习题 7-1

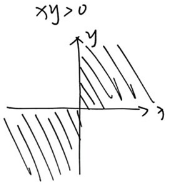
2. 已知 $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f(1,\frac{y}{x})$.

$$f(1,\frac{y}{x})=\frac{2\frac{y}{x}}{(\frac{y}{x})^2+1}=\frac{\frac{2y}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

4. 求下列函数的定义域，并画出定义域的图形:

(2) $f(x,y)=\ln(xy)$;

$xy>0$



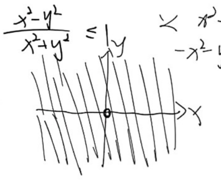
(4) $f(x,y,z)=\arcsin\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

$x^2+y^2\neq 0$

$-1\le\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\le 1$

$x^2-y^2\le x^2+y^2$

$-x^2-y^2\le x^2-y^2$

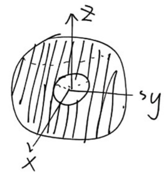


(6) $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $(R>r>0)$;

$R^2-x^2-y^2-z^2\ge 0$ 且 $x^2+y^2+z^2-r^2>0$

∴ 定义域 $\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\le R^2\}$

表示两球中间部分



5. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\frac{\ln(x+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

$=\frac{\ln 3}{3}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$;

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{xy}{2}}{xy}$

$=\frac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$

$=\frac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$

$=1$

6. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$;

当点沿直线 $y=kx$ 趋近于 $(0,0)$ 时

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x+y}{x-y}$

$=\frac{1+k}{1-k}$

此极限值随k值变化而变化

∴不存在

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

当点沿 $x=ky^2$ 趋向 $(0,0)$ 时

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{k}{1+k^2}$

此极限随k变化而变化

∴不存在

习题 7-2

1. 求下列函数的偏导数:

(2) $z=\sin(xy)+y^2$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+2y$$

(4) $z=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\left[\frac{(1-xy)-(-y)(x+y)}{(1-xy)^2}\right]=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\left[(1-xy)-(-x)(x+y)\right]=\frac{1}{1+y^2}$$

(6) $z=(1+xy)^y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial e^{y\ln(1+xy)}}{\partial y}$$

$$=e^{y\ln(1+xy)}\left(\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right)$$

$$=(1+xy)^y\left(\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right)$$

(8) $u=\ln(x+2^{yz})$;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+2^{yz}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z\cdot 2^{yz}\ln 2}{x+2^{yz}}\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{y\cdot 2^{yz}\ln 2}{x+2^{yz}}$$

3. 设函数 $f(x,y)=e^{xy}\sin(\pi y)+(x-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x'(1,1)$，$f_y'(1,1)$.

$$f_x'=ye^{xy}\sin\pi y+\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}(x-1)$$

$$f_y'=xe^{xy}\sin\pi y+\pi\cos\pi y\cdot e^{xy}+\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\sqrt{x}\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{3}{2}}(x-1)$$

$$f_x'(1,1)=\frac{\pi}{4}\qquad f_y'(1,1)=-\pi e$$

5. 设函数 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证: $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}x^{-2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot y^{-2}$$

左 $=2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z=$ 右

7. 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8y^2x\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-16xy$$

(4) $z=y^x$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(\ln y)^2y^x\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\ln y+\frac{1}{y}\cdot y^x=xy^{x-1}\ln y+y^{x-1}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=y^{x-1}+xy^{x-1}\ln y$$

9. 验证 $z=\ln(e^x+e^y)$，满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^y}{e^x+e^y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{e^x(e^x+e^y)-e^{2x}}{(e^x+e^y)^2}=\frac{e^{xy}}{(e^x+e^y)^2}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{e^{xy}}{(e^x+e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^{xy}}{(e^x+e^y)^2}$$

左 $=\frac{e^{2xy}}{(e^x+e^y)^4}=$ 右.

习题 7-3

1. 求下列函数的全微分:

(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}} \cdot y(-1)x^{-2} = -\frac{y}{x^2}\cdot e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$$

$$dz = \left(-\frac{y}{x^2}\cdot e^{\frac{y}{x}}\right)dx + \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x}dy$$

(4) $u=x^{yz}$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz\,x^{yz-1} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{yz}\ln x^{z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{yz}\ln x^{y}$$

$$du = yz\,x^{yz-1}dx + z\cdot x^{yz}\ln x\,dy + y\cdot x^{yz}\ln x\,dz$$

(5) $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2xz}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2yz}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$du = \frac{-2xz}{(x^2+y^2)^2}dx - \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}dy + \frac{1}{x^2+y^2}dz$$

3. 求函数 $z=\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{y}$ 在 $x_0=1, y_0=2, \Delta x=0.2, \Delta y=0.1$ 时的全增量与全微分.

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2.1}+\frac{1.2}{2.1}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{2.2}{2.1} - 1 = \frac{1}{21} = 0.0476$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{x}{y^2}$$

$$dz = \frac{dx}{y} + \left(-\frac{x+1}{y^2}\right)dy$$

代入 $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ $\quad dz = 0.05$

7. 设有一无盖圆柱形容器, 容器的壁与底的厚度均为 0.1cm, 内高 20cm, 内半径为 4cm, 求容器外壳体积的近似值.

$$V = \pi r^2 h \qquad \Delta x \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = 2\pi r h\,dr + \pi r^2 dh = \pi r(2h\,dr + r\,dh)$$

$r = 4\text{cm}$
$h = 20\text{cm}$
$dr = 0.1\text{cm}$

$$\therefore \Delta x = 3.14\times 4(2\times 20\times 0.1 + 4\times 0.1) = 5.53\text{cm}^3$$

∴ 容器外壳体积的近似值为 5.53cm^3.

习题 7-4

1. (1) 设 $z=e^{x-2y}$, 而 $x=\sin t$, $y=t^3$, 求 $\dfrac{dz}{dt}$;

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y} \qquad \frac{dx}{dt} = \cos t$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2e^{x-2y} \qquad \frac{dy}{dt} = 3t^2$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2)$$

2. 设 $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y=a\sin x, z=\cos x$, 求 $\dfrac{du}{dx}$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1} + \frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x - \frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot(-\sin x)$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x + a\cos x - a\cos x + \sin x) = e^{ax}\sin x$$

3. (1) 设 $z=u^2-v^2$, 而 $u=x+y$, $v=x-y$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2u - 2v = 4y$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -2v \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 2u + 2v = 4x$$

(4) 设 $z=e^{uv}, u=\ln\sqrt{x^2+y^2}, v=\arctan\dfrac{x}{y}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v e^{uv} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = u e^{vu}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xv - yu}{x^2+y^2}e^{uv} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xu+yv}{x^2+y^2}e^{uv}$$

4. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数):

班级　　学号　　姓名　　序号

4. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数):

(2) $u=f(\frac{xz}{y})$;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'\frac{z}{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=f'\left(\frac{-xz}{y^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f'\frac{x}{y}$$

(4) $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\frac{1}{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=f_1'(-\frac{x}{y^2})+f_2'\frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_2'(-\frac{y}{z^2})$$

(5) $u=f(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'2x+f_2'2x+f_3'2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'2y-f_2'2y+f_3'2x$$

7. 设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cancel{f_x'2x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\cancel{f_y'2y} \qquad f'2y$$

$$f'2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''2x\cdot 2x+2f'=4f''x^2+2f'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''2y\cdot 2x=4f''xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''2y\cdot 2y+2f'=4f''y^2+2f'$$

班级　　号

8. 求下列函数的二阶偏导数(其中 f 具有二阶连续偏导数):

(1) $z=f(x,\frac{x}{y})$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'1+f_2'\frac{1}{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_2'(-\frac{x}{y^2})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+f_{22}''\left(\frac{1}{y}\right)^2+\frac{2f_{12}''}{y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}\cdot f_2'+\frac{x^2}{y^4}\cdot f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''(-\frac{x}{y^2})+f_{22}''(-\frac{x}{y^3})-\frac{1}{y^2})f_2'$$

(3) $z=f(\sin x,\cos x,e^{x+y})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cos x+f_2'(-\sin x)+f_3'e^{x+y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_3'e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(f_{11}\cos x-f_{12}\sin x+f_{13}e^{x+y})\cos x-(f_{21}\cos x-f_{22}\sin x+f_{23}e^{x+y})\sin x$$
$$+(f_{31}\cos x-f_{32}\sin x+f_{33}e^{x+y})e^{x+y}-f_1\sin x-f_2\cos x+f_3e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{33}e^{2(x+y)}+f_3e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f_{13}\cos x-f_{23}\sin x+f_{33}e^{x+y}+f_3)e^{x+y}.$$

11. 设 $z=f[x+\varphi(y)]$，其中 φ 是可微函数，f 是二次可微，证明 $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f' \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'\varphi'(y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'' \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''[\varphi'(y)]^2+f'\varphi''(y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''\varphi'(y) \qquad 左=f'\cdot f''\varphi'(y) \qquad 右=f'\varphi'(y)\cdot f''=左$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

习题 7-5

1. 对由下列各方程所定义的函数 $y=y(x)$，求 y'.

(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$;

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2x+2y\cdot y')=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}+\frac{y'}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y'=\frac{x+y}{x-y}$$

2. 对由下列方程所定义的函数 $y=y(x)$，求 y''.

(2) $y=2x\arctan\dfrac{y}{x}$.

$$dy=2dx\arctan\frac{y}{x}+2x\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$$

$$y'=\frac{2(x^2+y^2)\arctan\frac{y}{x}-2xy}{y^2-x^2}$$

$$y''=\frac{\left[2(2x+2yy')\arctan\frac{y}{x}+\frac{2(x^2+y^2)}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}(-2y-2xy')\right](y^2-x^2)}{(y^2-x^2)^2}-\frac{(2yy'-2x)[2(x^2+y^2)\arctan\frac{y}{x}-2xy]}{(y^2-x^2)^2}=0$$

3. 对由下列方程所定义的函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(2) $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$;

$F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$

$F_x=2\cos(x+2y-3z)-1 \quad F_y=4\cos(x+2y-3z)-2$

$F_z=-6\cos(x+2y-3z)+3$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{4\cos(x+2y-3z)-2}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{2}{3}$$

4. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x})=0$ 所确定的隐函数，其中 F 具有一阶连续偏导数，求证：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

$F_x=F_1'+F_2'\cdot z(-\frac{1}{x^2})=F_1'-\frac{z}{x^2}F_2'$

$F_y=F_1'(-\frac{z}{y^2})+F_2'=\frac{-z}{y^2}F_1'+F_2'$

$F_z=\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2' \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yzF_2'-x^2yF_1'}{x^2F_1'+xyF_2'}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xzF_1'-xy^2F_2'}{xyF_1'+y^2F_2'}$ 代入得 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

8. 设 $e^z-xyz=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

z视为x, y的隐函数，对x求偏导数.

