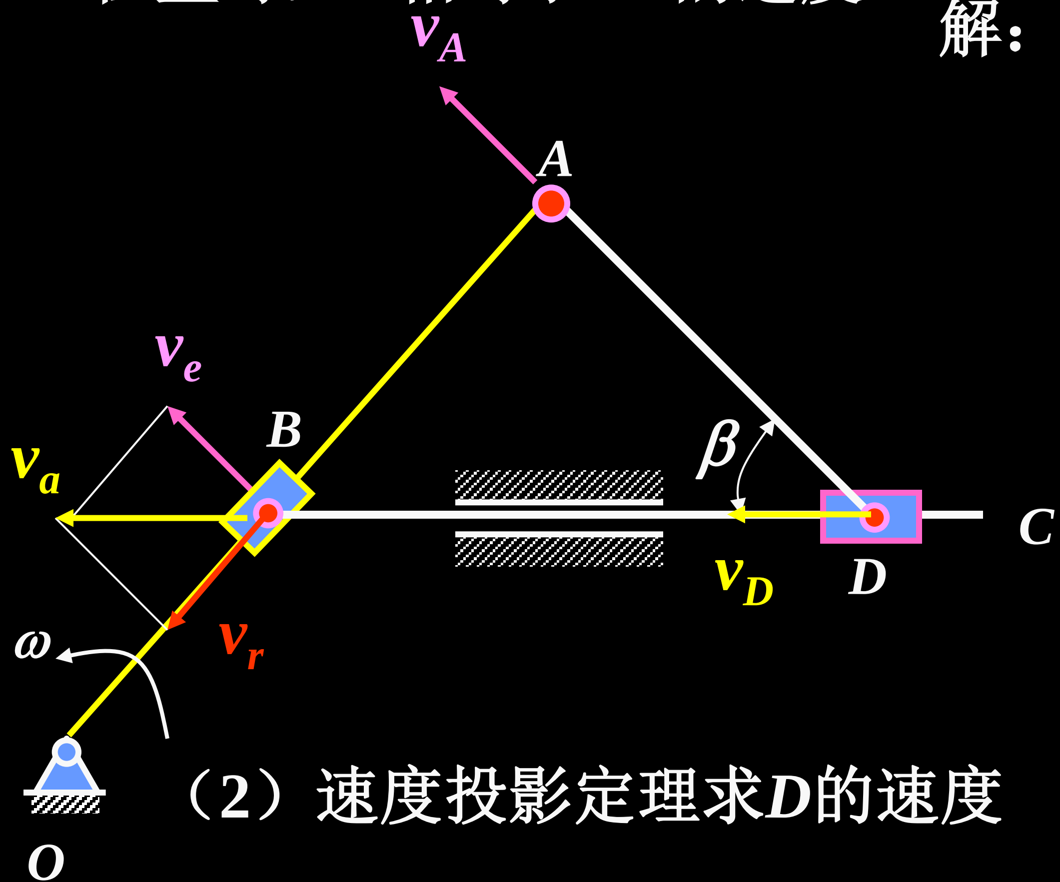
- 采用基点法时，一定要**指明基点**，把**速度平行四边形作在所求点处**。
- 速度投影法只适用于已知一点速度大小和方向及另一点速度方向（大小）求另一点速度大小（方向）的情况。
- **瞬心法的关键是瞬心位置的确定**，要求掌握常见的几种确定瞬心位置的方法：一但瞬心位置确定，即可方便地求出任一点的速度大小和方向。

4. 有时为了求解方便，需应用上述2、3中速度矢量式建立**综合矢量等式**，然后**根据矢量投影定理解题**，可简化步骤。

5. 加速度的求法与速度求法基本相同，平面运动刚体一般只用基点法。

❖ 计算题2：

$OB=BA=b$，OA垂直于AD，已知OA以 ω转动， β=30°。求图示位置时，D相对于BC的速度。



解：（1）速度合成法

动点：DB上的B

动系： AO

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

大小：	?	?	$b\omega$
方向：	✓	✓	✓

$$v_a = \frac{v_e}{\cos\beta} = \frac{2\sqrt{3}}{3} b\omega$$

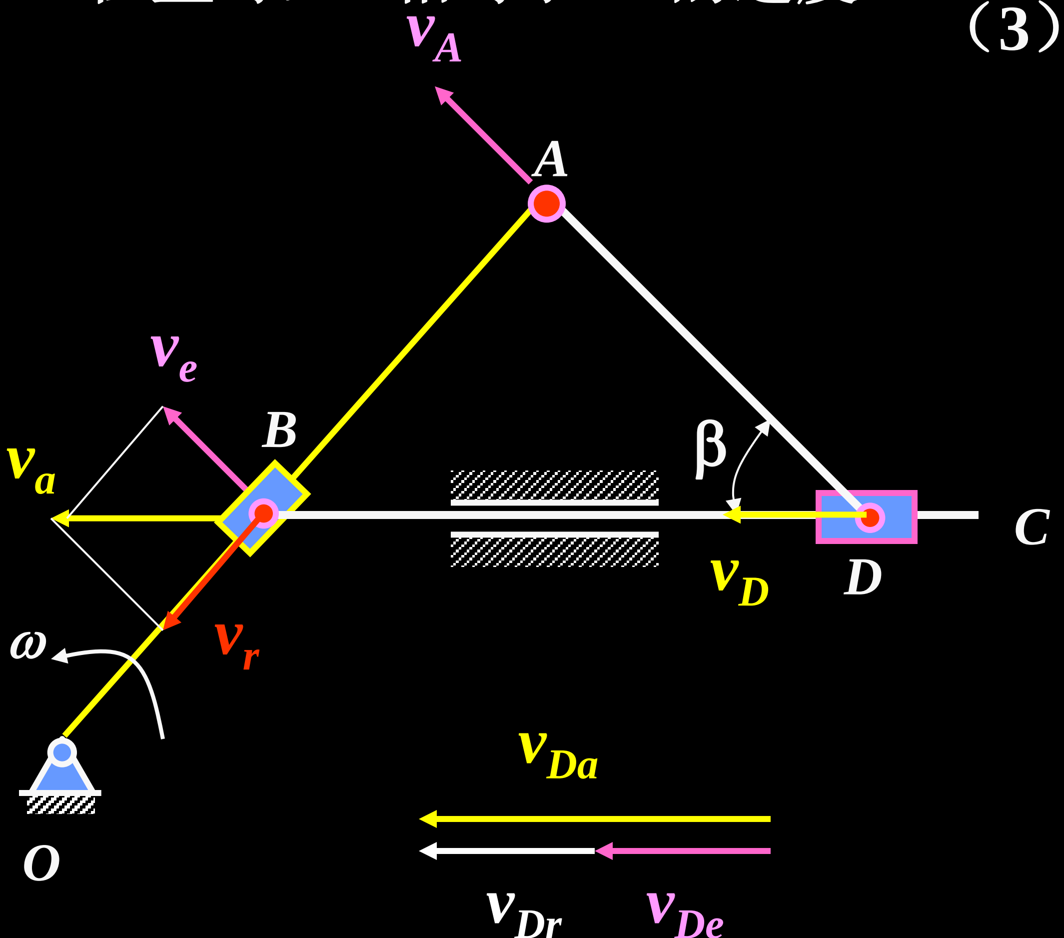
$$v_A = 2v_e = 2b\omega$$

（2）速度投影定理求D的速度

$$\left[\vec{v}_D\right]_{DA} = \left[\vec{v}_A\right]_{DA} \qquad v_D = \frac{v_A}{\cos\beta} = \frac{4\sqrt{3}}{3} b\omega$$

❖ 计算题2:

