装

订

线

工科数学分析（二）（A 卷）期末考试参考答案

（2023 年 6 月 26 日）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D;　　2. D;　　3. C;　　4. B;　　5. D.

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 2;

2. $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$;

3. $2\sqrt{3}$;

4. $(1,0,0)$;

5. $\dfrac{1-\cos 1}{2}$;

6. $\dfrac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)$;

7. $(0,0,-2)$;

8. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$;

9. $\dfrac{\pi^2}{2}$;

10. $y=C_1\ln x+C_2$.

三、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 解答: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_2'$ ....4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{21}''\cdot(-\dfrac{1}{y^2})+f_{22}''=-\dfrac{1}{y^2}f_{12}''+f_{22}''$. ....4 分

2. 解答: $f'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\quad(|x|<+\infty)$ …………………..5 分

$f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\ (|x|<+\infty)$. ……..3 分

3. 解答: 特征方程为 $r^2-4r+8=0$，解得 $r_{1,2}=2\pm 2i$. 故对应齐次方程的通解为:

$$Y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$ ……………………4 分

设原方程的特解为 $y^*=a\mathrm{e}^x$，代入原方程解得 $a=\dfrac{1}{5}$，即得特解 $y^*=\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^x$. 因此原方程的通解为

$$y=Y+y^*=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{5}\mathrm{e}^x.$$ ………4 分

四、应用题（每小题 9 分，共 27 分）

1. 解答: 根据题意力 $\vec{F}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\vec{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$，质点 P 沿椭圆顺时针运动一周时，力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W=\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$ …………..…………2 分

$P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，做小椭圆 $L_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$，方向为顺时针，记由 L_ε 所围成的区域为 D_ε，则 ………..2 分

$$\oint_L=\oint_{L-L_\varepsilon}+\oint_{L\varepsilon}$$

$$=0+\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_\varepsilon}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_\varepsilon}\mathrm{d}\sigma=-2\pi.$$ ….……………………………….…4 分

2. 解答: $I_z=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$ ……………………….……….2 分

$$=\frac{1}{2}\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$$ ………………..………2 分

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$ ……………………………2 分

$$=\frac{1}{3}\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}1\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\pi.$$ ……………………………………2 分

3. 解答: 流体在单位时间内流过有向曲面Σ的流量为

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy^2-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(zx^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ …………2 分

作辅助曲面Σ_1: $z=0,\ x^2+y^2\le 4$, 方向向下, 记Ω为曲面Σ与曲面Σ_1所共同围成的区域, 则由高斯公式得: ……………………………………………………2 分

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V+\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(D:x^2+y^2\le 4)$$ …………………………2 分

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r-4\pi=\frac{44\pi}{5}.$$ ……………………………………………2 分

五、证明题（4 分）

证明: 由于数列$\{u_n\}$单调减少, 故$\frac{u_n+u_{n+1}}{A_nA_{n-1}}\le\frac{2u_n}{A_nA_{n-1}}=2\frac{A_n-A_{n-1}}{A_nA_{n-1}}=2(\frac{1}{A_{n-1}}-\frac{1}{A_n})$.

……………2 分

令 $S_n=\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3}+\cdots+\frac{1}{A_{n-1}}-\frac{1}{A_n}=\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_n}$, 则由已知条件, 极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$必存在, 即正项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{A_{n-1}}-\frac{1}{A_n})$收敛. 故由比较判别法可知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{u_n+u_{n+1}}{A_nA_{n-1}}$收敛. ……………………………………………………………2 分

装

订

线