$e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-(yz+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot xy)=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$

$e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-yz-xy\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(e^z-xy)-(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y)yz}{(e^z-xy)^2}=\frac{y^2z-(\frac{e^zyz}{e^z-xy}-y)yz}{(e^z-xy)^2}=\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$$

9. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数.

(2) $\begin{cases}xu-yv=0\\yu+xv=1\end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$;

$\begin{cases}d(xu)-d(yv)=0\\d(yu)+d(xv)=0\end{cases} \qquad \begin{cases}u\,dx+x\,du-v\,dy-y\,dv=0 & ①\\u\,dy+y\,du+v\,dx+x\,dv=0 & ②\end{cases}$

$x①+y②$ $\quad xu\,dx+x^2du-vx\,dy-\cancel{xy\,dv}+uy\,dy+y^2du+vy\,dx+\cancel{xy\,dv}=0$

$du=\left(\frac{xu+vy}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{vx-uy}{x^2+y^2}\right)dy$

$y①-x②$ $\quad uy\,dx+\cancel{xy\,du}-vy\,dy-y^2dv-ux\,dy-\cancel{xy\,du}-vx\,dx-x^2dv=0$

$dv=\left(\frac{uy-vx}{x^2+y^2}\right)dx-\left(\frac{vy+ux}{x^2+y^2}\right)dy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{xu+vy}{x^2+y^2}\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{vx-uy}{x^2+y^2}\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{uy-vx}{x^2+y^2}\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-vy-ux}{x^2+y^2}$$

(4) $\begin{cases} u = f(ux, v+y) \\ v = g(u-x, v^2y) \end{cases}$，其中 f, g 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$；

确定 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1'\left(u + x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$　　$\dfrac{\partial v}{\partial x} = g_1'\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - 1\right) + g_2'(2vy)\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$(xf_1'-1)\dfrac{\partial u}{\partial x} + f_2'\dfrac{\partial v}{\partial x} = -uf_1'$

$g_1'\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2vyg_2'-1)\dfrac{\partial v}{\partial x} = g_1'$

当 $D = \begin{vmatrix} xf_1'-1 & f_2' \\ g_1' & 2vyg_2'-1 \end{vmatrix} = (xf_1'-1)(2vyg_2'-1) - f_2'g_1' \neq 0$

解方程组得 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} -uf_1' & f_2' \\ g_1' & 2vyg_2'-1 \end{vmatrix} = \dfrac{-uf_1'(2vyg_2'-1) - f_2'g_1'}{(xf_1'-1)(2vyg_2'-1) - f_2'g_1'}$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} xf_1'-1 & -uf_1' \\ g_1' & g_1' \end{vmatrix} = \dfrac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2vyg_2'-1) - f_2'g_1'}$

11. 设 $z=f(u)$ 且 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\mathrm{d}t$，其中 f, u 可微，p 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$. 求 $p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}+p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}$. ∵ $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\,dt$

两边对 x 求偏导 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + p(x)$　　对 y 求 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y} - p(y)$

∴ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{p(x)}{1-\varphi'(u)}$　　$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}$

∴ $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\left[\dfrac{p(x)p(y)}{1-\varphi'(u)} + \dfrac{-p(x)p(y)}{1-\varphi'(u)}\right] = 0$

12. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数，试证明：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

$t=t(x,y)$ 代入 $y=f(x,t)$ 得 $y=f[x,t(x,y)]$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\left(\dfrac{\partial t}{\partial x} + \dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}\right)$

解得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x}}{1 - \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}}$　　∵ $t=t(x,y)$ 是由 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数

得 $\dfrac{\partial t}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}}$，$\dfrac{\partial t}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}}$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}}$，$\dfrac{\partial t}{\partial y} = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}}$

习题 7-6

1. 求下列曲线在指定点的切线和法平面方程：

(3) 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，在点 $M_0(1,-2,1)$ 处.

两边求导 $2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0$，$1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0$

代入 $x=1$，$y=-2$，$z=1$，$\dfrac{dy}{dx}=0$　$\dfrac{dz}{dx}=-1$

∴ 切线方向向量是 $\left(1, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}\right) = (1,0,-1)$

∴ 切线方程是 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{1-z}{1}$

法平面方程是 $(x-1)+0-(z-1)=0$ 即 $x-z=0$

2. 在曲线 $x=2t, y=3t^2, z=\dfrac{1}{3}t^3$ 上求一点，使在此点的切线平行于平面 $-2x+\dfrac{1}{6}y+3z=5$.

$x'(t)=2$　$y'(t)=6t$　$z'(t)=t^2$

设在 $t=t_0$ 处的切线平行于 $-2x+\dfrac{y}{6}+3z=5$ 则有 $(2, 6t_0, t_0^2)\cdot(-2, \tfrac{1}{6}, 3)=0$

解得 $-4+t_0+3t_0^2=0$　$t_0=1$ 或 $-\dfrac{4}{3}$

∴ 点为 $(2,3,\tfrac{1}{3})$ 或 $\left(-\dfrac{8}{3}, \dfrac{16}{3}, -\dfrac{64}{81}\right)$

4. 求下列曲面在指定点的切平面和法线方程：

(1) $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处.

$F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$ 则 $F_x(x,y,z)=y$

$F_y(x,y,z)=x$　$F_z(x,y,z)=e^z-1$

$(2,1,0)$ 处的法向量为 $n=\{1,2,0\}$.

∴ 切平面为 $x-2+2y-2=0$ 即 $x+2y-4=0$.

法线方程 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$.

班级 ________ ________ 序号 ________

5. 求曲面 $x^2+4y^2+z^2=36$ 的切平面，使它平行于平面 $x+y-z=0$.

设点 (x_0, y_0, z_0) 处切平面平行 $x+y-z=0$.

$F_x(x,y,z)=2x \quad F_y(x,y,z)=8y \quad F_z(x,y,z)=2z$

$2x_0(x-x_0)+8y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$

$\therefore \frac{2x_0}{1}=\frac{8y_0}{1}=\frac{2z_0}{-1} \quad \therefore 2x_0=8y_0=-2z_0$

代入曲面方程得. $(4y_0)^2+4y_0^2+(-4y_0)^2=36 \quad y_0=\pm1$

$\therefore$ 点 $(4,1,-4)$ 或 $(-4,-1,4)$ 为切点

$8(x-4)+8(y-1)-8(z+4)=0$

或 $-8(x+4)-8(y+1)+8(z-4)=0$

即 $x+y-z-9=0$ 或 $-x-y+z-9=0$

8. 设直线 $L:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b 的值.

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$，则平面 π 的法向量 $\vec{n}=(F_x', F_y', F_z')\big|_{(1,-2,5)}$
$=(2,-4,-1)$

$\therefore$ 平面 π 的方程为：$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$ 即 $2x-4y-z-5=0$

由直线方程得 $y=-(x+b)$，$z=x-a(x+b)-3$ 代入

平面 π 方程得 $2x+4(x+b)-x+a(x+b)-2=0$

$\therefore$ 得 $5+a=0$，$4b+ab-2=0$ 解方程得 $a=-5$，$b=2$

班级 ________

9. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

设曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 切平面的法向量为 $\vec{n}=\left\{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, \frac{1}{2\sqrt{z_0}}\right\}$

切平面为 $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$

切平面在坐标轴的截距为 $\sqrt{x_0z_0}+\sqrt{y_0z_0}+z_0$.

$\sqrt{y_0x_0}+\sqrt{z_0x_0}+x_0$，$\sqrt{x_0y_0}+\sqrt{z_0y_0}+y_0$.

截距和为 $x_0+y_0+z_0+2(\sqrt{x_0z_0}+\sqrt{y_0z_0}+\sqrt{x_0y_0})=a$.

11. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 在点 $(-1,-2,3)$ 处的交角(两曲面在交点处的切平面的交角定义为两曲面的交角).

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14 \qquad Q(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$

$F_x'=2x \quad F_y'=2y \quad F_z'=2z \qquad Q_x'=6x \quad Q_y'=2y \quad Q_z'=2z$

在点 $(-1,-2,3)$ 处两曲面切平面法向量为
$\{-1,-2,3\}$ 和 $\{-3,-2,3\}$

$\cos\theta=\frac{3+4+9}{\sqrt{1+4+9}\times\sqrt{9+4+9}}=\frac{8}{\sqrt{77}}$

$\theta=\arccos\frac{8}{\sqrt{77}}$,

班级

习题 7-7

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,1)$ 的方向的方向导数.

在 $P_0(1,2)$ 处方向 l 为 $\{1,-1\}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\frac{\partial z}{\partial x}=2x$　$\frac{\partial z}{\partial y}=2y$ 在点 $(1,2)$ 处

有 $\frac{\partial z}{\partial x}=2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=4$

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{P_0}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}$$

4. 求函数 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在点 $M(x,y,z)$ 沿此点向径 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 方向的方向导数.

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{a^2}x$　$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2}{b^2}y$　$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2}{c^2}z$

$\mathrm{grad}\,u=\left(\frac{2}{a^2}x, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$

$\vec{r}=(x,y,z)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x,y,z)}=\frac{\mathrm{grad}\,u\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{2u}{|\vec{r}|}$$

6. 设 n 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量，求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$

$F_x|_P=4x=4$　$F_y|_P=6y|_P=6$　$F_z|_P=2z|_P=2$

$\vec{n}=\{F_x, F_y, F_z\}|_P=\{4,6,2\}$　$|\vec{n}|=2\sqrt{14}$

$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}}$　$\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}}$　$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}$

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}=\frac{6}{\sqrt{14}}$　$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}}$

$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=\left.-\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P=\frac{11}{7}$$

班级 学 序号

7. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathrm{grad}\, f(0,0,0), \mathrm{grad}\, f(1,1,1)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-2 \quad \frac{\partial f}{\partial z}=6z-6$

$\mathrm{grad} f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

$\mathrm{grad} f(0,0,0)=3\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$

$\mathrm{grad} f(1,1,1)=6\vec{i}+3\vec{j}$

8. 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数.

