

# 工科数学分析（一）（A 卷）参考答案及评分标准

## 2020 年 1 月 7 日

### 一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. B                  2. A                  3. A                  4. A                  5. D

### 二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| 1. $x = 0$ ;                           | 6. $(0, -2)$ ;              |
| 2. $-1$ ;                              | 7. $-\frac{b}{2a}$ ;        |
| 3. $\frac{2y + xy^3}{x - 2x^2y^2}dx$ ; | 8. $\frac{3}{4}$ ;          |
| 4. $0$ ;                               | 9. $2(1 - 2e^{-1})$ ;       |
| 5. $x^2 + o(x^3)$ ;                    | 10. $\ln 3 - \frac{1}{2}$ . |

### 三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 解答: 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{5x^4}$  .....2 分
- $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1 - x)(e^x - 1)}{20x^3}$  .....2 分
- $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1 - x)x}{20x^3}$
- $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{10x^2}$  .....2 分
- $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{20x} = \frac{1}{20}$  .....2 分

2. 解答:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2f(t^2) \cdot f'(t^2) \cdot 2t}{f(t^2)} = 4tf'(t^2)$ , .....4 分

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t = 4 \frac{f'(t^2) + 2t^2 f''(t^2)}{f(t^2)}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

3. 解答: 令  $x = t^6$ ,  $dx = 6t^5 dt$ , 则 .....2 分

$$\text{原式} = \int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)} dt \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \int \frac{6t^2}{1+t^2} dt$$

$$= 6 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt$$

$$= 6 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$= 6(t - \arctan t) + C \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= 6(x^{\frac{1}{6}} - \arctan x^{\frac{1}{6}}) + C. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

4. 解答: 由于  $\frac{2x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}}$  是偶函数,  $\frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}$  是奇函数, 于是

$$\text{原式} = \int_{-1}^1 \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 4 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= 4 \int_0^1 \frac{x^2(1 - \sqrt{1-x^2})}{x^2} dx$$

$$= 4 \int_0^1 dx - 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 4 - \pi. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

5. 解答: 设  $\int_0^1 f(x)dx = A$ ,  $\int_0^2 f(x)dx = B$ , 则  $f(x) = x^2 - Bx + 2A$ , 故

.....2 分

$$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - Bx + 2A)dx = \frac{1}{3} - \frac{B}{2} + 2A \quad \text{.....2 分}$$

$$B = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^2 - Bx + 2A)dx = \frac{8}{3} - 2B + 4A \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{于是有} \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{4}{3} \end{cases}, \text{ 所以 } f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}. \quad \text{.....2 分}$$

#### 四、应用题 (9 分)

解答: 曲线  $y = \frac{1}{4}x^2$  与直线  $3x - 2y - 4 = 0$  的交点为 (2,1) 和 (4,4). .....2 分

$$(1) D = \int_2^4 \left( \frac{3x-4}{2} - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{1}{3}; \quad \text{.....3 分}$$

$$(2) V = \pi \int_2^4 \left[ \left( \frac{3x-4}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{4}x^2 \right)^2 \right] dx = \frac{8}{5}\pi. \quad \text{.....4 分}$$

#### 五、证明题 (6 分)

证明: 做辅助函数  $F(x) = x \int_1^x f(t)dt$ , 显然  $F(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 并且  $F(0) = 0, F(1) = 0$ , 可知  $F(x)$  在  $[0,1]$  上满足罗尔定理, 于是存在  $\xi \in (0,1)$  使得  $F'(\xi) = 0$ , 即:  $\xi f(\xi) = \int_\xi^1 f(x)dx$ . .....6 分