装

订

线

工科数学分析（一）（A 卷）参考答案及评分标准
2021 年 1 月 2 日

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D　　2. A　　3. B　　4. C　　5. A

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 5；
2. -1；
3. 1；
4. $-\dfrac{1}{64}$；
5. $[-1,1]$；
6. $(2,2\mathrm{e}^{-2})$；
7. $\sqrt{2x}-\ln(\sqrt{2x}+1)+C$；
8. $\dfrac{2}{\pi}$；
9. $\dfrac{4}{\pi}-1$；
10. $8a$.

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 解答：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}}{2x}$ ……4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{2}$ ……2 分

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……2 分

2. 解答：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{t^4\ln t^2\cdot(2t)}{t\ln t}=4t^4$, ……4 分

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})_t'}{x_t'}=\dfrac{16t^3}{t\ln t}=\dfrac{16t^2}{\ln t}$. ……4 分

3. 解答：原式 $=\int\ln\ln x\mathrm{d}(\ln x)$ ……2 分

$=\ln x\cdot\ln\ln x-\int\ln x\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

$=\ln x\cdot\ln\ln x-\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ ……4 分

$=\ln x\cdot\ln\ln x-\ln x+C$

$=\ln x(\ln\ln x-1)+C$. ……2 分

4. 解答：由于是 $\sin^2 x\cdot\sin x^3$ 奇函数，$\sin^2 x\cos x$ 是偶函数，于是

原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\sin x^3\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$ ……4 分

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}\sin x$

$=\dfrac{2}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{3}$. ……4 分

5. 解答：设 $A=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=x+2A$，从而 ……2 分

$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+2A)\mathrm{d}x=(\dfrac{1}{2}x^2+2Ax)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}+2A$ ……4 分

解得 $A=-\dfrac{1}{2}$，故 $f(x)=x-1$. ……2 分

四、应用题（9 分）

解答：（1） 直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 交点为 $(0,0)$ 和 (a,a^2)． ....1 分

$$S_1=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{6},$$ ....1 分

$$S_2=\int_a^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=\frac{1-a^3}{3}-\frac{a(1-a^2)}{2}=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6},$$ ....1 分

故 $S_1+S_2=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{3}$． 令 $S(a)=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{3}$，则令 $S'(a)=-\frac{1}{2}+a^2=0$，可得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $S''(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}>0$，故 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，S_1+S_2 达到最小，并且最小值为

$$S_1+S_2=S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$ ....2 分

（2） 当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}[(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2-(x^2)^2]\mathrm{d}x$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{1}{2}x^2-x^4)\mathrm{d}x$$
$$=\pi(\frac{\sqrt{2}}{24}-\frac{\sqrt{2}}{40})$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi,$$

$$V_2=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1[(x^2)^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2]\mathrm{d}x$$
$$=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1(x^4-\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\pi[\frac{1}{5}(1-\frac{\sqrt{2}}{8})-\frac{1}{6}(1-\frac{\sqrt{2}}{4})]$$
$$=(\frac{1}{30}+\frac{\sqrt{2}}{60})\pi,$$

故 $V_1+V_2=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi+(\frac{1}{30}+\frac{\sqrt{2}}{60})\pi=\frac{1+\sqrt{2}}{30}\pi$． ....4 分

五、证明题（6 分）

证明：（1）设 $g(x)=f(x)+x$，显然 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并且 $g(0)=0$，$g(1)=2$，故存在 $c\in(0,1)$，使得 $1=g(c)=f(c)+c$，即 $f(c)=1-c$． ....2 分

（2）分别在区间 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 应用拉格朗日中值定理，可得存在 $\xi\in(0,c)$ 和 $\eta\in(c,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{1-c}{c},$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-(1-c)}{1-c}=\frac{c}{1-c},$$

故存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$． ....4 分

装

订

线