$OB=BA=b$，OA垂直于AD，已知OA以 ω转动， β=30°。求图示位置时，D相对于BC的速度。



（3）速度合成法

动点：DA上的D

动系： BC

$$\vec{v}_{Da}=\vec{v}_{Dr}+\vec{v}_{De}$$

	$\vec{v}_{Da}$	$\vec{v}_{Dr}$	$\vec{v}_{De}$
大小：	✓	?	✓
方向：	✓	✓	✓

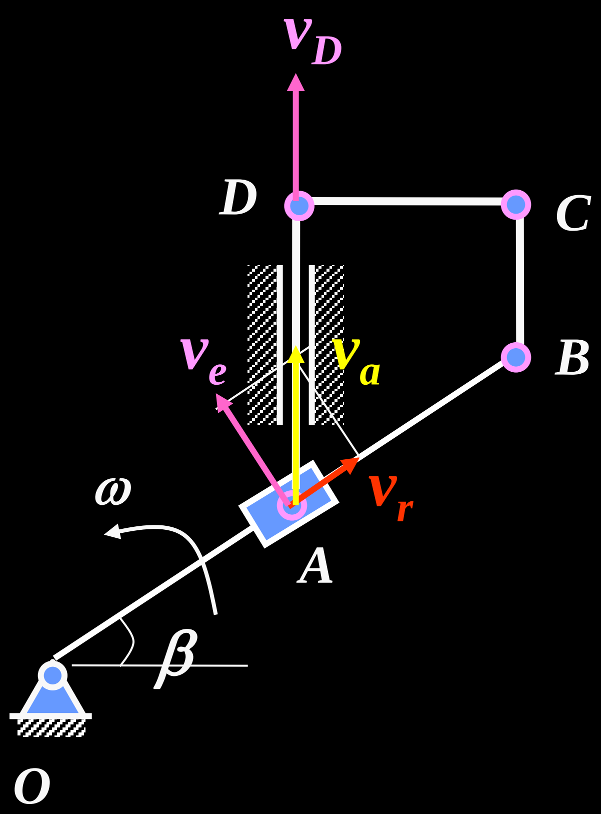
$$v_{Da}=\frac{4\sqrt{3}}{3}b\omega$$

$$v_{De}=\frac{2\sqrt{3}}{3}b\omega$$

$$v_{Dr}=\frac{2\sqrt{3}}{3}b\omega$$

❖ 计算题4:

OB=80cm，BC=20cm，A为OB的中点，BC铅垂，CD水平。已知OB以 ω=2rad/s转动， β=30°。求图示位置时，CD的角速度。



解：(1) 合成法求AD的速度

动点：DA上的A

动系： OB

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

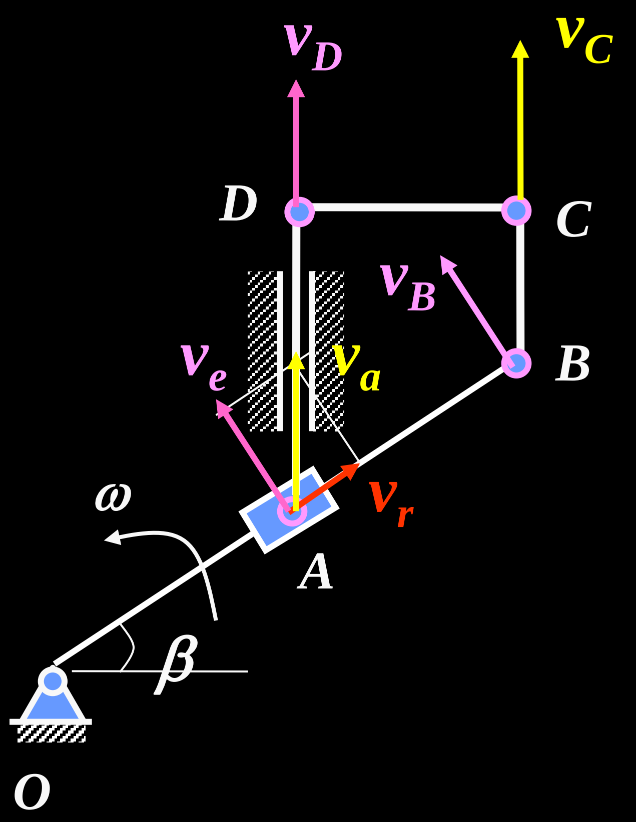
	$\vec{v}_a$	$\vec{v}_r$	$\vec{v}_e$
大小：	?	?	80cm/s
方向：	✓	✓	✓

$$v_a = \frac{v_e}{\cos\beta} = \frac{160\sqrt{3}}{3}\text{cm/s}$$

$$v_D = \frac{160\sqrt{3}}{3}\text{cm/s}$$

❖ 计算题4:

OB=80cm，*BC*=20cm，*A*为*OB*的中点，*BC*铅垂，*CD*水平。已知*OB*以 ω=2rad/s转动， β=30°。求图示位置时，*CD*的角速度。



$$v_D = \frac{160\sqrt{3}}{3}\ \text{cm/s}$$

（2）速度投影定理求*C*的速度

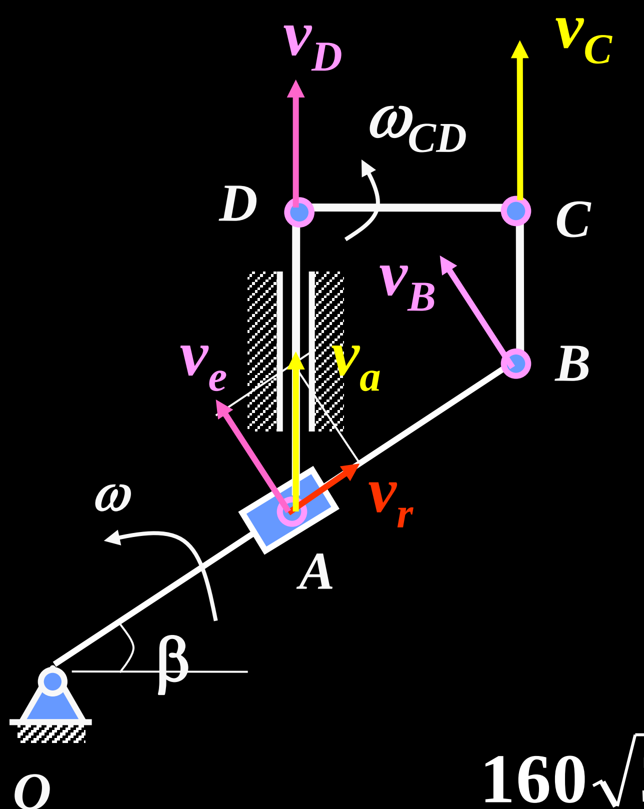
$$\left[\vec{v}_C\right]_{BC} = \left[\vec{v}_B\right]_{BC}$$

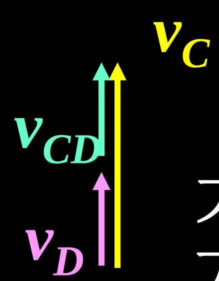
$$v_B = 2v_e = 160\text{cm/s}$$

由D点速度方向确定CD的速度瞬心一定在CD连线上，所以C点速度也垂直于CD

$$v_C = v_B\cos\beta = 80\sqrt{3}\text{cm/s}$$

❖ 计算题4:





（3）基点法求*CD*的角速度

选*D*为基点

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_{CD}$$

	$\vec{v}_C$	$\vec{v}_D$	$\vec{v}_{CD}$
大小：	✓	✓	$CD\cdot\omega_{CD}$?
方向：	✓	✓	✓

$$v_D = \frac{160\sqrt{3}}{3}\text{cm/s}$$

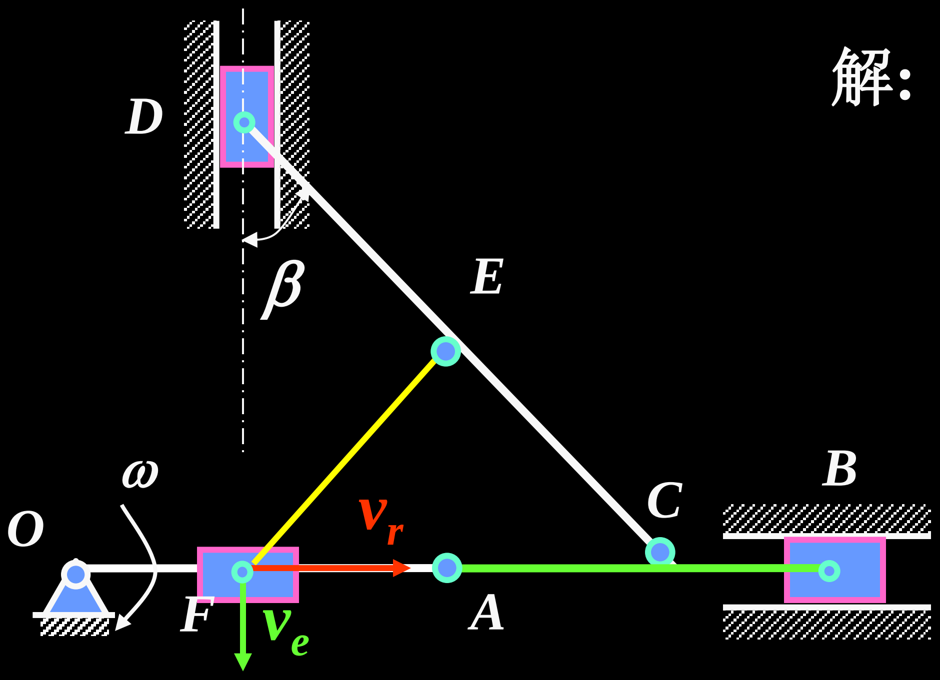
$$v_C = 80\sqrt{3}\text{cm/s}$$

$$v_{CD} = v_C - v_D = \frac{80\sqrt{3}}{3}\text{cm/s}$$

$$\omega_{CD} = \frac{v_{CD}}{CD} = \frac{4}{3}\text{rad/s}$$

❖ 计算题5:

$OA=AB=L=40\text{cm}$，$EF=20\sqrt{2}\text{cm}$，$CD=40\sqrt{2}\text{ cm}$。C为AB的中点，E为CD的中点，CD垂直于EF，已知OA以 $\omega=2\text{rad/s}$转动，$\beta=45^{\circ}$。求图示位置时，套筒F的速度。



解：(1) 合成法求F的速度

动点：EF上的F

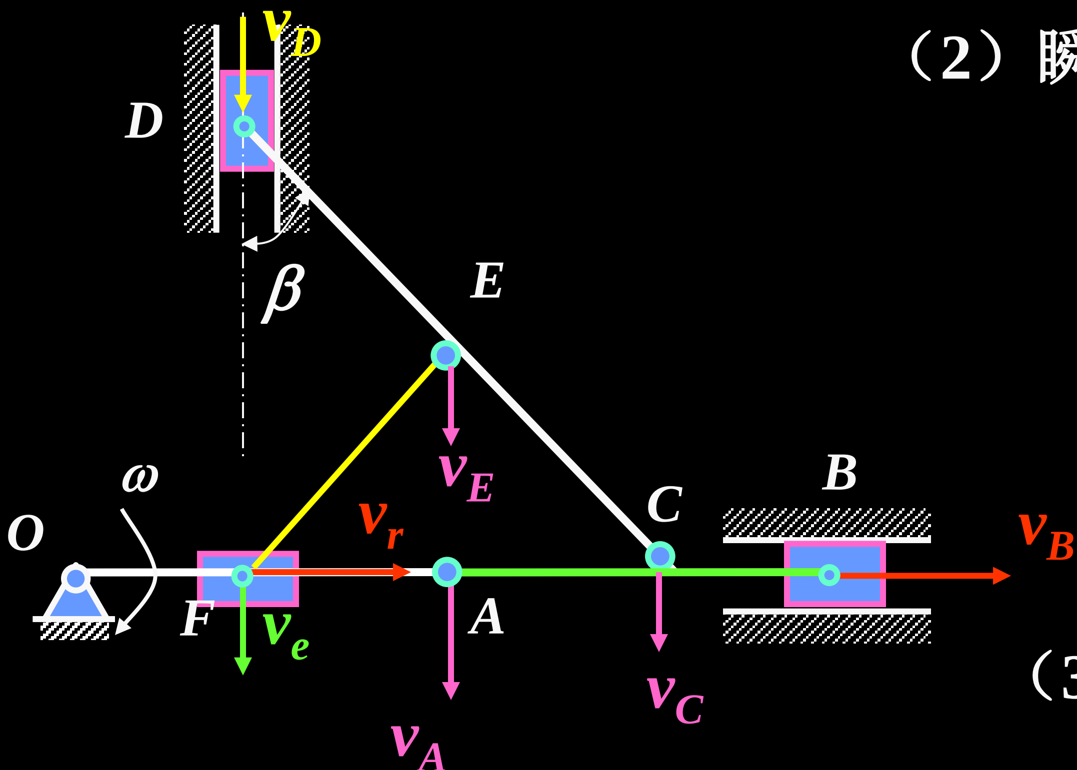
动系：OA

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e$$

	$\vec{v}_a$	$\vec{v}_r$	$\vec{v}_e$
大小：	?	?	40cm/s
方向：	?	✓	✓

❖ 计算题5:

$OA=AB=L=40\text{cm}$，$EF=20\sqrt{2}\text{cm}$，$CD=40\sqrt{2}\text{ cm}$。C为AB的中点，E为CD的中点，CD垂直于EF，已知OA以 $\omega=2\text{rad/s}$转动，$\beta=45^{\circ}$。求图示位置时，套筒F的速度。



（2）瞬心法求C点速度

$$v_A = 80\text{cm/s}$$

B为AB的速度瞬心

$$v_C = 40\text{cm/s}$$

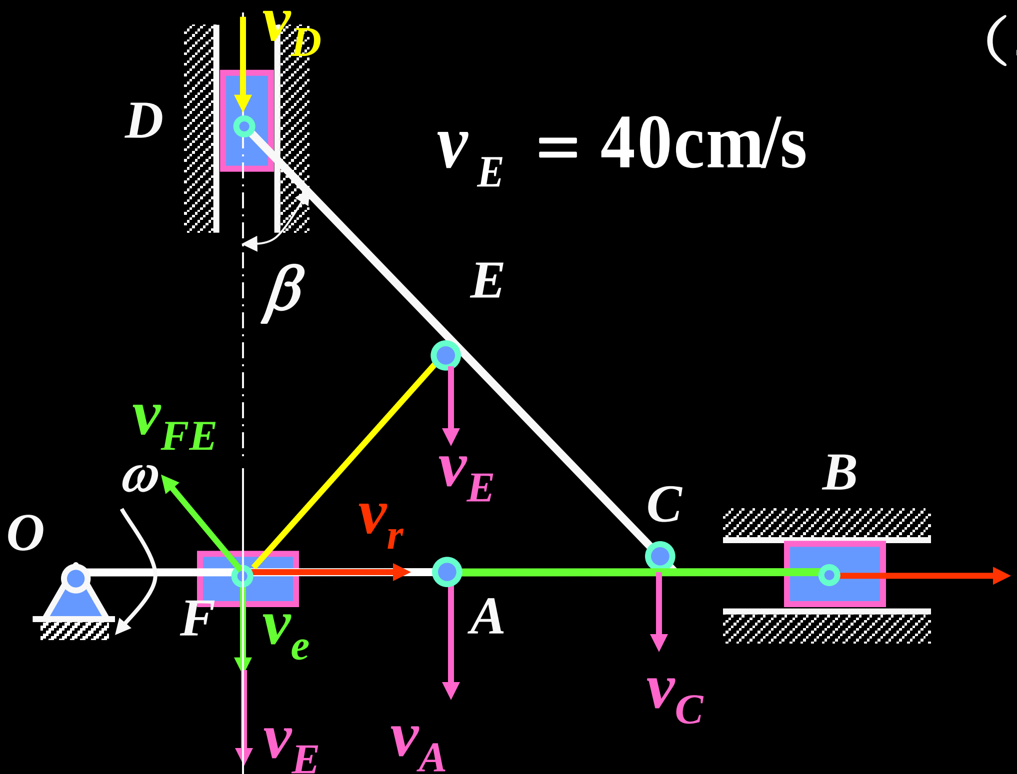
（3）瞬心法求E点速度

CD作瞬时平动

$$v_E = 40\text{cm/s}$$

❖ 计算题5：

$OA=AB=L=40$cm，$EF=20\sqrt{2}$cm，$CD=40\sqrt{2}$ cm。C为AB的中点，E为CD的中点，CD垂直于EF，已知OA以 $\omega=2$rad/s转动，β=45º。求图示位置时，套筒F的速度。



$$v_E = 40\text{cm/s}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

大小：? ? 40cm/s

方向：? ✓ ✓

（4）基点法求F点速度

以E为基点

$$\vec{v}_F = \vec{v}_E + \vec{v}_{FE}$$

大小：? 40cm/s ?

