装

订

线

工科数学分析（一）（A 卷）参考答案及评分标准

2021 年 12 月 30 日

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. C　　2. B　　3. B　　4. D　　5. C

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. e；

2. $\frac{1}{2}$；

3. $\mathrm{d}x$；

4. $\frac{1}{2019}$；

5. 1；

6. $x\ln x - x + C$；

7. $\frac{1}{2^{2n}}\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}$ 或 $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$；

8. $\frac{\pi}{4}$；

9. $4-\pi$；

10. $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$.

三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 解答：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^2}$ ……………………2 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cos x^4}{x}$ ……………………4 分

$=\lim\limits_{x\to0}2\cos x^4$

$=2$. ……………………2 分

2. 解答：方程两边对 x 求导，得

$$3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0\text{（1）}$$ ……………………2 分

在原方程中令 $x=0$ 可得 $y(0)=-1$，代入（1）式得 $y'(0)=0$. ……………………2 分

对（1）式两边再对 x 求导，得

$$6x+6y+12xy'+3x^2y''-6y^2y''-12yy'^2=0\text{（2）}$$ ……………………2 分

将 $x=0$，$y(0)=-1$，$y'(0)=0$ 代入（1）式得 $y''(0)=-1$. ……………………2 分

3. 解答：原式 $=\frac{1}{3}\int\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}(1+x^3)$ ……………………4 分

$=\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}+C$. ……………………4 分

4. 解答：令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$ ……………………2 分

原式 $=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}x$ ……………………2 分

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ ……………………2 分

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$. ……………………2 分

四、应用题（每小题 9 分，共 18 分）

1. 解答:

y'	$\dfrac{3-x}{(x+3)^3}$ ……1 分
y''	$\dfrac{2(x-6)}{(x+3)^4}$ ……2 分
单调递增区间	$(-3,3)$ ……1 分
凹区间	$(6,+\infty)$ ……1 分
极值点	$x=3$ ……1 分
拐点	$(6,\dfrac{29}{27})$ ……1 分
渐近线（需指明渐近线的类型）	水平渐近线 $y=1$，铅直渐近线 $x=-3$. ……2 分

2. 解答: 如图，取积分变量为 x，其 x 变化区间为 $[0,2r]$，相应于区间 $[0,2r]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的一小薄层水的高度为 $\mathrm{d}x$，其重力为 $\pi\rho g[R^2-(R-x)^2]\mathrm{d}x$，将该小薄层水吸出所做的功近似为: ……2 分

$$\mathrm{d}W=\pi\rho g[r^2-(r-x)^2]\mathrm{d}x)\cdot(2r-x) \quad \text{……3 分}$$

于是所求的功为

$$W=\int_0^{2r}\pi\rho g[r^2-(r-x)^2](2r-x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\rho g\int_0^{2r}(4r^2x-4rx^2+x^3)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\rho g(2r^2x^2-\frac{4}{3}rx^3+\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^{2r} \quad \text{……2 分}$$

$$=\frac{4}{3}\pi\rho g r^4. \quad \text{……2 分}$$

五、证明题（5 分）

证明: 由拉格朗日中值定理可知 $\exists\xi\in(0,x)$，使得

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=\frac{1}{1+\xi} \quad \text{……3 分}$$

由于 $0<\xi<x$，故有

$$\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1$$

因此 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$. ……2 分

装

订

线