$\mathrm{grad}\, u = y^2z\vec{i}+2xyz\vec{j}+xy^2\vec{k}$

$\mathrm{grad}\, u|_{P_0}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$

$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{21}}(2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k})$ 为增加最快方向，方向导数为 $\sqrt{21}$

$\vec{m}=\frac{1}{\sqrt{21}}(-2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k})$ 为减少最快方向，方向导数为 $-\sqrt{21}$

12. 求常数 a,b,c 的值，使 $f(x,y,z)=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点 $(1,2,-1)$ 沿 Oz 轴正方向的方向导数有最大值 64.

$\mathrm{grad} f(x,y,z)=(ay^2+3z^2cx^2)\vec{i}+(2axy+bz)\vec{j}+(by+2cx^3z)\vec{k}$

$\mathrm{grad} f(1,2,-1)=(4a+3c)\vec{i}+(4a-b)\vec{j}+(2b-2c)\vec{k}$

又方向导数在点 $(1,2,-1)$ 处沿 z 轴正方向，则知

$4a+3c=0 \quad 4a-b=0 \quad \therefore 2b-2c=64$

解得 $a=6,\ b=24,\ c=-8$

班级　　　　　　　　学　　　　　　　　　　　　　　　　　　　号

习题 7-8

1. 求下列函数的极值:

(2) $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y),(0\le x,y\le\frac{\pi}{2})$;　$f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$

$f_x=\cos x-\sin(x-y)=0$　　$f_y=-\sin y+\sin(x-y)=0$

则驻点为 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$

$A=f''_{xx}=-\sin x-\cos(x-y)$　　$B=f''_{xy}=\cos(x-y)$　　$C=f''_{yy}=-\cos y-\cos(x-y)$

$A=-\sqrt{3}$　　$B=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$C=-\sqrt{3}$,　$B^2-AC=-\frac{9}{4}<0$　$\therefore (\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$ 为 $f(x,y)$ 的极大值

$f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(4) $z=e^{-x^2-xy-y^2}(5x+7y-25)$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=(-2x-y)e^{-x^2-xy-y^2}(5x+7y-25)+e^{-x^2-xy-y^2}\cdot 5=0$

$\frac{\partial z}{\partial y}=(-x-2y)e^{-x^2-xy-y^2}(5x+7y-25)+e^{-x^2-xy-y^2}\cdot 7=0$

解得 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$　$P_0(1,3)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2e^{-x^2-xy-y^2}(5x+7y-25)+(2x+y)^2e^{-x^2-xy-y^2}(5x+7y-25)+(-2x-y)e^{-x^2-xy-y^2}\cdot 10$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^{-x^2-xy-y^2}(5x+7y-25)+(2x+y)(x+2y)e^{-x^2-xy-y^2}(5x+7y-25)+(-2x-y)e^{-x^2-xy-y^2}\cdot 7+(-x-2y)e^{-x^2-xy-y^2}\cdot 7$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2e^{-x^2-xy-y^2}(5x+7y-25)+(x+2y)^2(5x+7y-25)e^{-x^2-xy-y^2}+(-x-2y)e^{-x^2-xy-y^2}\cdot 14$

$A=-27e^{-13}<0$　$B=-50e^{-13}$　$C=-93e^{-13}$　$AC-B^2=11e^{-13}>0$

$\therefore$ 极大值 $=e^{-13}$

4. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求最大周长的直角三角形.

$L=x+y+l$　　$\begin{cases}x^2+y^2=l^2\\x>0\\y>0\end{cases}$

$\frac{\partial L}{\partial x}=1$　$\frac{\partial L}{\partial y}=1$

$L_0=x+y=x+\sqrt{l^2-x^2}$

$L_0'{}_x=1+\frac{-x}{\sqrt{l^2-x^2}}=0$

$x=\frac{l}{\sqrt{2}}$

$\therefore x=y=\frac{l}{\sqrt{2}}$ 时 周长最小

5. 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的最短距离.

$L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(xy-x-y+4-z^2)$

$L_x = 2x+\lambda y-\lambda=0 \quad L_y = 2y+\lambda x-\lambda=0 \quad L_z = 2z-2\lambda z=0.$

$L_\lambda = xy-x-y+4-z^2=0$

解得 $z=0 \quad xy=x+y \quad x=y=2$

则 $d_{min}=\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{2}$

9. 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小，求这切平面的切点，并求此最小体积.

设切点为 (x_0, y_0, z_0) 则切平面为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}+\dfrac{z_0z}{c^2}=1$

$V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$ V最小等价于 $f(x,y,z)=xyz$ 最大

故取拉格朗日函数

$F=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$

用拉格朗日乘数法可求出 (x_0, y_0, z_0)

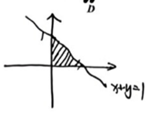
$\therefore$ 切点为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$，$V_{min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$

班级

习题 8-1

1. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中 D 为 x 轴、y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成；



积分区域d是由x轴y轴与直线 $x+y=1$ 围成

$\therefore$ 点介于 $x+y=0$ 和 $x+y=1$ 之间

即 $0 \le x+y \le 1$

$\therefore (x+y)^2 \geq (x+y)^3$

即 $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \geq \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中 D 为三角形闭区域，三角形的三个顶点分别为 $(1,0),(1,1),(2,0)$.

又积分区域 D 位于条形区域 $\{(x,y) \mid 1 \le x+y \le 2\}$ 内

$\therefore$ D 上的点满足 $0 \le \ln(x+y) < 1$，从而有 $[\ln(x+y)]^2 \le \ln(x+y)$

$\therefore \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \le \iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma$

2. 利用二重积分的性质，估计下列积分值的范围：

(2) $I = \iint\limits_D (x^2+2y^2+1) d\sigma$，其中 D 为：$x^2+y^2 \le 1$；

设 $f(x,y) = (x^2+y^2)+y^2+1$

在 $(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 处取得最大值，

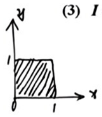
在 $(0,0)$ 处取得最小值

$M=4 \quad m=1$

$\sigma = \pi$

$\therefore \pi \le \iint\limits_D (x^2+2y^2+1) d\sigma \le 4\pi$

(3) $I = \iint\limits_D xy(1-x-y) d\sigma$，其中 D 为：$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.



$f = xy - x^2y - xy^2$ 驻点 $(0,0)(0,1)(1,0)(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$\begin{cases} f_x = y-2xy-y^2=0 \\ f'_y = x-x^2-2xy=0 \end{cases}$ $A=-2y \quad B=1-2x-2y$

$C=-2x$

$AC-B^2$

在 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 有极大值 $\frac{1}{27}$

$(1,1)$ 有最小值 -1

$\therefore -1 \le I \le \frac{1}{27}$

3. 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，证明 $\lim\limits_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_D f(x,y) d\sigma = f(x_0,y_0)$，其中

$$D = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le r^2\}.$$

由积分中值定理得：

$\exists \xi, \eta \in D$，使 $\iint\limits_D f(x,y) dxdy = \pi r^2 f(\xi,\eta)$

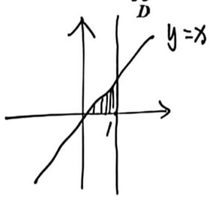
$\therefore \lim\limits_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_D f(x,y) d\sigma = \lim\limits_{r\to 0^+} f(\xi,\eta) = f(x_0,y_0)$.

班级　　　　　　　　学　　　　　　　　　　　　　　序号

习题 8-2

1. 计算下列二重积分:

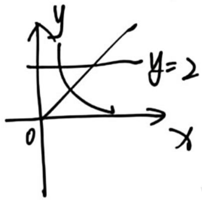
(1) $\iint\limits_D (x-y)d\sigma$，其中 D 是由两条直线 $y=x$、$x=1$ 及 x 轴所围成的闭区域;



$$\iint_D (x-y)d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)\,dy$$
$$= \int_0^1 \left(xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^x dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^2-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

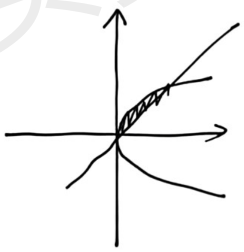
(3) $\iint\limits_D (x+1)y^2 dxdy$，其中 D 是由两条直线 $y=x$，$y=2$ 及双曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域;

$$\iint_D (x+1)y^2 dxdy = \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^{y} (x+1)y^2 dx$$



$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}y^4+y^3-\frac{1}{2}-y\right)dy$$
$$= \frac{97}{20}$$

(4) $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x$ 所围成的闭区域.

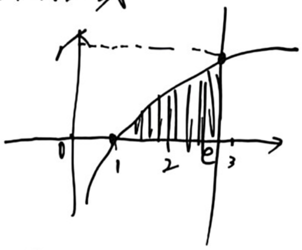


$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} xy\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}yx^2\Big|_{y^2}^{y} dy$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}y\left(y^2-y^4\right) dy$$
$$= \int_0^1 \frac{y^3}{2}dy - \int_0^1 \frac{y^5}{2}dy$$
$$= \frac{y^4}{8}\Big|_0^1 - \frac{y^6}{12}\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{8}-\frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

2. 交换下列二次积分的积分次序：

(2) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy$；

画积分区域



$\begin{cases} 1 \le x \le e \\ 0 \le y \le \ln x \end{cases}$

$\therefore$ 原式 $= \int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y) dx$

(4) $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x,y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y) dx$.