方向：? ✓ ✓

$$\vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_E + \vec{v}_{FE}$$

y: $$v_e = v_E - v_{FE}\cos\beta$$

$$v_{FE} = 0$$

$$v_F = v_E = 40\text{cm/s}$$

动力学

- 动力学基本量的计算
- 动力学解题方法
- 动力学综合题的解法

一、动力学基本量的计算

- 动量
- 动量矩
- 动能
- 惯性力
- 功
- 功率
- 冲量

- 研究范围
  - 质点
  - 质点系
  - 平动刚体
  - 定轴转动刚体
  - 平面运动刚体

	质点	质点系	平行移动刚体	定轴转动刚体	平面运动刚体
动量	$\vec{p}=m\vec{v}$	$\vec{p}=\Sigma m_i\vec{v}_i$ $\vec{p}=M\vec{v}_C$	$\vec{p}=M\vec{v}_C$	$\vec{p}=M\vec{v}_C$	$\vec{p}=M\vec{v}_C$
动量矩（对定点）	$\vec{L}_o=\vec{M}_o(m\vec{v})$ $=\vec{r}\times m\vec{v}$	$\vec{L}_o=\Sigma\vec{M}_o(m_i\vec{v}_i)$ $=\Sigma(\vec{r}\times m\vec{v})$	$\vec{L}_o=\vec{M}_o(M\vec{v}_C)$		
动量矩（对定轴）	$L_z=M_z(m\vec{v})$ $L_z=[\vec{L}_o]_z$	$L_z=\Sigma M_z(m_i\vec{v}_i)$	$L_z=M_z(M\vec{v}_C)$	$L_z=J_z\omega$	$L_z=M_z(M\vec{v}_C)$ $+J_C\omega$
动能	$T=\dfrac{mv^2}{2}$	$T=\Sigma\dfrac{m_iv_i^2}{2}$	$T=\dfrac{Mv_C^2}{2}$	$T=\dfrac{J_z\omega^2}{2}$	$T=\dfrac{Mv_C^2}{2}$ $+\dfrac{J_C\omega^2}{2}$
惯性力	$\vec{F}_I=-m\vec{a}$	$\vec{F}_{IR}=-\Sigma m_i\vec{a}_i$ $\vec{M}_{IO}=\Sigma\vec{M}_O(-m_i\vec{a}_i)$	$\vec{F}_{IR}=-M\vec{a}_C$ 质心	$\vec{F}_{IR}=-M\vec{a}_C$ $M_{Iz}=-J_z\alpha$ 转轴与对称平面交点	$\vec{F}_{IR}=-M\vec{a}_C$ $M_{IC}=-J_C\alpha$ 质心

	定义	力			力矩
		重力	弹性力	摩擦力	
功	$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ $W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$	$W = mgh_C$	$W = \frac{k}{2}\left(\delta_1^2 - \delta_2^2\right)$	$W = -fF_N s$	$W = \int M\cdot d\varphi$ $W = M\varphi$
功率	$P = \frac{dW}{dt}$	$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$			$P = M\cdot\omega$
冲量	$I = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$	$I_x = \int_{t_1}^{t_2}F_x dt$	$I_y = \int_{t_1}^{t_2}F_y dt$		
	$J_z = \Sigma m_i r_i^2$	杆	圆盘	细圆环	平行移轴公式
转动惯量	$J_z = \int_{(m)} r^2 dm$ $J_z = m\rho_z^2$	$J_{zC} = \frac{1}{12}ml^2$	$J_{zC} = \frac{1}{2}mr^2$	$J_{zC} = mr^2$	$J_z = J_{zC} + mh^2$

二、动力学解题方法

- 解题步骤：

1. 选研究对象。
2. 受力分析，画受力图。
3. 运动分析，确定速度（角速度）与加速度（角加速度）。
4. 建立力与运动的关系：选择解题方法，用动量矩定理，或平面运动微分方程，或动能定理，列出所用方法的公式或方程。
5. 求解未知量。

动力学解题方法一览表

		矢量式	标量式		备注
			直角坐标系	自然坐标系	
动力法	质点运动微分方程	$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\Sigma\vec{F}_i$	$m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma F_{xi}$	$m\frac{dv}{dt}=\Sigma F_{\tau i}$ $mv^2/\rho=\Sigma F_{ni}$	两类质点问题
	动量定理	$\frac{d\vec{p}}{dt}=\Sigma\vec{F}_i$ $\vec{p}_2-\vec{p}_1=\Sigma\vec{I}_i$	$\frac{dp_x}{dt}=\Sigma F_{xi}$ $p_{2x}-p_{1x}=\Sigma I_{xi}$	$\frac{dp_\tau}{dt}=\Sigma F_{\tau i}$ $p_{2n}-p_{1n}=\Sigma I_{ni}$	求约束反力问题
	质心运动定理	$M\vec{a}_C=\Sigma\vec{F}_i$	$Ma_{Cx}=\Sigma F_{xi}$ $Ma_{Cy}=\Sigma F_{yi}$	$Ma_{Cn}=\Sigma F_{ni}$ $Ma_{C\tau}=\Sigma F_{\tau i}$	求约束反力问题
	动量矩定理	$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\Sigma\vec{M}_{Oi}$	$\frac{dL_x}{dt}=\Sigma M_{xi}$	$\frac{d\vec{L}_C}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_C(\vec{F}_i^{(e)})$	求运动问题
	定轴转动微分方程		$J_z\alpha=\sum_{i=1}^{n}M_z(\vec{F}_i)$		求运动问题(转动刚体)

动力学解题方法一览表

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2">矢量式</td><td colspan="2">标量式</td><td rowspan="2">备注</td></tr>
<tr><td>直角坐标系</td><td>自然坐标系</td></tr>
<tr><td>能量法</td><td>动能定理</td><td></td><td>$dT=\Sigma dW_{Fi}$
$T_2-T_1=\Sigma W_{Fi}$</td><td>$\dfrac{dT}{dt}=\Sigma P_{Fi}$</td><td>已知主动力求运动</td></tr>
<tr><td>动静法</td><td>达朗伯原理</td><td>$\vec{F}_i+\vec{F}_{Ni}+\vec{F}_{Ii}=0$</td><td>$\Sigma F_{xi}=0$ $\Sigma F_{yi}=0$
$\Sigma M_o\left(\vec{F}_i\right)=0$</td><td>$\Sigma F_{ni}=0$ $\Sigma F_{\tau i}=0$
$\Sigma M_o\left(\vec{F}_i\right)=0$</td><td>求各种问题(约束反力)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">守恒法</td><td>质心运动守恒定理</td><td>$\Sigma\vec{F}_i=0\Rightarrow$
$\vec{v}_C=$常矢量</td><td>$\Sigma F_{xi}=0\Rightarrow$
$v_{Cx}=const$</td><td></td><td rowspan="3">已知一种运动状态求另一种运动状态</td></tr>
<tr><td>动量矩守恒定理</td><td>$\Sigma\vec{M}_{oi}=0\Rightarrow$
$\vec{L}_o=$常矢量</td><td>$\Sigma M_{xi}=0\Rightarrow$
$L_x=const$</td><td></td></tr>
<tr><td>动量守恒</td><td>$\Sigma\vec{F}_i=0\Rightarrow$
$\vec{p}=$常矢量</td><td>$\Sigma F_{xi}=0\Rightarrow$
$p_x=const$</td><td></td></tr>
</table>

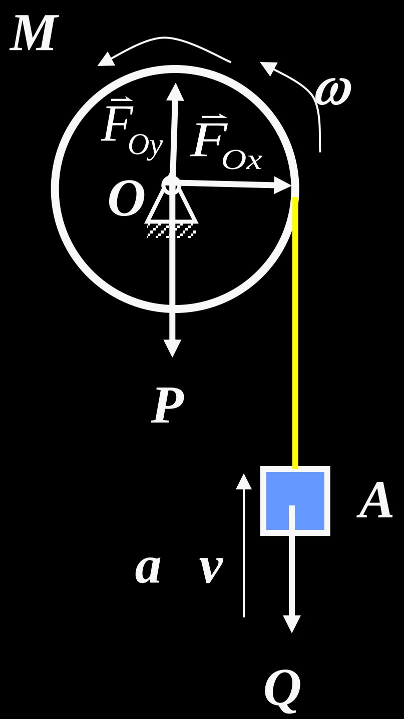
三、 动力学综合题的解法

1. 已知：主动力

求：速度、加速度或角速度、角加速度

- 动能定理（最方便，推荐采用。）
- 动静法（较动能定理繁）
- 动量矩定理（有些问题不能求解）

❖ 计算题1：



已知：均质圆盘重量为P，半径为r。受力矩M作用，重物A重量为Q。

求：重物A的加速度。

解：（动能定理）

1. 选整体为研究对象。

2. 受力分析，画受力图。

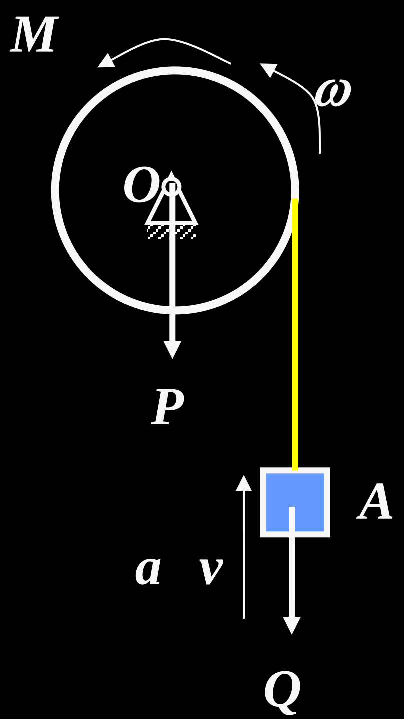
3. 运动分析，确定速度与加速度。

$$\omega = \frac{v}{r}$$

4. 建立力与运动的关系：列出公式或方程。 $\frac{dT}{dt} = \Sigma P_{Fi}$

$$T = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\right)\omega^2 \qquad T = \frac{P+2Q}{4g}v^2$$

