装

订

线

工科数学分析（二）（A 卷）期末考试参考答案

（2020 年 9 月 27 日）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D;　　2. D;　　3. A;　　4. C;　　5. C.

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 3;

2. 2;

3. $2x+4y+z-14=0$ 或 $2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0$;

4. $2x-6yz$;

5. $\sqrt{2}$;

6. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$;

7. $(-\dfrac{1}{4}R,0,0)$;

8. 0;

9. $\sqrt[3]{2e^3-e}$;

10. $y=\dfrac{1}{x^2}$.

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 解答: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y})+0=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$, ……………………………….4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot(-\frac{x}{y^2})]$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$ ……………………………………………….4 分

2. 解答: $P(x,y)=2xy-x^2$, $Q(x,y)=x+y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$.

原式 $=\iint\limits_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_D(1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ …………………………………………………………………4 分

$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(1-2x)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1(y^{\frac{1}{2}}-y-y^2+y^4)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{30}$. ……………………………………………...…4 分

3. 解答：作辅助曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}z=a\\x^2+y^2\le a^2\end{cases}$，上侧，则由高斯公式得: ………..2 分

$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$

$=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_D a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　$(\Omega:x^2+y^2\le z^2,0\le z\le a$, $D:x^2+y^2\le a^2)$

……………………………..….4 分

$=2\int_0^a\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\pi a^4$

$=2\int_0^a\pi z^3\mathrm{d}z-\pi a^4=-\dfrac{1}{2}\pi a^4$. ………………………………...……………....2 分

4. 解答：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，故该级数的收敛半径$R=1$，又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$在$x=\pm1$点发散，因此幂级数的收敛域为$(-1,1)$. ....4 分

设幂级数的和函数为$S(x)$，则当$-1<x<1$时，有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$ ……...4 分

5. 解答：特征方程为$r^2-3r+2=0$，解得$r_1=1,r_2=2$，所以原方程对应的齐次方程的通解为：

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$ ……………………..….4 分

设原方程的特解为$y^*=x\mathrm{e}^x(Ax+B)$，代入原方程解得$A=-\dfrac{1}{2},B=-1$，所以原方程的特解为

$$y^*=-x(\frac{1}{2}x+1)\mathrm{e}^x.$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-x(\frac{1}{2}x+1)\mathrm{e}^x.$$ ……….…….4 分

四、应用题（9 分）

解答：即求成本函数$C(x,y)$在条件$x+y=8$下的最小值，设拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-xy+\lambda(x+y-8)$$ …………………4 分

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x-y+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-x+4y+\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-8=0\end{cases}$$

解得　$\lambda=-7,x=5,y=3.$

由问题的实际意义知，当客货轮分别生产5台和3台时，总成本最小，最小成本为:

$$C(5,3)=5^2+2\times3^2-5\times3=28$$ （千万）. …………………4 分

五、证明题（6 分）

证明：设 $S_n=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$，由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-a_0=S$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_0+S$，故存在 M，使得

$$|a_n|\le M.$$ ……………………………………3 分

又因为$|a_nb_n|\le Mb_n$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ $(b_n\ge0)$收敛，故由比较审敛法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛. ……………………………………………………………………………3 分

装

订

线