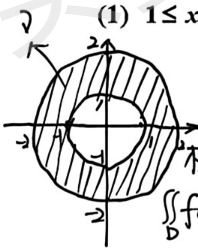
D_1: $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 2y \end{cases}$ D_2: $\begin{cases} 1 \le y \le 3 \\ 0 \le x \le 3-y \end{cases}$

$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, \frac{1}{2}x \le y \le 3-x\}$

$\therefore$ 原式 $= \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y) dy$

3. 画出积分区域 D 的图形，将二重积分 $\iint_D f(x,y) d\sigma$ 化为极坐标系下的二次积分，其中积分区域 D 为：

(1) $1 \le x^2 + y^2 \le 4$；



$1 \le r^2 \le 4$

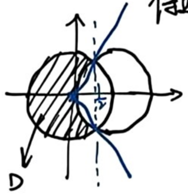
$1 \le r \le 2$

极角θ的范围是从0到2π

$\iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_D f(x,y) r dr d\theta$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

(4) $2x \le x^2 + y^2 \le 1$；



将边界线 $x^2+y^2=2x$ 化为极坐标方程 $r = 2\cos\theta$

$\frac{\pi}{3} \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} \le \theta_2 \le \frac{3\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{2} \le \theta_3 \le \frac{5\pi}{3}$

原式 $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

$+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{3}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

4. 将下列二次积分化为极坐标系下的二次积分，并计算积分值.

(1) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$；

极坐标下 $D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

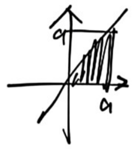
$\therefore$ 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\,r\,dr$

$=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta$

$=\frac{3}{4}\pi a^4$

(2) $\int_0^{a}\mathrm{d}x\int_0^{x}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

$\begin{cases}0\le x\le a\\ 0\le y\le x\end{cases}$



$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}}r\cdot r\,dr$

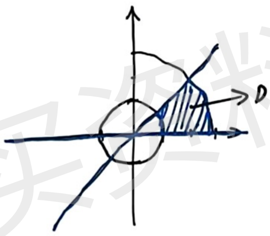
$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^3}{3\cos^3\theta}\,d\theta$

$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta$

$=\frac{1}{6}a^3[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$

5. 计算下列二重积分：

(2) $\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$、$x^2+y^2=9$ 及直线 $y=x$、$y=0$ 所围成的在第一象限内的闭区域；



$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$1\le r\le 3$

$x=\cos\theta$

$y=\sin\theta$

则 $\iint\limits_D\arctan(\tan\theta)\,d\sigma$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^3\theta\, r\,dr$

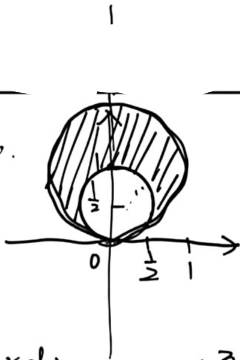
$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\theta r^2}{2}\Big|_1^3 d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\theta\, d\theta$

$=2\theta^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{8}$

班级 序号

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$y \le x^2+y^2 \le 2y$.



D区域画图

$y = x^2+y^2 \Rightarrow x^2+(y-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2$

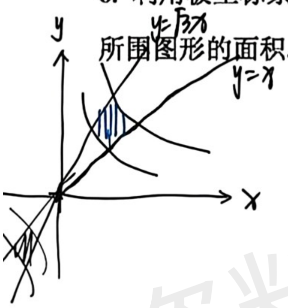
$x^2+y^2=2y \Rightarrow x^2+(y-1)^2=1$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sin\theta}^{2\sin\theta} r\cdot r\,dr$$ （$\frac{\pi}{2}\sim\pi$部分用$t=\pi-\theta$代换）

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} r^3 \Big|_{\sin\theta}^{2\sin\theta} \cdot d\theta = \frac{7}{3}\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{14}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{28}{9}.$$

6. 利用极坐标系下的二重积分，求由双曲线 $xy=1$、$xy=2$ 和直线 $y=x$、$y=\sqrt{3}x$ 所围图形的面积.



$r_1^2 = 2\csc 2\theta$ $r_2^2 = 4\csc 2\theta$

$$S = 2\iint\limits_D d\sigma = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\sqrt{2\csc 2\theta}}^{\sqrt{4\csc 2\theta}} r\,dr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\csc 2\theta\, d\theta = \ln|\csc 2\theta - \cot 2\theta|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

班级　　　　　　　　学　　　　　　　　　　　　　　　　　号

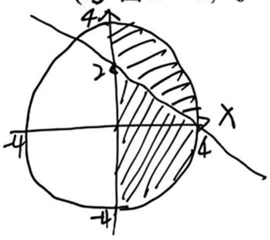
习题 8-3

1. 化三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 为三次积分，其中积分区域Ω分别为：

(2) 由双曲抛物面 $z=xy$ 及平面 $x+y-1=0$，$z=0$ 围成的闭区域；

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x,y,z)dz.$$

(3) 由 $x=0$，$z=0$，$z=3$，$x+2y=4$ 及 $x^2+y^2=16$ 围成的闭区域；



$$原式 = \int_0^4 dx \int_{\frac{4-x}{2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_0^3 f(x,y,z)\,dz.$$

(4) 由 $z=x^2+y^2$，$x=0$，$y=0$ 及 $z=1$ 所围的第一卦限的闭区域.

$$原式 = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\,dz.$$

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中Ω是由平面 $z=0$，$z=y$，$y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成.

$$\iiint\limits_{\Omega} xz\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_0^y xz\,dz$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} \frac{1}{2} xy^2\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x^7\right) dx = 0$$

班级________________

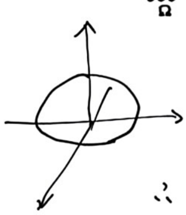
4. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$z=xy$，平面$y=x$，$x=1$以及$z=0$所围成.

$$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy^2z^3\,dz$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^x y^2\,dy \int_0^{xy} z^3\,dz$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{7}x^{12}\,dx = \frac{1}{364}$$

5. 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.



$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-c}^{c} z^2\,dz \iint\limits_{D_z} dx\,dy \qquad D_z: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}$$

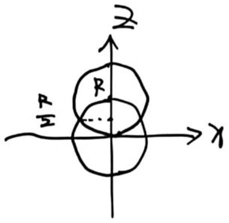
即 $D_z: \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}\le 1$ $\quad\therefore \iint\limits_{D_z} dx\,dy = \pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}} = \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega} z^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z^2\,dz = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

同理 $\iiint\limits_{\Omega} x^2\,dx\,dy\,dz = \frac{4}{15}\pi a^3bc \quad \iiint\limits_{\Omega} y^2\,dx\,dy\,dz = \frac{4}{15}\pi ab^3c$

由对称性：$\iiint\limits_{\Omega} xy\,dV = \iiint\limits_{\Omega} xz\,dV = \iiint\limits_{\Omega} yz\,dV = 0$ $\quad\therefore$ 原式$= \frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$

6. 计算$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为两个球$x^2+y^2+z^2\le R^2$和$x^2+y^2+z^2\le 2Rz\ (R>0)$的公共部分.



$$\text{原式} = \int_0^{\frac{R}{2}}\pi\left[R^2-(R-z)^2\right]z^2\,dz + \int_{\frac{R}{2}}^{R}\pi(R^2-z^2)z^2\,dz$$

$$= \pi\int_0^{\frac{R}{2}}(2Rz^3-z^4)\,dz + \pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}(R^2z^2-z^4)\,dz$$

$$= \pi\left(\frac{1}{32}R^5-\frac{R^5}{160}\right)+\pi\left(\frac{2}{15}R^5-\frac{1}{24}R^5+\frac{R^5}{160}\right)$$

$$= \frac{59}{480}\pi R^5$$

班级　　　　　　学号　　　　　　　　　　　　　序号

习题 8-4

1. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$和$z=x^2+y^2$所围成的闭区域;

$(x^2+y^2)^2=2-(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2=1$

$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$　　$\rho^2\le z\le\sqrt{2-\rho^2}$，$0\le\rho\le 1$，$0\le\theta\le 2\pi$.

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dv=\iiint\limits_{\Omega} z\rho\,d\rho\,d\theta\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\,d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1=\frac{7\pi}{12}$$

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是由$x^2+y^2=2x$和平面$z=0$，$z=a$ $(a>0)$围成的立体的第一象限部分;

$$原式=\int_0^a dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}z\,r\,dr$$

$$=\int_0^a dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}z\cos^3\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^a\frac{16}{9}z\,dz=\frac{8}{9}a^2$$

2. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=1$所围成的闭区域;

$$原式=\iiint\limits_{\Omega} r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^4dr$$

$$=2\pi\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi}\left(\frac{r^4}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{4}{5}\pi$$

班级　　　　　　　　学号　　　　　　　　姓名　　　　　　　　序号

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$，其中Ω由不等式 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$，$x^2+y^2+z^2\ge1$，$x^2+y^2+z^2\le16$ 所确定.

原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^4 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\, r^2\sin\varphi\,dr$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}64\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$

$=32\pi-\frac{1}{8}\pi=\frac{255}{8}\pi.$

3. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le1$；

原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1(r\sin\varphi)^6\,r^2\sin\varphi\,dr.$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{1}{9}\sin^7\varphi\,d\varphi$

$=\int_0^{2\pi}\frac{32}{315}d\theta=\frac{64}{315}\pi$

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中Ω是两球体: $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ 的公共部分；

设 $V_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le2Rz,\ z\le\frac{R}{2}\}$，$V_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge\frac{R}{2}\}$

$\iiint z^2dV=\iiint_{V_1}z^2dv+\iiint_{V_2}z^2dV=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2dz\iint\limits_{x^2+y^2\le2Rz-z^2}dxdy+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2dz\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2-z^2}dxdy$

$=\pi\int_0^{\frac{R}{2}}z^2(2Rz-z^2)dz+\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2(R^2-z^2)dz$

$=\pi\left[\frac{R}{2}z^4-\frac{1}{5}z^5\right]_0^{\frac{R}{2}}+\pi\left[\frac{R^2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5\right]_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{59}{480}\pi R^5$

班级	学号	姓名	序号

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega: a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2$；

$$\text{原式} = 4\int_0^a x^2\pi(R^2-a^2)\,dx + 4\int_a^R x^2\pi(R^2-x^2)\,dx$$

$$= \frac{4}{3}a^3\pi(R^2-a^2) + \frac{8}{15}R^5 - \frac{4}{3}\pi R^2a^3 + \frac{4}{5}\pi a^5$$

$$= \frac{8}{15}\pi(R^5-a^5)$$

(4) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1 \ (z \ge 0)$.

