工科数学分析（一）（A 卷）参考答案及评分标准

2020 年 1 月 7 日

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. B　　2. A　　3. A　　4. A　　5. D

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $x=0$；

2. -1；

3. $\dfrac{2y+xy^3}{x-2x^2y^2}\mathrm{d}x$；

4. 0；

5. $x^2+o(x^3)$；

6. $(0,-2)$；

7. $-\dfrac{b}{2a}$；

8. $\dfrac{3}{4}$；

9. $2(1-2\mathrm{e}^{-1})$；

10. $\ln 3-\dfrac{1}{2}$.

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 解答：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^x-1-x)^2}{5x^4}$ ……2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\mathrm{e}^x-1-x)(\mathrm{e}^x-1)}{20x^3}$ ……2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\mathrm{e}^x-1-x)x}{20x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{10x^2}$ ……2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{20x}=\dfrac{1}{20}$. ……2 分

2. 解答：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{2f(t^2)\cdot f'(t^2)\cdot 2t}{f(t^2)}=4tf'(t^2)$， ……4 分

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)'_t}{x'_t}=4\dfrac{f'(t^2)+2t^2f''(t^2)}{f(t^2)}$， ……4 分

3. 解答：令 $x=t^6$，$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，则 ……2 分

原式 $=\displaystyle\int\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\mathrm{d}t$ ……2 分

$=\displaystyle\int\frac{6t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$=\displaystyle 6\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$=\displaystyle 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

$=6(t-\arctan t)+C$ ……3 分

$=6(x^{\frac{1}{6}}-\arctan x^{\frac{1}{6}})+C$. ……1 分

4. 解答：由于 $\dfrac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数，$\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数，于是

原式 $=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$=\displaystyle 4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ ……4 分

$=\displaystyle 4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}\mathrm{d}x$

$=\displaystyle 4\int_0^1\mathrm{d}x-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=4-\pi$. ……4 分

5. 解答：设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = B$，则 $f(x) = x^2 - Bx + 2A$，故

..............2 分

$$A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - Bx + 2A)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{B}{2} + 2A \quad \text{..............2 分}$$

$$B = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2 - Bx + 2A)\mathrm{d}x = \frac{8}{3} - 2B + 4A \quad \text{..............2 分}$$

于是有 $\begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{4}{3} \end{cases}$，所以 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$. ....2 分

四、应用题（9 分）

解答：曲线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 与直线 $3x - 2y - 4 = 0$ 的交点为 $(2,1)$ 和 $(4,4)$. ....2 分

（1）$D = \int_2^4 (\frac{3x-4}{2} - \frac{1}{4}x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$； ....3 分

（2）$V = \pi\int_2^4 [(\frac{3x-4}{2})^2 - (\frac{1}{4}x^2)^2]\mathrm{d}x = \frac{8}{5}\pi$. ....4 分

五、证明题（6 分）

证明：做辅助函数 $F(x) = x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，并且 $F(0) = 0, F(1) = 0$，可知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理，于是存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$，即：$\xi f(\xi) = \int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x$. ....6 分

装

订

线