装

订

线

微积分 A（一）（A 卷）参考答案及评分标准
2019 年 1 月 18 日

一、单项选择题（每小题 **3** 分，共 **15** 分）

1. D　　2. B　　3. D　　4. C　　5. D

二、填空题（每小题 **3** 分，共 **30** 分）

1. 2;

2. e;

3. $-\dfrac{\pi}{8}$;

4. $\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$;

5. $\dfrac{1}{(n-1)!}(n \ge 1)$;

6. $(-\infty,-3)$;

7. 2;

8. $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^{x^3}-\mathrm{e}^{-x^3})+C$ 或 $\dfrac{\mathrm{sh}x^3}{6}+C$;

9. 2π;

10. $\dfrac{\pi}{2}$.

三、计算题（每小题 **8** 分，共 **40** 分）

1. 解答：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}$ ……………………2 分

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{x^2}}{2x^2\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{x^2}}$ ……………………4 分

$= \dfrac{1}{2}$. ……………………2 分

2. 解答：$x_t' = 2t+3$，$y_t' = \dfrac{\mathrm{e}^y}{1-\mathrm{e}^y t} = \dfrac{\mathrm{e}^y}{1-y}$; ……………………2 分

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{e}^y}{(1-\mathrm{e}^y t)(2t+3)} = \dfrac{\mathrm{e}^y}{(1-y)(2t+3)}$; ……………………2 分

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^y y_t'(2t+3)(1-y)-\mathrm{e}^y[-y_t'(2t+3)+2(1-y)}{(2t+3)^3(1-y)^2}$; ……………………2 分

当 $t=0$ 时，$y=0$，$y'\big|_{t=0}=1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0} = \dfrac{3-(-3+2)}{27} = \dfrac{4}{27}$. ……………………2 分

3. 解答：$\displaystyle\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})$ ……………………2 分

$= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\displaystyle\int\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ ……………………4 分

$= x-(\mathrm{e}^{-x}+1)\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$. ……………………2 分

4. 解答：$I = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$; ……………………2 分

$\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \int_0^1\frac{2t\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}(\sqrt{x-1}=t)$

$= 2\arctan t\,\big|_0^1 = \dfrac{\pi}{2}$; ……………………2 分

$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^{+\infty}\frac{2t\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}\ (\sqrt{x-1}=t)$

$= 2\arctan t\,\big|_1^{+\infty} = 2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$; ……………………2 分

所以 $I=\pi$. ……………………2 分

5. 解答：$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\cos x\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}\sin x+\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}f'(x)$ ....2 分

$=\{[f(x)\sin x]\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\sin x\mathrm{d}x\}+\{[f'(x)\cos x]\big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)\sin x\mathrm{d}x\}$

$=-f'(\pi)-f'(0)=2$； ....4 分

故 $f'(0)=-2-f'(\pi)=-2-3=-5$. ....2 分

四、应用题（10 分）

解答：因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，所以 $c=0$，从而

$$y=ax^2+bx.$$ ....2 分

抛物线 $y=ax^2+bx$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形的面积为

$$S=\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}.$$ ....2 分

令 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$，得 $b=\frac{8-6a}{9}$. ....1 分

该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}+\frac{ab}{2})$$

$$=\pi[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}(\frac{8-6a}{9})^2+\frac{a}{2}(\frac{8-6a}{9})].$$ ....3 分

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\pi[\frac{2a}{5}+\frac{12}{3}\cdot\frac{6a-8}{81}+\frac{1}{18}(8-12a)]=0$，得 $a=-\frac{5}{3}$，于是 $b=2$.

..................2 分

五、证明题（5 分）

证明：(1) 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(0\le x\le 2)$，则 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)$.

根据拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(0,2)$，使 $F(2)-F(0)=2F'(\eta)=2f(\eta)$，即 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(\eta)$. 由题设知 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(0)$，故 $f(\eta)=f(0)$. ....2 分

(2) $\frac{f(2)+f(3)}{2}$ 介于 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的最大最小值之间，根据连续函数介值定理，存在 $f(\zeta)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$. 由题设知 $\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$，故 $f(\zeta)=f(0)$. 由于 $f(0)=f(\eta)=f(\zeta)$ 且 $0<\eta<\zeta\le 3$，根据罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,\zeta)$，使 $f'(\xi_1)=0, f'(\xi_2)=0$，从而存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$. ......3 分