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^3\frac{\ln(r^2+1)}{r^2+1}\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1(r^2+1-1)\frac{\ln(r^2+1)}{r^2+1}\,d(r^2+1)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\int_0^1\ln(r^2+1)\,d(r^2+1) - \int_0^1\frac{\ln(r^2+1)}{r^2+1}\,d(r^2+1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[(r^2+1)\ln(r^2+1) - r^2 - \frac{1}{2}\ln^2(r^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln^2 2 - 1\right)$$

4. 利用三重积分求下列曲面所围立体的体积:

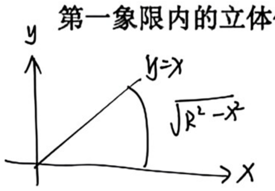
(2) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $4z=x^2+y^2$.

$$V = \int_0^1 \pi(z-z^2)\,dz = \frac{1}{6}\pi$$

班级　　　　学号　　　　姓名　　　　序号

习题 8-5

2. 求由平面 $y=0$，$y=x$，$z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一象限内的立体体积.



$$V=\int_0^{\arctan 1} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\, r\,dr$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\arctan 1} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\, d(R^2-r^2)$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\arctan 1}(-R^3)\,d\theta$$

$$=\frac{R^3}{3}\arctan 1$$

3. 用二重积分求半径为 R 的球的表面积.

取上半球面方程 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 则在 xoy 面 投影 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$

由 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　得 $\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

先取 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le b^2\}\Rightarrow S_1=\iint_{D_1}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy\quad(0<b<R)$

$$S_1=\iint_{D_1}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

极坐标

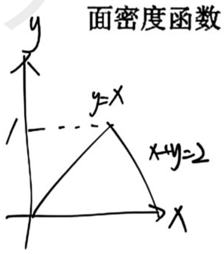
$$S_1=\iint_{D_1}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^b\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=2\pi R\int_0^b\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$=2\pi R\,(R-\sqrt{R^2-r^2})$$

$$\therefore \lim_{b\to R}S_1=\lim_{b\to R}2\pi R(R-\sqrt{R^2-r^2})=2\pi R^2$$

∴ 球面积 $S=4\pi R^2$

4. 设平面薄片在 xOy 面上占有闭区域 D，其中 D 由 $x+y=2$、$y=x$ 和 x 轴所围，面密度函数 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求此平面薄片的质量.



$$M=\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x^2+y^2)\,dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2\right]_y^{2-y}dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}(2-y)^3+2y^2-\frac{7}{3}y^3\right]dy$$

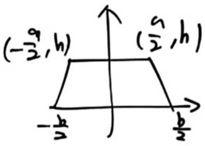
$$=\left[-\frac{1}{12}(2-y)^4+\frac{2}{3}y^3-\frac{7}{12}y^4\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

班级　　　　　　　　学号　　　　　　　　姓名　　　　　　　　　　序号

5. 设均匀平面薄片占有闭区域 D 如下，求此平面薄片的重心：

(1) $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1,\ y\ge 0$.

设重心坐标 $(\bar{x},\bar{y})$，$\bar{x}=0$



$$\bar{y}=\frac{\iint_D \rho y\,dx\,dy}{\iint_D \rho\,dx\,dy}=\frac{2}{ab\pi}\iint_D y\,dx\,dy$$

$$=\frac{2}{ab\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 ab^2r^2\sin\theta\,dr$$

$$=\frac{4b}{3\pi}$$

$\therefore$ 重心为 $\left(0,\dfrac{4b}{3\pi}\right)$.

6. 设均匀平面薄片（面密度为 1）所占闭区域 D 如下，求指定的转动惯量：

(1) D 由直线 $y=x$、$x^2+y^2=1$ 及 x 轴所围成的第一象限部分，求 I_x、I_y；

$$I_x=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}y^2\,dx$$

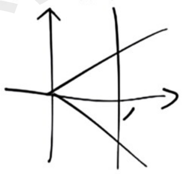
$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}y^2\sqrt{1-y^2}-y^3\,dy=\frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$$I_y=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^x x^2\,dy+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}x^2\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^3\,dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

(2) $D:|y|\le x\le 1$，直线 $L:x=1$，求 I_L.



$$I_L=\iint_D (x-1)^2\,dx\,dy=2\iint_{D_1}(x-1)^2\,dx\,dy$$

$$=2\int_0^1 dx\int_0^x (x-1)^2\,dy=\frac{1}{6}$$

班级　　　　学号　　　　姓名　　　　序号

8. 球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 内各点处的密度大小等于该点到点 $(R,0,0)$ 距离的平方，求此球体的重心.

P_0 的坐标 $(R,0,0)$

密度 $\rho(x,y,z)=(x-R)^2+y^2+z^2$

球面方程 $x^2+y^2+z^2=R$

重心坐标 $(\bar{x},0,0)$

$M=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dV$

$=\iiint_\Omega [(x-R)^2+y^2+z^2]\,dV$

$=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+R^2)\,dV$

$=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dV+R^2\iiint_\Omega dV$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi\,dr+R^2\frac{4}{3}\pi R^3$

$=\frac{4}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5$

$M_x=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,x\,dV$

$=\iiint_\Omega [(x-R)^2+y^2+z^2]\,x\,dV$

$=-2R\cdot\frac{1}{3}\iiint_\Omega [x^2+y^2+z^2]\,dV=-\frac{8\pi R^6}{15}$

$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=-\frac{R}{4}$　∴ 重心坐标 $(-\frac{R}{4},0,0)$

9. 求半径为 R 高为 H 的均匀圆柱体（密度为 1）对于过中心而平行母线的轴的转动惯量.

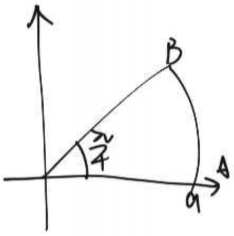
$J=\int_0^R R^2\cdot 2\pi R H\,dR$

$=\frac{1}{2}\pi H R^4.$

班级　　　　学号　　　　姓名　　　　序号

习题 9-1

3. 计算 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$、直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成扇形区域的边界.



$\overset{\frown}{AB}$: $x=a\cos t \quad y=a\sin t \quad (0\le t\le \frac{\pi}{4})$

OA: $y=0 \quad (0\le x\le a)$

OB: $y=x \quad (0\le x\le \frac{a}{\sqrt{2}})$

$$\int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^x dx = e^a-1$$

$$\int_{AB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ae^a dt = \frac{\pi}{4}ae^a$$

$$\int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{1+(1)^2}\, dx = e^a-1$$

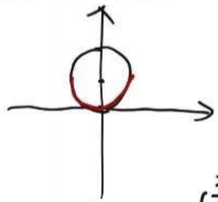
4. 计算 $\int_\Gamma x^2 ds$，其中 Γ 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

$$\int_\Gamma x^2 ds = \int_\Gamma y^2 ds = \int_\Gamma z^2 ds$$

$$\therefore \int_\Gamma x^2 ds = \frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2) ds = \frac{a^2}{3}\int_\Gamma ds = \frac{2\pi a^3}{3}$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4\theta \, d4\theta = \frac{1}{4} \sin 4\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \left(\frac{1+\cos 8\theta}{2}\right)^2$$

7. 求曲线形物体 $x^2+y^2=2y\ (y\le 1)$ 对 x 轴和 y 轴的转动惯量，设其线密度为 $\mu=1$.



设 L: $r(\theta)=2\sin\theta$

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2(\theta)}\, d\theta = \sqrt{4\sin^2\theta+4\cos^2\theta} = 2\, d\theta$$

$$I_x = 2\int_L y^2\mu\, ds = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\sin^2\theta\cdot 2\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^4\theta\cdot 2\, d\theta = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$
$$= \frac{3}{2}\pi - 4$$

$$I_y = \int_L x^2 ds = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin\theta\cos\theta)^2\sqrt{(2\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2}\, d\theta = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$
$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

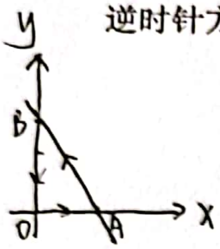
班级　　　　学号　　　　姓名　　　　序号

习题 9-2

2. 计算 $\int_L x\mathrm{d}y$，其中 L 是由坐标轴及直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 所构成的三角形周界，方向为逆时针方向.

$y=3-\frac{3}{2}x$ ~~化为对x的积分~~

$\cancel{\int_L x\,dy=\int_{BO} x\cdot(3-\frac{3}{2}x)'dx+\int_{OA} x\cdot(3-\frac{3}{2}x)'dx}$



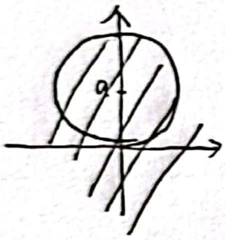
$\int_L x\,dy$ $\cancel{+\int_{AB} x\cdot(3-\frac{3}{2}x)'dx}$

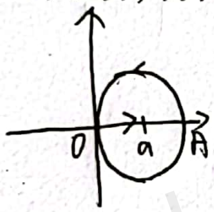
$= \cancel{\int_0^2(-\frac{3}{2}x)dx+\int_2^0(\frac{3}{2}x)dx}$ 　$\int_{BO} x\,dy+\int_{OA} x\,dy+\int_{AB} x\cdot(3-\frac{3}{2}x)'dx$

$=0+0+\int_2^0(-\frac{3}{2}x)dx$

$=-\frac{3}{4}x^2\Big|_2^0=3.$

3. 计算 $\oint_L xy\mathrm{d}x$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界，方向为逆时针方向.





$\int_L xy\,dx=\int_{L_1} xy\,dx+\int_{L_2} xy\,dx$

$\int_{L_1} xy\,dx$ 设 $x=a\cos\theta+a$　$y=a\sin\theta$　$0\le\theta\le\pi$

$=\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\,(-a\sin\theta)\,d\theta$

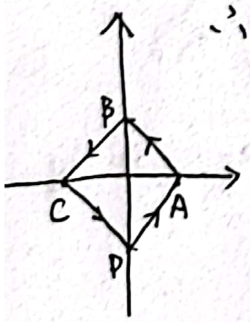
$=-a^3\left(\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta+\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\right)=-\frac{\pi}{2}a^3$

$L_2\ xy\,dx=0$ 　　$\therefore \int_L xy\,dx=-\frac{\pi}{2}a^3$

6. 计算 $\int_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中 L 为以 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$ 为顶点的正方形边界，取逆时针方向.

