姓名：________ 学号：________ 班级：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2022-2023 年 第二 学期）

2023-6-26

课程编号: **201912400202** 课程名称: 工科数学分析（二）**A** 卷

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列命题正确的是______.

(A) 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处是连续的;

(B) 函数 $z=f(x,y)$，$f_x(1,1)=1$，$f_y(1,1)=2$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$;

(C) 在点 $(0,1,1)$ 的某个邻域内，方程 $xy+z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$ 只能确定一个具有连续偏导数的单值函数 $z=z(x,y)$;

(D) 连续函数 $f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

2. 已知二元函数 $z=f(x,y)$ 在平面闭区域 D 上二阶偏导数连续，且满足 $z_{xy}\neq0$，$z_{xx}+z_{yy}=0$，则______.

(A) 该二元函数不存在最值;

(B) 该二元函数在平面闭区域 D 内存在极值点;

(C) 该二元函数存在最值，最值点一定位于平面闭区域 D 内部;

(D) 该二元函数存在最值，最值点一定位于平面闭区域 D 边界.

3. 设积分 $I_1=\iint\limits_D\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D(x+y)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,(x-2)^2+(y-1)^2\le2\}$，则下列关系式成立的是______.

(A) $I_3<I_2<I_1$;　(B) $I_2<I_1<I_3$;　(C) $I_1<I_2<I_3$;　(D) $I_2<I_3<I_1$.

4. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=3$ 处收敛，在点 $x=5$ 处发散，则在点 $x=3\frac{1}{3}$ 处及点 $x=-4\frac{1}{4}$ 处，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的敛散性分别为______.

(A) 绝对收敛，绝对收敛;　(B) 绝对收敛，发散;

(C) 发散，绝对收敛;　(D) 发散，发散.

5. 设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ $(f(x)\neq0)$ 的三个线性无关的特解，则该方程的通解为______.

(A) $C_1y_2+C_2y_3+y_1$;　(B) $C_1y_2+C_2y_3-(C_1+C_2)y_1$;

(C) $C_1y_2+C_2y_3-(1-C_1-C_2)y_1$;　(D) $C_1y_2+C_2y_3+(1-C_1-C_2)y_1$.

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin xy}{x}=$______.

2. 空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程______________.

3. 函数 $u=x+y^2+z^3$ 在点 $A(0,1,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(1,2,2)$ 方向的方向导数为______.

4. 设 $M(x,y,z)$ 为平面 $x+y+z=1$ 上一点，且点 M 到两定点 $(1,0,1),(2,1,0)$ 距离的平方之和为最小，则点 M 的坐标为__________.

5. 二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\sin y^2\mathrm{d}y=$______.

6. 曲线积分 $\int_L\sqrt{y}\,\mathrm{d}s=$__________，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $A(-1,1)$ 与点 $B(1,1)$ 之间的一段弧.

7. 向量场 $\vec{A}=x^2\vec{i}-2xy\vec{j}+z^2\vec{k}$ 在点(1,1,2)处的旋度 $\mathrm{rot}(\vec{A})\big|_{(1,1,2)}=$__________.

8. 当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的和函数为____________.

9. 已知函数满足 $f(x+2\pi)=f(x)$，且在 $(-\pi,\pi]$ 内 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其傅立叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在点 $x=2023\pi$ 收敛于______.

10. 微分方程 $xy''+y'=0$ 的通解为______________.

三、计算题（每小题 8 分，共 24 分）

1. 设函数 $z=f(\frac{1}{y},x+y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 将函数 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 展开为 x 的幂级数，并给出收敛域.

3. 求微分方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^x$ 的通解.

四、应用题（每小题 9 分，共 27 分）

1. 质点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上每一点 $M(x,y)$ 都受作用力 $\vec{F}$，其大小等于从点 M 到原点距离的倒数，其方向为 $\vec{l}=-y\vec{i}+x\vec{j}$，求质点 P 沿椭圆顺时针运动一周时，力 $\vec{F}$ 所做的功.

2. 设 Σ 是半球壳 $x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$，且 Σ 上任意一点的面密度等于该点到球心的距离，计算该半球壳关于 z 轴的转动惯量.

3. 密度 $\rho=1$ 的不可压缩流体在空间稳定流动，已知其流速场

$$\vec{v}(x,y,z)=(xy^2-1)\vec{i}+(yz^2-1)\vec{j}+(zx^2-1)\vec{k},$$

求流体在单位时间内流过有向曲面 Σ 的流量，其中有向曲面 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧.

五、证明题（4 分）

已知 $A_k=\sum_{n=1}^{k}u_n\ (u_n>0)$，且数列 $\{u_n\}$ 单调减少，证明：级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{u_n+u_{n+1}}{A_nA_{n-1}}$ 收敛.

装

订

线