装

订

线

# 工科数学分析（二）（A 卷）期末考试参考答案
# （2022 年 6 月 14 日）

## 一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. B;  2. C;  3. A;  4. D;  5. B.

## 二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $0$；
2. $x+z=0$；
3. $2\sqrt{6}$；
4. $-2$；
5. $\dfrac{e}{2}-1$；
6. $2s$；
7. $\dfrac{4\pi}{3}$；
8. $[0,2)$；
9. $\dfrac{1}{2}$；
10. $y=\dfrac{1}{x}(-\cos x+C)$.

## 三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 解答：法 1: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'$； ……4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$. ……4 分

法 2: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_2'$； ……4 分

因为 $f$ 具有二阶连续偏导数，故有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_2'+xf_{21}''+xyf_{22}''=xf_{12}''+xyf_{22}''+f_2'.$$ ……4 分

2. 解答：补面 $\Sigma': z=0$，$x^2+y^2\le 4$，方向取下侧. ……2 分

设 $\Omega$ 为由曲面 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 围成的闭区域，$D: x^2+y^2\le 4$，则有

$$\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}-\iint\limits_{\Sigma'}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}V-\iint\limits_{\Sigma'}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ ……3 分

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r$$ ……2 分

$$=4\pi.$$ ……1 分

3. 解答：令 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)x^{2n+1}}{nx^{2n-1}}\right|=x^2<1$，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{2n-1}$ 在 $x=\pm1$ 点发散，因此该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. ……4 分

设幂级数的和函数为 $S(x)$，则当 $-1<x<1$ 时，有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\Big)'=\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{1-x^2}\Big)'=\frac{x}{(1-x^2)^2}.$$ ……4 分

4. 解答：特征方程为 $r^2-4r+3=0$，解得 $r_1=1$，$r_2=3$.故方程的通解为:

$$Y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}.$$ ……4 分

代入初始条件 $y|_{x=0}=6$，$y'|_{x=0}=10$ 解得 $C_1=4$，$C_2=2$. 故特解为

$$Y=4e^{x}+2e^{3x}.$$ ……4 分

## 四、应用题（每小题 9 分，共 18 分）

1. 解答：设长方体在第一卦限中的顶点坐标为 $(x,y,z)$，则 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{27}=1$ 成立，且长方体的体积为 $V=8xyz$，于是问题可归结为求目标函数 $V=8xyz$ 在约束条件 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{27}=1$ 下的最大值. ……2 分

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda(\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{27}-1)$，则

$$\begin{cases} L_x = 8yz + \dfrac{2x}{3}\lambda = 0 \\ L_y = 8xz + \dfrac{2y}{12}\lambda = 0 \\ L_z = 8xy + + \dfrac{2z}{27}\lambda = 0 \\ L_\lambda = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{27} - 1 = 0 \end{cases}$$ …………………………4 分

在第一卦限只有一组解 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$，根据题意，最大值一定存在，而可能的点只有一个 $(1,2,3)$，故此点为最大值点. 长方体的最大体积为 48. ……………3 分

2. 解答：根据题意 $\vec{F} = -x\vec{i} - y\vec{j}$，则力 $\vec{F}$ 所做的功为 ……………………....…2 分

$$W = \int_L -x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y$$ ……………………………………………3 分

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\mathrm{d}(a\cos t) + b\sin t\mathrm{d}(b\sin t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - b^2)\sin t\cos t\mathrm{d}t$$ ……………………………..……2 分

$$= \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$ …………………....……2 分

**五、证明题（5 分）**

证明　先证 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ 存在，为此将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的前 $2n$ 项的部分和 $S_{2n}$ 写成如下两种形式

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}),$$

及

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

由条件(1) $u_n \ge u_{n+1}$（$n = 1, 2, \cdots$）可知，所有括号内的差均非负，第一个表达式表明：数列 $S_{2n}$ 是单调增加的；而第二个表达式表明：$S_{2n} < u_1$，数列 $S_{2n}$ 有上界.

由单调有界数列必有极限准则，当 $n$ 无限增大时，$S_{2n}$ 趋向于某值 $s$，并且



$s \le u_1$，即

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = s \le u_1.$$ …………………3 分

再证 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = s$，因

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1},$$

由条件(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$ 可知，

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = s + 0 = s.$$

由于级数的偶数项之和与奇数项之和都趋向于同一极限，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的部分和当 $n\to\infty$ 时具有极限 $s$. 这就证明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛于 $s$，且 $s \le u_1$.

……………2 分



装

订

线