❖ 计算题1：



4. 建立力与运动的关系：列出公式或方程。

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma P_{Fi}$$

$$T = \frac{P+2Q}{4g} v^2$$

$$\Sigma P_{Fi} = M\omega - Qv$$

$$\Sigma P_{Fi} = \left(\frac{M}{r} - Q\right)v$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P+2Q}{2g} va$$

$$\frac{P+2Q}{2g} va = \left(\frac{M}{r} - Q\right)v$$

5. 求解未知量

$$a = \frac{2\left(\frac{M}{r} - Q\right)}{P+2Q} g$$

三、 动力学综合题的解法

2. 已知**:** 运动

求：约束反力

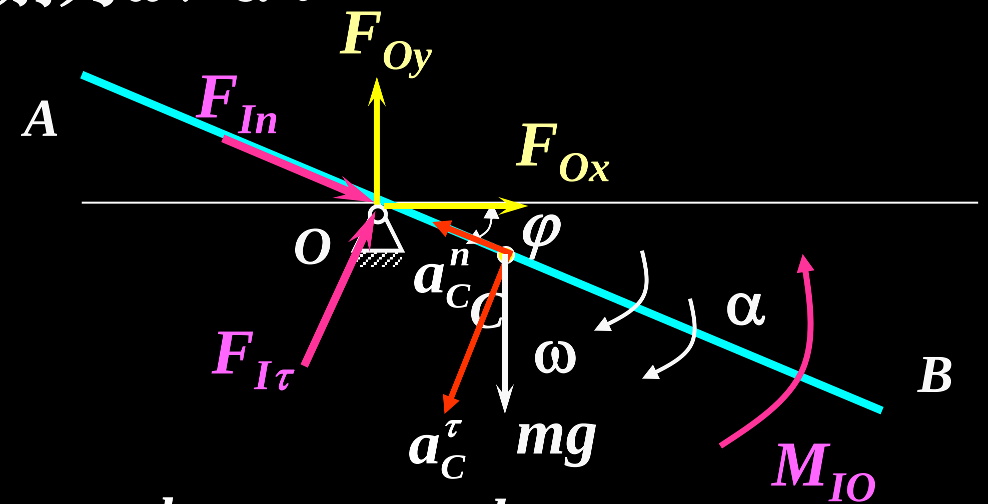
动静法（推荐采用）

动量与动量矩定理（情况较复杂）

❖ 计算题2：

已知：长为l，质量为m的AB杆可绕通过O点的水平轴在铅垂平面内转动，OA为$l/3$，当OA转至与水平线成φ角时，角速度和角加速度分别为ω、α 。

求：支座O上的约束反力。



解：（动静法）

1. 选AB为研究对象。

2. 受力分析，画受力图。

3. 运动分析，确定加速度。 $a_C^n = \frac{l}{6}\omega^2$ $a_C^\tau = \frac{l}{6}\alpha$

4. 建立力与运动的关系：虚加惯性力，列平衡方程求未知量。

$$F_{In} = \frac{ml}{6}\omega^2 \qquad F_{I\tau} = \frac{ml}{6}\alpha \qquad M_{IO} = J_o\alpha = \left(\frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{36}\right)\alpha = \frac{ml^2}{9}\alpha$$

❖ 计算题2:

4. 建立力与运动的关系：虚加惯性力，列平衡方程求未知量。

$$F_{In} = \frac{ml}{6}\omega^2 \qquad F_{I\tau} = \frac{ml}{6}\alpha \qquad M_{IO} = J_o\alpha = \left(\frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{36}\right)\alpha = \frac{ml^2}{9}\alpha$$

$$\Sigma F_x = 0$$

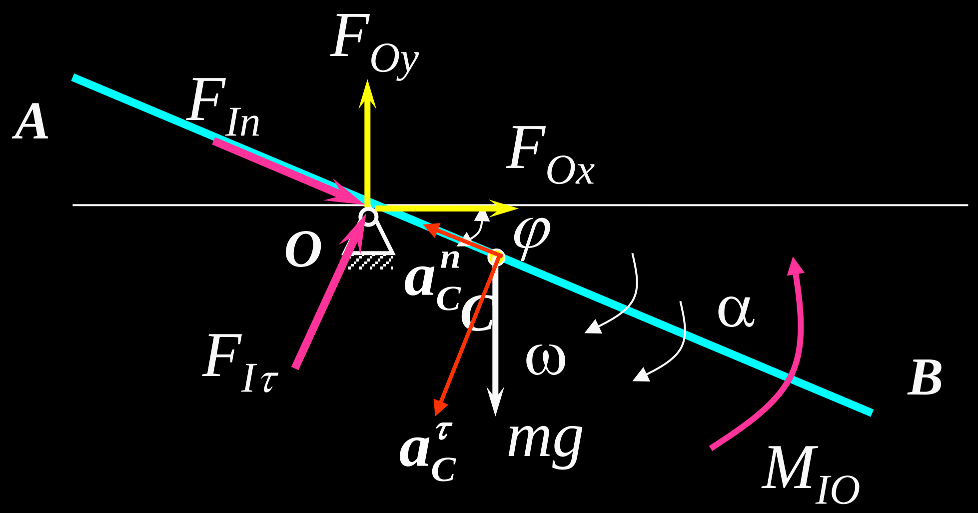
$$F_{Ox} + F_{In}\cos\varphi + F_{I\tau}\sin\varphi = 0$$

$$F_{Ox} = -\frac{ml}{6}\left(\omega^2\cos\varphi + \alpha\sin\varphi\right)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{Oy} - F_{In}\sin\varphi + F_{I\tau}\cos\varphi + mg = 0$$

$$F_{Oy} = \frac{ml}{6}\left(\omega^2\sin\varphi - \alpha\cos\varphi\right) - mg$$



