姓名：________ 学号：________ 班级：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2020-2021 年 第一 学期）

2021-1-2

课程编号: 201912400201 课程名称: 工科数学分析（一）（A 卷）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设数列 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n=2k+1\\ \dfrac{1}{n}, & n=2k\end{cases}$，则______.

(A) 当 $n\to\infty$ 时，x_n 是无穷大量 (B) 当 $n\to\infty$ 时，x_n 是无穷小量

(C) 数列 $\{x_n\}$ 有界 (D) 数列 $\{x_n\}$ 无界

2. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 和 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则______.

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$ (B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$ (D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

3. 设函数 $f(x)=(x^2-1)^3$，则______.

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值 (B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 (D) $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值

4. 曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 对应于 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 的点处的曲率半径为______.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2

5. 设有反常积分① $\int_{e}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$ 和② $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx$，则下列结论正确的是______.

(A) ①②都收敛 (B) ①②都发散

(C) ①发散，②收敛 (D) ①收敛，②发散

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a-b=$______.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的第一类可去间断点是 $x=$________.

3. 由方程 $x=y^y$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的微分 $dy\big|_{x=1}=$______ dx.

4. 函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有皮亚诺型余项的 3 阶泰勒公式中 $(x-4)^2$ 的系数为________.

5. 函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的单调递增区间是________.

6. 函数 $y=xe^{-x}$ 图形的拐点为________.

7. 不定积分 $\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{2x}}=$___________.

8. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=$________.

9. 设函数 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)dx=$________.

10. 心形线 $r=a(1+\cos\theta)\,(a>0)$ 的弧长为________.

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

2. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\int_1^t u\ln u\,\mathrm{d}u \\ y=\int_1^{t^2} u^2\ln u\,\mathrm{d}u \end{cases}$ $(t>0)$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

3. 计算不定积分 $\int\dfrac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

4. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(\sin x^3+\cos x)\mathrm{d}x$.

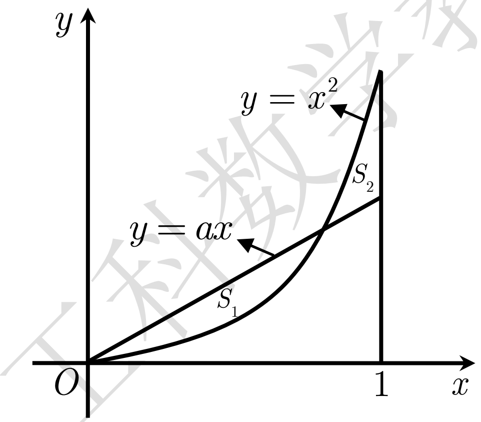
5. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

四、应用题（9 分）

如图所示，直线 $y=ax\,(0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形为 S_1（其面积也记为 S_1），它们与 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2（其面积也记为 S_2）. 图形 S_1 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_1，图形 S_2 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V_2.

（1）试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值;

（2）当 S_1+S_2 达到最小时，求 V_1+V_2.



五、证明题（6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明:

（1）存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=1-c$.

（2）存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

装

订

线