装

订

线

工科数学分析（二）（A卷）期末考试参考答案
（2021年7月2日）

一、单项选择题（每小题3分，共15分）

1. D;　　2. B;　　3. B;　　4. D;　　5. C.

二、填空题（每小题3分，共30分）

1. 9;
2. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z-1}{-4}$;
3. -5;
4. $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$;
5. π;
6. $\dfrac{16}{3}\pi$;
7. 0;
8. $\sqrt[3]{3}$;
9. $\dfrac{3}{4}$;
10. $x=Cy+y^3$.

三、计算题（每小题8分，共40分）

1. 解答：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'$ ……………………………………………4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''+xf_{12}''+f_2'+y(f_{21}''+xf_{22}'')$$

$$=f_2'+f_{11}''+(x+y)f_{12}''+xyf_{22}''.$$ ……………………………4 分

2. 解答：$P(x,y)=\dfrac{-y}{4x^2+9y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+9y^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{9y^2-4x^2}{(4x^2+9y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

……………2 分

（1）若 $R<1$，原点不在 L 所围的闭区域内部，则由格林公式

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+9y^2}=0;$$ ……………………………2 分

（2）若 $R>1$，原点在 L 所围的闭区域内部，做小椭圆 $L_\varepsilon: 4x^2+9y^2=\varepsilon^2$，方向为逆时针，记由 L_ε 所围成的区域为 D_ε，则

$$\oint_L=\oint_{L-L_\varepsilon}+\oint_{L\varepsilon}$$

$$=0+\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_\varepsilon}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_D \mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{3}.$$ ……………………………………………4 分

3. 解答：作辅助曲面 Σ_1：$z=1$，$x^2+y^2\le 1$，方向向下，记 Ω 为曲面 Σ 与曲面 Σ_1 所共同围成的区域，则由高斯公式得：……………………………………2 分

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

$$=3\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V+\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad (D: x^2+y^2\le 1)$$ ……………………4 分

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi} r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r+\pi$$

$$=\frac{57}{10}\pi.$$ ……………………………………………………2 分

4. 解答：$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

$$=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}}$$ ……………………………2 分

$$\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{3}\right)^n\quad \left(\left|\frac{x-2}{3}\right|<1,\ 即 -1<x<5\right)$$ ………2 分

$$\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{4}\right)^n\quad \left(\left|\frac{x-2}{4}\right|<1,\ 即 -2<x<6\right)$$ ………2 分

故

$$f(x)=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-2}{3})^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-2}{4})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}})(x-2)^n\quad(-1<x<5).\qquad \text{…………2 分}$$

5\. 解答：特征方程为 $r^2+4r=0$，解得 $r_1=0,r_2=-4$，所以原方程对应的齐次方程的通解为:

$$Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-4x}.\qquad \text{…………………………4 分}$$

设方程 $y''+4y'=\mathrm{e}^x$ 的特解为 $y_1^*=A\mathrm{e}^x$，代入原方程解得 $A=\frac{1}{5}$，所以该方程的特解为 $y_1^*=\frac{1}{5}\mathrm{e}^x$； ……………………………………………………………1 分

设方程 $y''+4y'=x$ 的特解为 $y_2^*=x(Bx+C)$，代入原方程解得 $B=\frac{1}{8},C=-\frac{1}{16}$，所以该方程的特解为 $y_2^*=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x$. ……………………………………………2 分

原方程的特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{1}{5}\mathrm{e}^x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x$，故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2\mathrm{e}^{-4x}+\frac{1}{5}\mathrm{e}^x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x.\qquad \text{……………1 分}$$

四、证明题（6 分）

证明：因为当 $x=x_0$（$x_0\neq 0$）时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，由级数收敛的必要条件有 $\lim_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$. 于是存在 $M>0$，使

$$|a_nx_0^n|\le M\ (n=0,1,2,\cdots).\qquad \text{……………………3 分}$$

$$|a_nx^n|=\left|a_nx_0^n\cdot\frac{x^n}{x_0^n}\right|=|a_nx_0^n|\cdot\left|\frac{x^n}{x_0^n}\right|\le M\left|\frac{x^n}{x_0^n}\right|$$

当 $|x|<|x_0|$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{x^n}{x_0^n}\right|$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛，即原级数绝对收敛. ……………………………………………………………3 分

五、应用题（9 分）

解答：(1)曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0,\quad 即\ x_0x+y_0y+z_0z=R^2.\qquad \text{….4 分}$$

(2) 由(1)知平面块 S 的方程为 $z=\frac{R^2-x_0x-y_0y}{z_0}$ 且 $x^2+y^2=\frac{1}{4}R^2$，其绕绕 z 轴旋转产生的转动惯量为

$$I=\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x_0^2}{z_0^2}+\frac{y_0^2}{z_0^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(x^2+y^2)\frac{R}{z_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{R}{z_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{2}}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi R^5}{32z_0}.\qquad \text{……………………3 分}$$

(3) 由(2)知 z_0 越大，转动惯量越小，故取 $z_0=R$ 时，即点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 取为(0,0,R)时，上述转动惯量最小. ……………………………………………………2 分

装

订

线