$\because |x|+|y|=1$

$\therefore \int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_L dx+dy$ $\cancel{=\int_{L_1}dx+\int_{L_1}dy}$



由格林公式 $\oint_L dx+dy=\iint_D(0-0)\,dx\,dy=0$

$\therefore$ 原式 $=0$.

7. 计算 $\int_{\Gamma} x^2\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z$，其中 Γ：$x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧.

原式 $= \int_0^{\pi}\left[k^2\theta^2 k + a\cos\theta\,(-a\sin\theta) - a\cos\theta\,(a\cos\theta)\right]d\theta$

$= \int_0^{\pi}(k^3\theta^2 - a^2)\,d\theta$

$= \frac{1}{3}k^3\pi^3 - a^2\pi$

10. 计算 $\int_L (x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y$，其中 L 是:

(1) 抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧;

(2) 从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段直线;

(3) 先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$，然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线;

(4) 曲线 $x = 2t^2+t+1, y = t^2+1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.

(1)

原式 $= \int_1^2 (y^2+y)\cdot 2y\,dy + (y-y^2)\,dy$

$= \int_1^2 (2y^3+y^2+y)\,dy = \frac{34}{3}$

(2) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$　原式 $= \int_1^4 (x+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}(-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3})\,dx$

$= \int_1^4 (\frac{10}{9}x + \frac{8}{9})\,dx = 11$

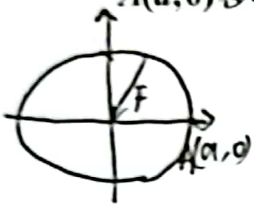
(3) 另 原式 $= \int_1^2 (y-1)\,dy + \int_1^4 (x+2)\,dx = 14$

(4) $(1,1) \to t=0$　　原式 $= \int_0^1 (3t^2+t+2)\cancel{d(2t^2+t+1)}(2t^2+t+1)'$

$(4,2) \to t=1$　　$+ (t^2+1-2t^2-t-1)(t^2+1)'\,dt$

$= \int_0^1 (10t^3+5t^2+9t+2)\,dt = \frac{32}{3}$.

11. 在椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 上每一点 M 都有作用力F，大小等于从点 M 到椭圆中心的距离，而方向朝着椭圆中心，求质点 P 沿椭圆位于第一象限中的弧从点 $A(a,0)$ 移动到点 ~~$x+y+z=1$~~ $(0,b)$ 时，力F所做的功.



$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_L F_x dx + F_y dy$

$F_x = |\vec{F}|\cos\theta = r\cdot\frac{x}{r} = x \qquad F_y = y$.

∴ $\int_L F_x dx + F_y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t(-a\sin t) + b\sin t(b\cos t)\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2\sin t\cos t) + b^2(\sin t\cos t)\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b^2-a^2)\sin t\cos t\,dt$

$= \frac{b^2-a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = \frac{b^2-a^2}{2}$

∴ $W = \frac{b^2-a^2}{2}$

13. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 化成对弧长的曲线积分，其中 L 为：

(1) 在 xOy 面内沿直线从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$；

~~沿直线从 (0,0) 到 (1,1) 直线方程为 y=x~~

切向量方向余弦满足 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]ds$

$= \int_L \frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}ds$

(3) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$.

$x=x,\ y=\sqrt{2x-x^2}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}} = \sqrt{2x-x^2}$

$\cos\beta = \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\cdot\sqrt{2x-x^2} = 1-x$

∴ $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L[\sqrt{2x-x^2}\,P(x,y) + (1-x)Q(x,y)]\,~~dy~~\,ds$.

班级　　　　　　学号　　　　　　姓名　　　　　　　序号

习题 9-3

1. 利用格林公式计算下列积分:

(2) $\oint_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2ye^x)\mathrm{d}y$，其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$；

原式 $=\iint_D (2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x-x^2\cos x-2x\sin x+2ye^x)\,dx\,dy$

$=0$

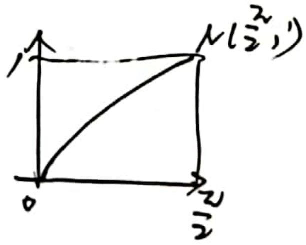
(4) $\oint_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 取逆时针方向；

$P=x+y \quad Q=y-x \quad \frac{\partial P}{\partial y}=1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1$

原式 $=\iint_D (-1-1)\,dx\,dy=-2\pi ab$

(5) $\int_L (2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点(0, 0)到$(\frac{\pi}{2},1)$的一段弧；

$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\cos x+6xy^2=\frac{\partial P}{\partial y}$



∴ 所给曲线积分与路径无关

$O(0,0) \quad R(\frac{\pi}{2},0) \quad N(\frac{\pi}{2},1)$

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\cdot dx+\int_0^1 (1-2y\sin\frac{\pi}{2}+3\cdot\frac{\pi^2}{4}y^2)\,dy$

$=\int_0^1 (1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2)\,dy=\frac{\pi^2}{4}$

(6) $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点由点(0, 0)到点(1, 1)的一段弧；

$-\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$ ∴所求曲线积分与路径无关

ORN O(0,0) B(1,0) A(1,1)

原式 $=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1(1+\sin^2 y)dy=\frac{1}{3}-1-\int_0^1\frac{1-\cos 2y}{2}dy$

$=-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin 2=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2$

2. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}$，其中 L 为不经过坐标原点的简单闭曲线，且方向为顺时针方向.

$P=\frac{y}{x^2+2y}$ $Q=\frac{-x}{x^2+2y^2}$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-2y^2}{(x^2+2y^2)^2}\frac{\partial P}{\partial y}$

① 若原点不在L所围区域D上 用格林公式

$\oint_L\frac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

② 若原点在D内，以原点为中心 作 l: $x^2+y^2=\varepsilon^2$，ε适当小 逆时针方向.

则L和l所围区域D，满足格林公式条件 $\oint_L\frac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}=\oint_{L顺+l逆}\frac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}-\oint_{l逆}\frac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}$

$=-\iint_{D_1}0dxdy-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l逆}ydx-xdy=\sqrt{2}\pi$.

3. 利用曲线积分求椭圆 $9x^2+16y^2=144$ 所围成图形的面积.

参数方程 $x=4\cos\theta$ $y=3\sin\theta$ $0\le\theta\le 2\pi$

$\therefore A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

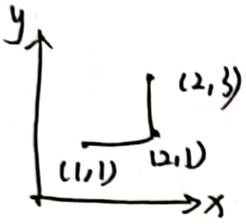
$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[4\cos\theta\cdot 3\cos\theta-3\sin\theta\cdot(-4\sin\theta)]d\theta$

$=6\int_0^{2\pi}d\theta=12\pi$

班级　　　　学号　　　　姓名　　　　序号

4. 证明曲线积分 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分的值.

$P=x+y \quad Q=x-y \quad \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ∴曲线积分与路径无关



原式 $=\int_1^2 (x+1)dx+\int_1^3 (2-y)dy$

$=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_1^2+\left(2y-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^3=\frac{5}{2}$

8. 验证下列各式在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出 $u(x,y)$：

(1) $4\sin x\sin 3y\cos x\mathrm{d}x-3\cos 3y\cos 2x\mathrm{d}y$；

$\frac{\partial Q}{\partial x}=6\cos 3y\sin 2x=\frac{\partial P}{\partial y}$ ∴ $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是某个定义在 xOy 平面内函数 $u(x,y)$ 的全微分.

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} 4\sin x\sin 3y\cos x dx-3\cos 3y\cos 2x dy$

$=\int_0^x 0dx+\int_0^y -3\cos 3y\cos 2x dy+C=-\cos 2x\sin 3y$

(2) $(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$.

∵ $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y}$

∴ $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分.

$u(x,y)=\int_0^x 2x dx+\int_0^y (2y\sin x-x^2\sin y)dy$

$=y^2\sin x+x^2\cos y$.

习题 9-4

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分，$f(x,y,z)$ 分别如下：

(3) $f(x,y,z)=3z$；

$$\iint\limits_{\Sigma} 3z\,dS = 3\iint\limits_{D_{xy}} [2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} 3\iint\limits_{D_{xy}} (2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho d\theta = 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\frac{1}{2}\tan t} 6\pi\left[\frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t\,d\sec t-\frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t(\sec^2 t-1)d\sec t\right]$$

$$=6\pi\left(\frac{13}{3}-\frac{149}{60}\right)=\frac{111}{10}\pi.$$

4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$．

上半球面 Σ 关于 $x=0$ 和 $y=0$ 对称，由对称奇偶性

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS = 0+0+\iint\limits_{\Sigma} z\,dS$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} a\,dxdy=\pi a^3$$

班级　　　　学号　　　　姓名　　　　序号

5. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

Σ关于xOz面对称，且被积函数xy及yz是关于y的奇函数

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma} xy\,ds=0 \qquad \iint\limits_{\Sigma} yz\,ds=0$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)ds=\iint\limits_{\Sigma} zx\,ds=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$\underline{\text{极坐标}}\ \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,d\theta=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

7. 设质量均匀的薄壳形状的抛物面 $z=\frac{3}{4}-(x^2+y^2), x^2+y^2\le\frac{3}{4}$，求此薄壳状物体的重心.

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\tfrac{3}{4}\}\quad ds=\sqrt{1+2x^2+2y^2}\,dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$M=\iint\limits_{\Sigma}\rho\,ds=\rho\iint\limits_{\Sigma}ds=\rho\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr=2\pi\rho\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{8}\sqrt{1+4r^2}\,d(1+4r^2)$$

$$=\frac{7}{6}\pi\rho$$

$$x_G=y_G=0$$

$$z_G=\frac{\iint\limits_{\Sigma}\rho z\,ds}{M}=\frac{\rho}{\frac{7}{6}\pi\rho}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-r^2\right)\cdot r\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

$$=\frac{12}{7}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-r^2\right)r\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

$$=\frac{12}{7}\left[\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,dr-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot r\,dr\right]$$

$$=\frac{12}{7}\left(\frac{7}{12}-\frac{31}{80}\right)=\frac{47}{140}.$$

重心 $(0,0,\frac{47}{140})$

习题 9-5

1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\,dxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 的下半部分的下侧.