三、 动力学综合题的解法

3. 求运动和力的混合问题

动能定理＋动静法（推荐采用）

动量与动量矩定理

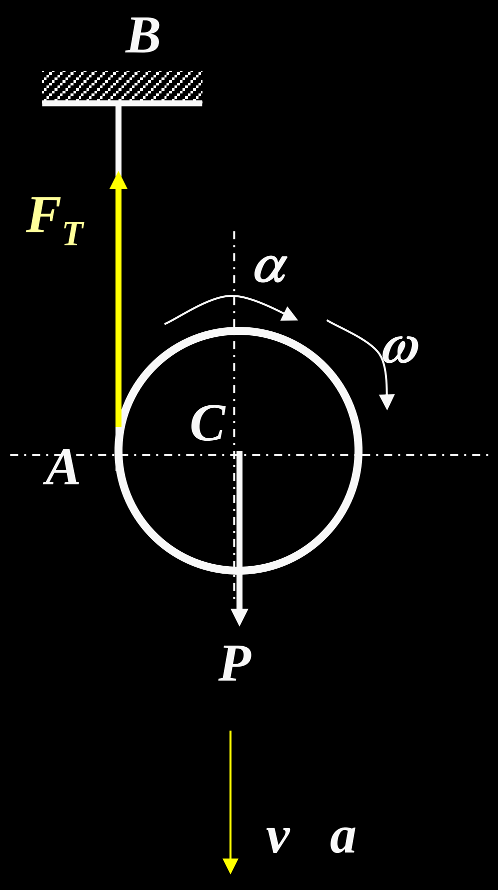
动量与动量矩定理＋动静法

动静法

❖ 计算题3：

已知：质量为m匀质圆柱因细绳解开而下降，设AB保持铅垂位置。

求：圆柱中心的加速度和细绳所受的拉力。



解：（1）用动能定理求C点的加速度

选圆柱为研究对象，作受力分析与运动分析

$$\omega = \frac{v}{r} \qquad \alpha = \frac{a}{r}$$

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma P_{Fi}$$

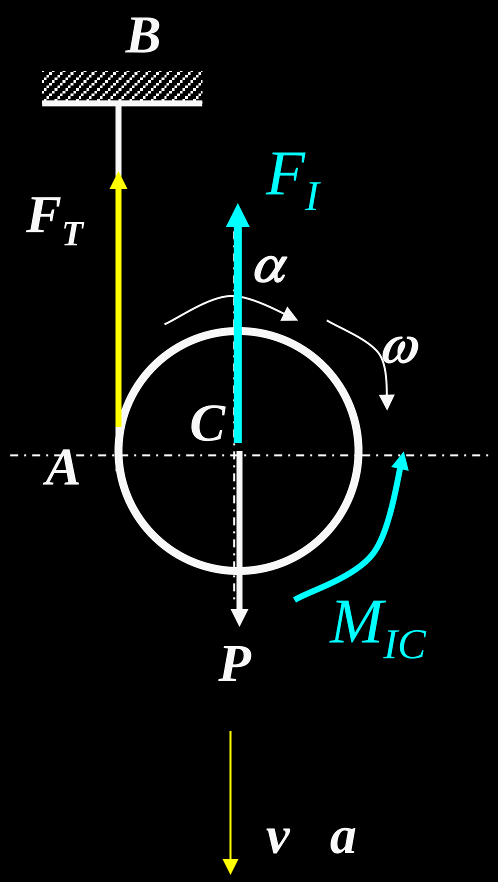
$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\omega^2 = \frac{3mv^2}{4}$$

$$\frac{3mva}{2} = mgv \qquad a = \frac{2}{3}g$$

❖ 计算题3：

已知：质量为m匀质圆柱因细绳解开而下降，设AB保持铅垂位置。

求：圆柱中心的加速度和细绳所受的拉力。



解：（2）用动静法求细绳的拉力

选圆柱为研究对象

$$a = \frac{2}{3}g \qquad \alpha = \frac{2}{3r}g$$

$$F_I = \frac{2}{3}mg$$

$$M_{IC} = J_C\alpha = \frac{mr^2}{2}\frac{2}{3r}g = \frac{mr}{3}g$$

$$\Sigma F_y = 0$$

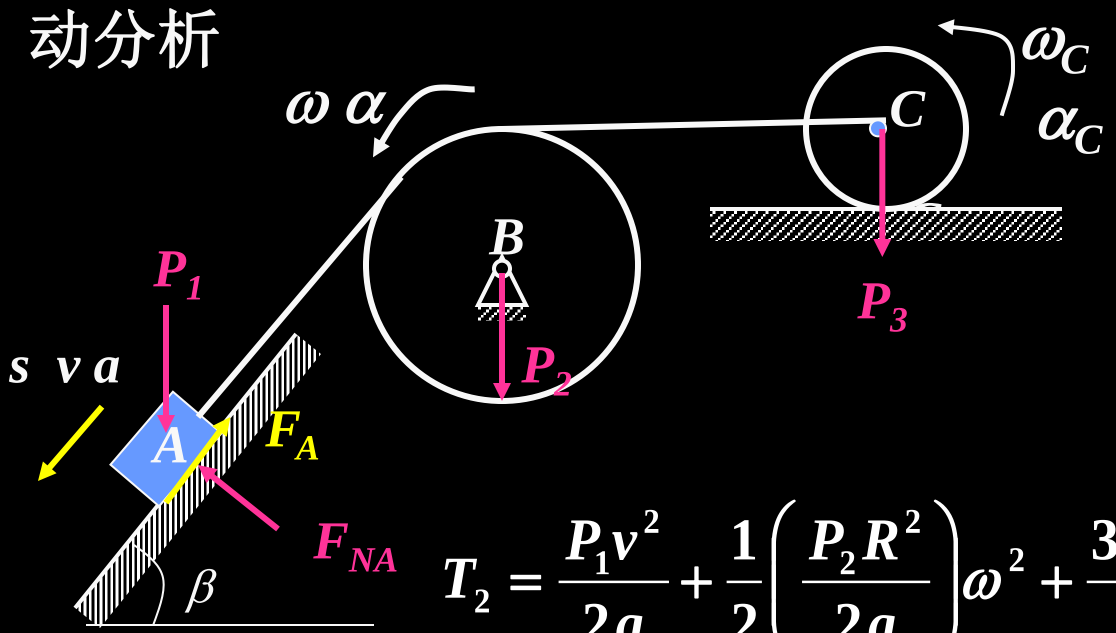
$$F_T = mg - F_I = \frac{1}{3}mg$$

❖ 计算题4：

已知：物块A重P_1，与倾角为β的斜面间的动滑动摩擦系数为f'。半径为R的匀质滑轮B重P_2，绳与滑轮间无相对滑动。半径为r的匀质圆盘重P_3，在水平面上纯滚动。求当物块A由静止开始沿斜面下滑到距离s时：（1）滑轮B的角速度和角加速度。（2）水平面对轮C的滑动摩擦力。

解：（1）动能定理

选系统为研究对象，作受力分析与运动分析



$$\omega = \frac{v}{R} \qquad \alpha = \frac{a}{R}$$

$$\omega_C = \frac{v}{r} \qquad \alpha_C = \frac{a}{r}$$

$$T_2 - T_1 = \Sigma W_{Fi}$$

$$T_1 = 0$$

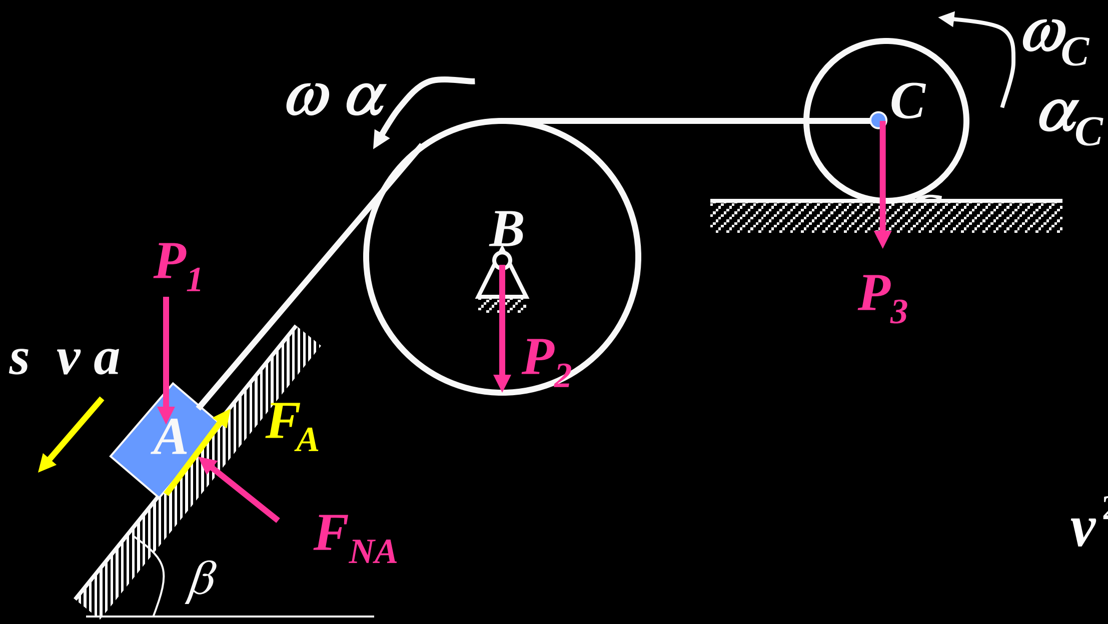
$$T_2 = \frac{P_1 v^2}{2g} + \frac{1}{2}\left(\frac{P_2 R^2}{2g}\right)\omega^2 + \frac{3P_3 v^2}{4g}$$

$$T_2 = \frac{2P_1 + P_2 + 3P_3}{4g}v^2$$

❖ 计算题4:

