姓名：________

学号：________

班级：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2018-2019 年 第一 学期）

2019-1-18

课程编号：201411001　课程名称：微积分 A（一）（A 卷）

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是________.

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

2. 设 $\alpha_1 = e^x + e^{-x} - 2$，$\alpha_2 = \sqrt[3]{1 + x\sin^2 x} - 1$，$\alpha_3 = \sqrt{x}(\cos\sqrt{x} - 1)$，当 $x \to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小按低阶到高阶的排序是_______.

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　(B) $\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2$　(C) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$　(D) $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续，且 $f(0) = 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x} = 2$，则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$________.

(A) 不可导　(B) 可导，且 $f'(0) \neq 0$

(C) 取得极大值　(D) 取得极小值

4. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$ 等于________.

(A) $\int_0^e \ln(1+x)dx$　(B) $\int_0^1 \ln(1+x)dx$

(C) $e^{\int_0^1 \ln(1+x)dx}$　(D) $e^{\int_0^e \ln(1+x)dx}$

5. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x) \le g(x)$，则对任何 $c \in (0,1)$，有________.

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \ge \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt$　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)dt \le \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)dt$

(C) $\int_c^1 f(t)dt \ge \int_c^1 g(t)dt$　(D) $\int_c^1 f(t)dt \le \int_c^1 g(t)dt$

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x + \dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 的值等于________.

2. 设函数 $f(x) = \dfrac{e^x - a}{x(x-1)}$ 有可去间断点 $x = 1$，则 $a =$________.

3. 已知 $y = f\left(\dfrac{2}{x+2}\right)$，$f'(u) = \arctan u^2$，则 $dy\big|_{x=0} =$________dx.

4. 设函数 $y = \dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0) =$__________.

5. 设函数 $f(x)$ 带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林展开式为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

则 $f(x) = xe^x$ 的 n 阶麦克劳林的展开式中，则 x^n 前的系数 $a_n =$________.

6. 曲线 $y = \dfrac{e^x}{x+3}$ 的凸区间为___________.

7. 曲线 $y = 4x - x^2$ 在其顶点处的曲率为__________.

8. 不定积分 $\int x^2(e^{x^3} + e^{-x^3})dx =$______________.

9. 定积分 $\int_{-5}^{5}\dfrac{x^{2018}\sin^{2019}x+2}{\sqrt{25-x^2}}dx =$________.

10. 求极坐标系下曲线 $r = \sin\theta\,(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2})$ 的弧长为________.

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

2. 设曲线由参数方程$\begin{cases}x=t^2+3t+5\\ \mathrm{e}^y t-y=0\end{cases}$所确定，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

3. 计算不定积分$\displaystyle\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

4. 计算反常积分$I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上具有二阶连续导数，$f'(\pi)=3$，且 $\displaystyle\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\cos x\mathrm{d}x=2$，求$f'(0)$.

四、应用题（10 分）

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $(0,0)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$y\geq 0$. 试确定 a,b,c 的值，使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形的面积为$\dfrac{4}{9}$，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

五、证明题（5 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3),$$

(1) 证明：存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$.

(2) 证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$.

装

订

线