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$，

在 Σ 上，$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\,dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}} x^2y^2\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)dxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\iint\limits_{D_{xy}} \rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta\cdot\int_0^R \rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho$$

$$\xlongequal{\rho=R\sin t}\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5\sin^5 t\cdot R\cos t\cdot R\cos t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 t-\sin^7 t)\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{105}\pi R^7$$

2. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dydz$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 的外表面.

设 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中 $\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$，方向指向X轴正向

$\Sigma_2: x=-\sqrt{R^2-y^2-z^2}$，负向

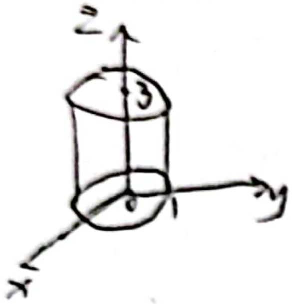
$D_{yz}: y^2+z^2\le R^2$

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dydz=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)\,dydz+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2+z^2)\,dydz$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}R^2\,dydz-\iint\limits_{D_{yz}}R^2\,dydz=0.$$

$$=0.$$

4. $\iint\limits_{\Sigma}(x^2-yz)dxdy+xdydz+ydzdx$，其中$\Sigma$是柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=3$所截得的第一卦限内的部分的前侧.



$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2-yz)dxdy=0$$

$x=\sqrt{1-y^2}$　　$D_{yz}: 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 3.$

$$\iint\limits_{\Sigma}xdydz=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\,dydz=\int_0^3dz\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$$
$$=3\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{3\pi}{4}$$

$y=\sqrt{1-x^2}$　　$D_{xz}: 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 3$

$$\iint\limits_{\Sigma}ydzdx=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\,dxdz=\int_0^3dz\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$=3\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{3\pi}{4}$$

$\therefore$ 原式 $=\frac{3}{2}\pi$.

6. 把对坐标的曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$化成对面积的曲面积分，其中$\Sigma$是抛物面$z=8-x^2-y^2$在$xOy$面上方部分的上侧.

令 $F(x,y,z)=z+x^2+y^2-8$，Σ上侧的法向量 $\vec{n}=\{2x,2y,1\}$

单位法向量 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\{2x,2y,1\}$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2xP+2yQ+R)dS.$$

习题 9-6

1. 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

$P=x^3 \quad Q=y^3 \quad R=z^2$

由高斯公式

$$原式 = \iiint\limits_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)\,dV$$

$$\underline{\underline{球面坐标}}\ 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{a} r^4 dr$$

$$= 3\cdot 2\pi \cdot \cos\varphi\Big|_{\pi}^{0} \cdot \frac{1}{5} r^5\Big|_0^a$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^5$$

3. 利用高斯公式计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy$，其中 Σ 为锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $(z\ge 0)$ 的上侧.

Σ 不是封闭曲面，补曲面 Σ_1: $z=0$，方向向下.

且 Σ_1 在 xoy 面上的投影为 D: $x^2+y^2\le 1$.

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy$$

$$= \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2)\,dxdydz - \left(-\iint\limits_{D} 0\,dxdy\right)$$

由对称性，$\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y)\,dxdydz=0$

$$\therefore 原式 = 2\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \frac{2}{3}\pi.$$

5. 利用高斯公式计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成曲面，它的法向量与 y 正方向夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

补面 Σ_1：$y=3$ 的右侧.

原式 $= \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy - \iint\limits_{\Sigma_1}(8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$.

$= \iiint [8y+1-4(1-y)-4y]dV - \iint\limits_{\Sigma_1} 2(1-y)^2 dzdx$

$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}} rdr \int_{r^2+1}^{3}(8y-3)dy - 16\pi$

$= \frac{94}{3}\pi - 16\pi = \frac{46}{3}\pi$.

6. 设函数 $f(u)$ 有一阶连续的导数，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}xf(xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-yf(xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y^2z+\frac{1}{3}z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是下半球面 $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\le 0)$ 的上侧.

补面 Σ_1：$z=0$，$x^2+y^2\le 1$，取下侧

$I = -\iiint\limits_{\Omega}(f(xy)+xf'(xy)y - f(xy)-yf'(xy)x+x^2+y^2+z^2)dxdydz$

$-\iint\limits_{\Sigma_1} xf(xy)dydz - yf(xy)dzdx+(x^2z+y^2z+\frac{1}{3}z^3)dxdy$

$= -\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz - \iint\limits_{\Sigma_1}(x^2z+y^2z+\frac{1}{3}z^3)dxdy$

$= -\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr - 0 = -\frac{2}{5}\pi$

7. 计算向量 $\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 通过区域Ω：$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ 的边界曲面流向外侧的通量.

$$\text{通量}\ \Phi=\iint_{\Sigma} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$$

$$\underline{\text{高斯公式}}\ \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dv$$

$$=3\iiint_{\Omega}dv=3$$

9. 求下列向量的散度

(1) $\vec{A}=(x^2+yz)\vec{i}+(y^2+xz)\vec{j}+(z^2+xy)\vec{k}$；

$P=x^2+yz$，$Q=y^2+xz$，$R=z^2+xy$

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x+2y+2z$$

(2) $\vec{A}=e^{xy}\vec{i}+\cos(xy)\vec{j}+\cos(xz^2)\vec{k}$.

$P=e^{xy}$，$Q=\cos(xy)$，$R=\cos(xz^2)$.

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=ye^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin(xz^2)$$

班级　　　　　　学号　　　　　　姓名　　　　　　序号

习题 9-7

1. 计算$\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中$\Gamma$为$x^2+y^2=1$，$x+z=1$的交线从$x$轴正向看去为逆时针方向.

$x+z=1$ 法向量 $\{1,0,1\}$

$$原式=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=\iint_{\Sigma}-2\sqrt2\,dS=-2\sqrt2\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt2}$$

$$=-4\iint_D dxdy$$

$$=-4\pi$$

D为 $x^2+y^2\le1$

3. 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$I=\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz,$$

其中Γ是用平面$x+y+z=\frac{3}{2}$截立方体$0\le x\le1,0\le y\le1,0\le z\le1$的表面所得的截痕, 若从$Ox$轴的正向看去, 取逆时针方向.

取Σ为平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 的上侧被L所围成的部分，Σ的单位法向量

$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt3}\{1,1,1\}$，即 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt3}$，

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}dS$$

$$=-\frac{4}{\sqrt3}\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$$

又在Σ上 $x+y+z=\frac{3}{2}$

$$I=-\frac{4}{\sqrt3}\cdot\frac{3}{2}\iint_{\Sigma}dS=-2\sqrt3\iint_{D_{xy}}\sqrt3\,dxdy$$

D_{xy}为Σ在xoy平面上的投影区域. σ_{xy}为D_{xy}面积

又 $\sigma_{xy}=1-3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$　∴ $I=-\frac{9}{2}$.

5. 计算 $\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 是圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，从 Oz 轴正方向看去 Γ 取逆时针方向 $(a>0)$.

设Σ为平面 $x+y+z=0$ 上Γ所围成的部分，则Σ是一个以 a 为半径的大圆面，且取Σ上侧，则其单位法向量为.

$\vec{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$

$$\oint_{\Gamma} y\,dx+z\,dy+x\,dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS$$

$$\cancel{=\iint_{\Sigma}(-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)d\alpha} = \iint_{\Sigma} -\frac{1}{\sqrt3}dS = -\sqrt3\pi a^2$$

6. 求下列向量场 $\vec{A}$ 的旋度:

(2) $\vec{A}=(\sin y)\vec{i}-(z-x\cos y)\vec{k}$;

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin y & 0 & x\cos y - z \end{vmatrix} = (-x\sin y)\vec{i}-(\cos y)\vec{j}-(\cos y)\vec{k}$$

8. 设 $u=x^2y+2xy^2-3yz^2$，求 $\mathrm{grad}u, \mathrm{div}(\mathrm{grad}u), \mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)$.

$$\mathrm{grad}u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\} = \{2xy+2y^2, x^2+4xy-3z^2, -6yz\}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u) = \frac{\partial(2xy+2y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2+4xy-3z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(-6yz)}{\partial z}$$

$$= 2y+4x-6y = 4x-4y$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u) = \left\{\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2u}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\right\}$$

$$= \vec{0}$$

班级

习题 10-1

2. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的敛散性.

(1) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$;

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$ 当 $n\to\infty$ 时

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 收敛且收敛于 $\frac{1}{2}$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}\cdots\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$=\sqrt{n+1}-1$ 当 $n\to\infty$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\to\infty$

$\therefore$ 发散

(5) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

(5) $\because \lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{6}\neq0$ $\therefore$ 发散

$\therefore$ 发散.

3. (4) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n+1)}{P(n)}=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2[2+(-1)^n]}$ 极限不存在

$\therefore$ 原式发散.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$

$\Rightarrow$ 收敛.

4. 利用柯西收敛定理判别级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$;

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+2}\right)$

当 $n\to\infty$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{8}$

$\therefore$ 收敛，收敛于 $\frac{1}{8}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi}{2^n}$.

对任意自然数 p，有

$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|=\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin k\pi}{2^k}\right|\le\frac{p-1}{2^{n+1}}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{p-1}{2^{n+1}}=0$ $\therefore\forall\varepsilon>0,\exists N$，当 $n>N$ 时

有 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\le\frac{p-1}{2^{n+1}}<\varepsilon$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi}{2^n}$ 收敛.

2022.05.09 20:3

习题 10-2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的敛散性.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$;

当 $0<a\le 1$ 时 $\lim_{n\to\infty} u_n \ne 0$ 发散

当 $a>1$ 时 $0<u_n<\frac{1}{a^n}=V_n$

∵ $\sum_{n=1}^{\infty} V_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a})^n$ 收敛

∴原级数收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$;

~~$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n}$~~

~~$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n}$~~

∵ $\frac{1}{2}<1$　$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^n}=0$

∴ $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{2\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\pi$　∴该级数收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

∵ $\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$　$\frac{3}{2}>1$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

∴原级数收敛

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(3n+2)}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(3n+2)}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

∵ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+2}<\frac{1}{4}$

收敛

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(3n+2)}$ 收敛

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

$u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$

$u_n=\frac{n^2}{3^n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^2}=\frac{1}{3}<1$

∴级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

$u_{n+1}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$u_n=\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$

∴级数收敛.