解：（1）动能定理

选系统为研究对象



$$T_2 - T_1 = \Sigma W_{Fi}$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{2P_1 + P_2 + 3P_3}{4g} v^2$$

$$\Sigma W_{Fi} = P_1 s \cdot \sin\beta - F_A s$$

$$F_A = f' F_{NA} = f' P_1 \cos\beta$$

$$\Sigma W_{Fi} = P_1 (\sin\beta - f' \cos\beta) s$$

$$v^2 = \frac{4gsP_1(\sin\beta - f'\cos\beta)}{2P_1 + P_2 + 3P_3}$$

$$a = \frac{2gP_1(\sin\beta - f'\cos\beta)}{(2P_1 + P_2 + 3P_3)}$$

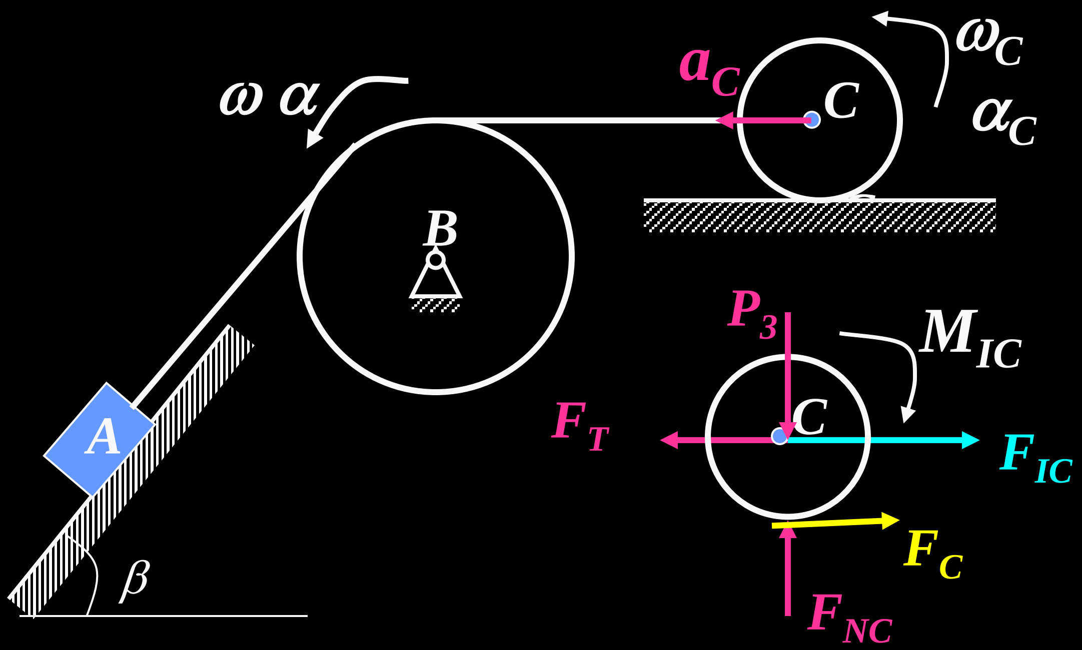
$$\alpha = \frac{2gP_1(\sin\beta - f'\cos\beta)}{R(2P_1 + P_2 + 3P_3)}$$

❖ 计算题4:

（2）水平面对轮C的滑动摩擦力。

解：（2）动静法

选C为研究对象



$$\alpha_C = \frac{a}{r} = \frac{R}{r}\alpha$$

$$a_C = r\alpha_C = R\alpha$$

$$F_{IC} = \frac{P_3 r\alpha_C}{g}$$

$$M_{IC} = \frac{P_3 r^2\alpha_C}{2g} = \frac{P_3 rR\alpha}{2g}$$

$$\Sigma M_C = 0$$

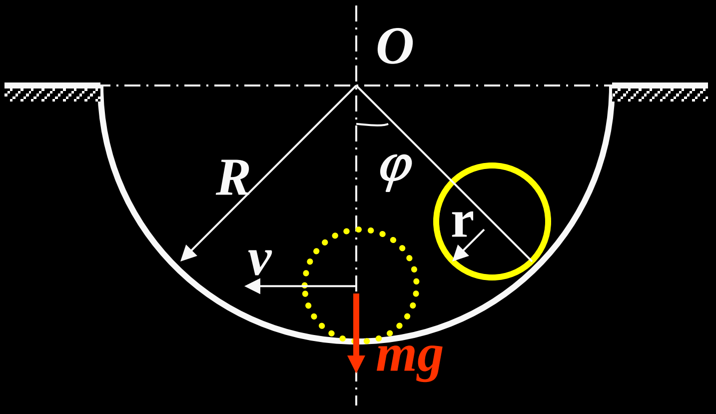
$$F_C = \frac{M_{IC}}{r} = \frac{P_3 R\alpha}{2g}$$

$$\alpha = \frac{2gP_1(\sin\beta - f'\cos\beta)}{R(2P_1 + P_2 + 3P_3)}$$

$$F_C = \frac{P_1 P_3(\sin\beta - f'\cos\beta)}{2P_1 + P_2 + 3P_3}$$

❖ 计算题5:

匀质轮沿固定圆弧作纯滚动，由图示位置无初速运动到最低点时，求：（1）轮心的速度。（2）底面对轮的正压力。



解：（1）动能定理

选轮为研究对象

$$T_2 - T_1 = \Sigma W_{Fi}$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{3mv^2}{4}$$

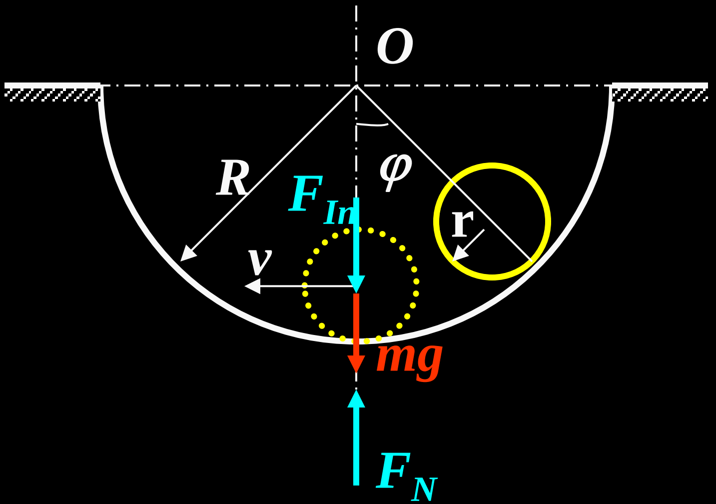
$$\Sigma W_{Fi} = mg(R-r)(1-\cos\varphi)$$

$$\frac{3mv^2}{4} = mg(R-r)(1-\cos\varphi)$$

$$v = \sqrt{\frac{4g(R-r)(1-\cos\varphi)}{3}}$$

❖ 计算题5:

匀质轮沿固定圆弧作纯滚动，由图示位置无初速运动到最低点时，求：（1）轮心和速度。（2）底面对轮的正压力。



解：（2）动静法

选轮为研究对象

$$v=\sqrt{\frac{4g(R-r)(1-\cos\varphi)}{3}}$$

$$a_n=\frac{v^2}{R-r}=\frac{4g(1-\cos\varphi)}{3}$$

$$F_{In}=\frac{4mg(1-\cos\varphi)}{3}$$

$$F_N=mg+F_{In}=\frac{mg(7-4\cos\varphi)}{3}$$

❖ 计算题6：

两轮小车如图。已知：车轮C作纯滚动，车轮各重为P、半径为r，车身重为4P，A轮重为2P、半径为R，斜面的倾角θ=30^0。各轮均为匀质轮，B轮的质量不计，绳的两直线段分别与斜面和水平面平行。试求：（1）两轮小车车身的加速度；（2）支座O的反力。

解：（1）动能定理

选系统为研究对象

$$\omega = \frac{v}{R} \qquad \alpha = \frac{a}{R} \qquad \frac{dT}{dt} = \Sigma P_{Fi}$$

$$T = 2\cdot\frac{3Pv^2}{4g} + \frac{4Pv^2}{2g} + \frac{1}{2}\left(\frac{2PR^2}{2g}\right)\omega^2$$

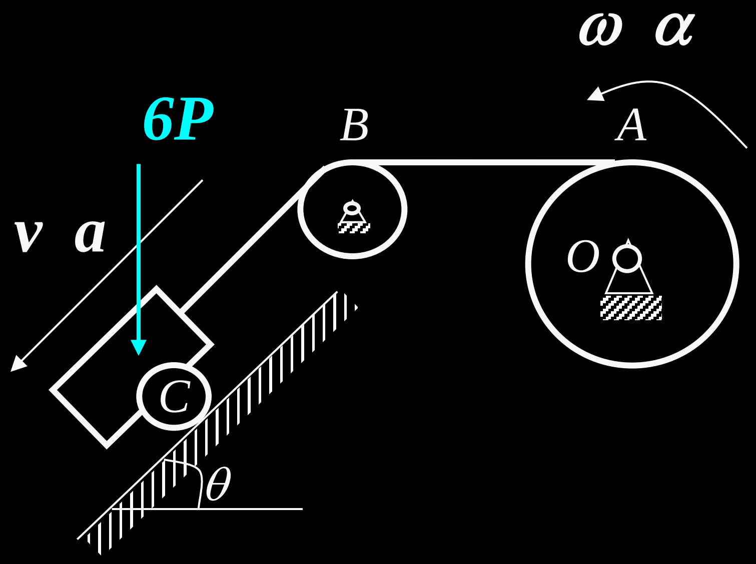
$$T = \frac{4P}{g}v^2$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{8P}{g}va$$

$$\Sigma P_{Fi} = 6Pv\sin\theta = 3Pv$$

$$a = \frac{3}{8}g$$

$$\alpha = \frac{3}{8R}g$$



❖ 计算题6：

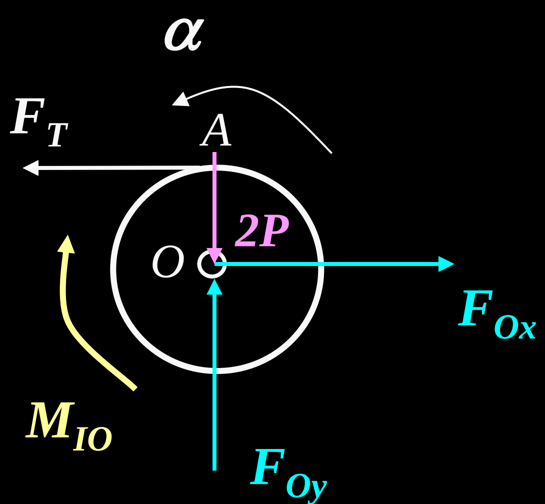
两轮小车如图。已知：车轮C作纯滚动，车轮各重为P、半径为r，车身重为4P，A轮重为2P、半径为R，斜面的倾角θ=30^0。各轮均为匀质轮，B轮的质量不计，绳的两直线段分别与斜面和水平面平行。试求：（1）两轮小车车身的加速度；（2）支座O的反力。

（2）动静法

选O为研究对象

$$\alpha = \frac{3}{8R}g$$

$$M_{IO} = \frac{2PR^2}{2g}\alpha = \frac{3PR}{8}$$



$$\Sigma M_O = 0 \qquad F_T = \frac{3P}{8}$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_{Ox} = \frac{3P}{8}$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_{Oy} = 2P$$

❖ 计算题7：

已知：匀质轮A重P、半径为R，匀质轮B重Q、半径为r，轮C质量不计、半径为r，其上作用力偶矩为M的常值力偶，且R＝2r，倾角为β。设绳轮间无相对滑动。求（1）轮心B的加速度。（2）支座A的反力。

解：（1）动能定理

选系统为研究对象

$$\omega=\frac{v}{r}\qquad \alpha=\frac{a}{r}\qquad \omega_A=\frac{2v}{R}=\frac{v}{r}$$

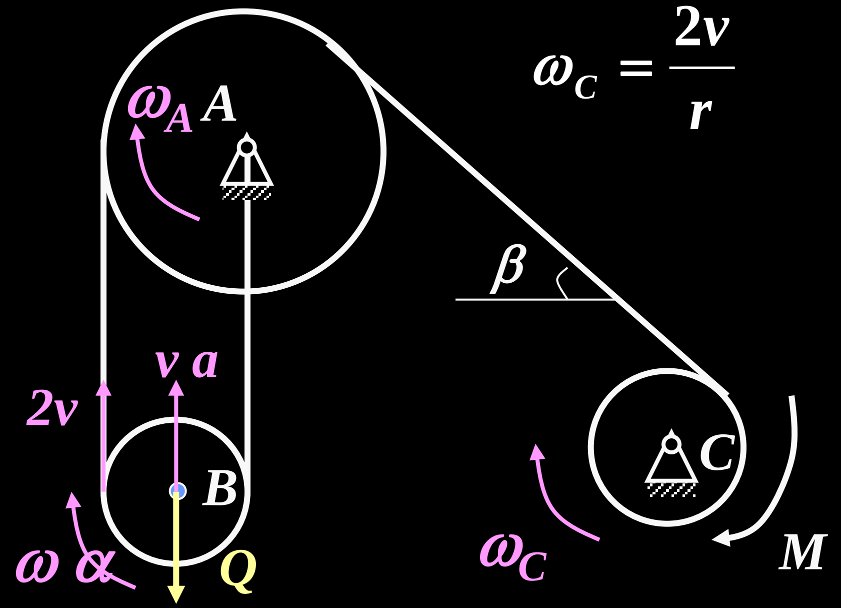
$$\omega_C=\frac{2v}{r}$$

$$\frac{dT}{dt}=\Sigma P_{Fi}$$

$$T=\frac{3Qv^2}{4g}+\frac{1}{2}\left(\frac{PR^2}{2g}\right)\left(\frac{2v}{R}\right)^2$$

$$T=\frac{4P+3Q}{4g}v^2$$

$$\Sigma P_{Fi}=M\frac{2v}{r}-Qv$$



$$a=\frac{4M-2Qr}{(4P+3Q)r}g$$

❖ 计算题7：

（2）动静法

选C为研究对象

$$\Sigma M_C = 0 \qquad F_T = \frac{M}{r}$$

选AB为研究对象：

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_{Ax} = -F_T\cos\beta = -\frac{M}{r}\cos\beta$$

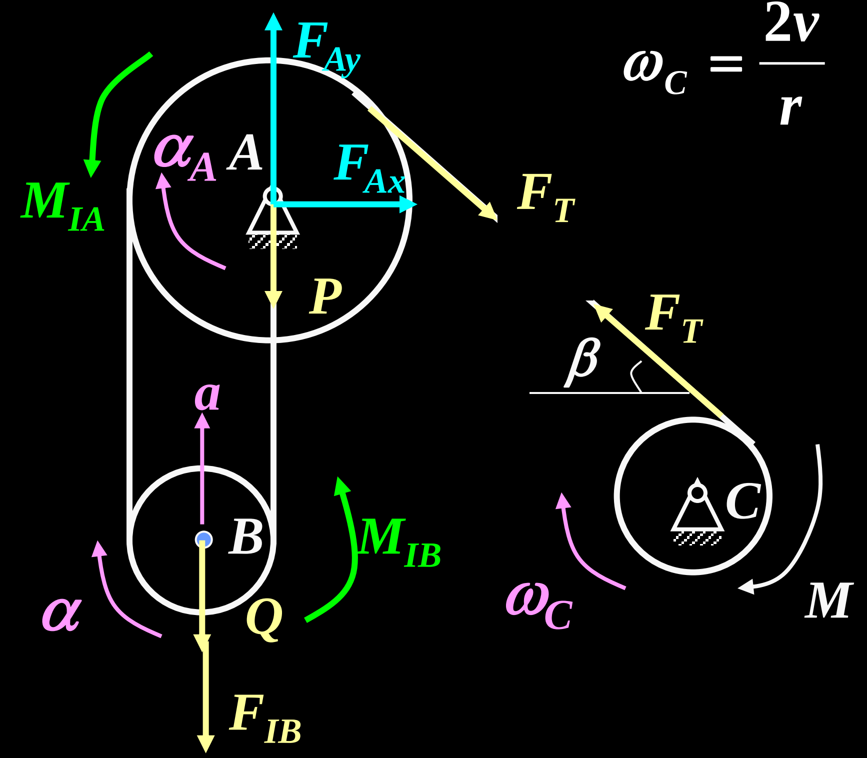
$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_{Ay} = F_T\sin\beta + P + Q + F_{IB}$$

$$F_{Ay} = \frac{M}{r}\sin\beta + P + Q + \frac{Q}{g}a$$

$$\omega = \frac{v}{r} \qquad \alpha = \frac{a}{r} \qquad \omega_A = \frac{v}{r}$$

$$\omega_C = \frac{2v}{r}$$



考试题型及内容：

一、判断题（10道小题，共20分）

二、选择题（5道小题，共20分）

三、填空题（5道小题，共20分）

四、计算题

1.静力学：平面任意力系的平衡问题，共10分；

2.运动学： 点的合成运动与 刚体平面运动的综合题，共15分

3.动力学 ：动力学综合题（求运动和力的混合问题），共15分