班级　　　　　学号　　　　　姓名　　　　　序号

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2^{\frac{\pi}{n+2}}}{2^{\frac{\pi}{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$$

∴级数收敛

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n+3}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n+1}=0<1$$

∴级数收敛.

3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$;

$$u_n=\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

由根值审敛法知　级数收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2n-1}{n}\ln\left(\frac{n}{3n-1}\right)}$$

$$=e^{2\ln\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}<1$$

∴收敛.

4. 判定下列级数的收敛性.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$; $\left|\cos^2\frac{n\pi}{3}\right|\le 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}<1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛. 则原级数绝对收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na+b}\ (a>0,b>0)$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{na+b}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{na+b}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 有相同收敛性

$\therefore$ 原级数发散

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^4} = 0<1$$

$\therefore$ 原级数收敛

(6) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\dots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

$u_n=\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ $\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1\ne 0$ $\therefore$ 级数发散

$\cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}} \ne \cancel{\frac{n+2}{n+1}\Big/\frac{n}{n+1}}$

5. 判定下列级数是否收敛，如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^{n-1}$ $|u_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}<1$ $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

~~$\because |u_n|>|u_{n+1}|$ $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$ $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛~~

(4) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$;

莱布尼兹审敛法 $u_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}$ $|u_n|>|u_{n+1}|$ $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$ $\therefore$ 原级数收敛.

$\because\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，$\therefore$ 原级数绝对收敛

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$;

~~$u_n=(-1)^n\frac{n}{2^n}$ $|u_n|=\frac{n}{2^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$ $\therefore$ 绝对收敛~~

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛 ~~$\therefore$ 该级数绝对收敛~~

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{2^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛

$\therefore$ 该级数绝对收敛

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$;

$u_n=(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$ $|u_n|=\frac{2^{n^2}}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n^2}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\infty$$

$\therefore$ 发散

习题 10–3

1. 求下列幂级数的收敛域.

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

$a_n = nx^n$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)}{n} = 1 \quad \therefore R=1$$

在左端点 $x=-1$ 时处，幂级数成为 $-1+2-3+\cdots+\cancel{nx^n}\ n(-1)^n+\cdots$ 发散

在右端点 $x=1$ 处，幂级数为 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$ 发散

$\therefore$ 收敛域为 $(-1,1)$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;　　令 $t=x^2$

$a_n = \frac{2n-1}{2^n}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2}$$

$R=2$　　$t=2$ 时 $x=\pm\sqrt{2}$

当 $x=\sqrt{2}$ 处　$a_n = \frac{2n-1}{2^n}2^{n-1} = \frac{2n-1}{2}$　$n\to\infty$ 发散

$x=-\sqrt{2}$ 处　$a_n = \frac{2n-1}{2}$　$n\to\infty$，发散

$\therefore$ 收敛域 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$;

令 $t=x-2$ 代入

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{\sqrt{n}}$ 得

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}=1$$

$t=1$ 时 发散

$t=-1$ 时 收敛

~~幂级数~~

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为 $[-1,1)$

$\therefore$ 原级数收敛域为 $[1,3)$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

令 $x+1=t$　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{[3^n-(-2)^n](n+1)}{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}]n}=\frac{1}{3}$$

$t=\frac{1}{3}$ 时　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}$ 发散

$t=-\frac{1}{3}$ 时　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot(-3)^n}$ 收敛

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$ 的收敛域 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$\therefore$ 原级数 $[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$

2. 利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1},|x|<1$;

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$

$F(x)=\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{2}x^{n}$

$F(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{1}{2}\frac{1-x^n}{1-x}$

$F'(x)=\frac{1}{2}\frac{nx^n-nx^{n-1}x^n+1}{(x-1)^2}$

$f(x)=F'(x)=\frac{1}{(1-x)^3}, |x|<1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1},|x|<1$;

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$. $S(0)=0$

$\therefore S(x)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n})dx$

$=\int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}dx$

$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1},|x|<1$，并求$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}(\frac{3}{4})^{2n-1}$;

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$

n=奇 $f_1'(x)=\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}$ 奇次和

n=偶 $f_2'(x)=\frac{-x(1-x^{2n})}{1-x^2}$ 偶次和

前2n项和 $F(x)=\frac{1-x^{2n}}{1+x}$ $\cancel{\int_0^x f(x)dx}=$

积分 $\arctan x, |x|<1$ 代入$\frac{3}{4}$得 $\arctan\frac{3}{4}$.

(4) 求级数$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3^2}+\frac{1}{3\cdot3^3}+\cdots$的和.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot x^n$ 之 $S(0)=0$

$\therefore S(x)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1})dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=\ln\frac{1}{1-x}$

将$x=\frac{1}{3}$代入，原式$=S(\frac{1}{3})=\ln\frac{3}{2}$

班级　　　　学号　　　　姓名　　　　序号

习题 10–4

1. 求函数 $f(x)=\sin x$ 的泰勒级数，并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}<1$$

∴ 整个轴上收敛.

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间.

(1) $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

$$\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

(4) $\sin^2 x$；

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

~~(5)~~ $\dfrac{x}{2-x-x^2}$；

$$\cancel{\frac{x}{2-x-x^2}=\frac{x}{(x+2)(-x+1)}}$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]x^n,\ x\in(-1,1)$$

3. 将函数 $\sqrt{x^3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间.

$$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} = [1+(x-1)]^{\frac{3}{2}}$$

$$= 1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{3}{2^{2n+2}(n+1)(n+2)}(x-1)^{n+2}$$

$$x\in[0,2]$$

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{(x-3)+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-3)}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n(x-3)^n$$

$$\frac{x-3}{3}\in(-1,1)\Rightarrow x\in(0,6)$$

6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{x+2}=\frac{1}{x+4-3}-\frac{1}{x+4-2}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{1-\frac{(x+4)}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x+4}{2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right](x+4)^n.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x+4}{3}\in(-1,1)\\ \frac{x+4}{2}\in(-1,1)\end{array}\right.\Rightarrow x\in(-6,-2)$$

习题 10–5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值.

(1) $\ln 3$ (误差不超过 0.0001);

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right),\quad x\in(-1,1)$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=3$ 可得 $x=\frac{1}{2}$

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+\cdots\right]$$

$$|r_n|=2\left[\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}}+\cdots\right]<\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)=\frac{1}{3(2n+1)2^{2n-2}}$$

$|r_5|<\frac{1}{3\cdot 11\cdot 2^8}\approx 0.00012$ $\quad |r_6|<\frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}}\approx 0.00003<10^{-4}$

$\therefore n=6$ 则 $\ln 3\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{11\cdot 2^{11}}\right)$ $\quad \ln 3\approx 1.0986$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值.

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ (误差不超过 0.0001)

$\cancel{\frac{1}{1+x^4}=\sum}$

$$\because\ \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots(-1\leq x\leq 1)$$

$$\therefore\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}\left[1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\cdots\right]dx$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\cdots\right)\Big|_0^{0.5}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots$$

$\because |r_3|\leq u_4=\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}\approx 0.0002<10^{-3}$

原式 $\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.487$

4. 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{1-\cos x}$;

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)}{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}$$

$=-2.$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

$$=\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x}$$

$$\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\ln(1+t)$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t-\frac{t^2}{2}+\cdots}{t}=1$$

班级　　　　　　学号　　　　　　姓名　　　　　　序号

习题 10-6

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：

(2) $f(x)=3x^2+1 \quad (-\pi\le x<\pi)$.

$f(x)$在$[-\pi,\pi)$上连续

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx = 2(\pi^2+1)$$

$$\cancel{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,dx}$$

$$\cancel{\pi^2+1+} \quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\pi^2+1+12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=f(x)$$

$$(x\in(-\infty,+\infty)).$$

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

(2) $f(x)=\begin{cases} e^x, & -\pi\le x<0 \\ 1, & 0\le x\le\pi \end{cases}$.

~~f(x) 仅在 x=0 处~~ $e^0=1$ $\therefore f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续.

$f(x)$满足收敛定理的条件

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^xdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dx=1+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi e^{\pi}}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{-n[1-(-1)^ne^{-\pi}]}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right\} \quad (n=1,2,\cdots)$$

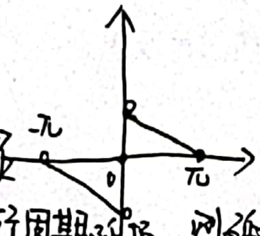
$$\therefore f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{1+n^2}\right]\cos nx+\left[\frac{-n+(-1)^nne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx\right\} \quad x\in(-\pi,\pi).$$

班级

习题 10–7

1. 将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}\ (0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数.

进行 f(x) 正弦级数展开，对 f(x) 进行奇延拓



$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & 0<x\le\pi\\ 0, & x=0\\ -\left(\frac{\pi+x}{2}\right), & -\pi<x<0.\end{cases}$

再对 F(x) 进行周期延拓，则延拓得到的周期函数 G(x) 的傅里叶级数的系数

$a_n=0\ (n=0,1,2\cdots)$

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ x\in(0,\pi]$

在 $x=0$ 时 正弦级数收敛于零

3. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}\ (-\pi\le x\le\pi)$ 展开成 2π 为周期的傅里叶级数.

函数为偶函数 $\therefore b_n=0$.

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx=\frac{4}{(4n^2-1)\pi}(-1)^n$

$a_0=\frac{4}{\pi}$

$\therefore f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{(4n^2-1)\pi}\cos x+\frac{2}{\pi},\ \cancel{x\in[-\pi,\pi]}$

$=\cos\frac{x}{2}\quad \cancel{(-\pi\le x\le\pi)}\ (0\le x\le\pi)$

$\cancel{(0\le x\le\pi)}$

习题 10-8

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式).

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\le x<0\\ 1, & 0\le x<3\end{cases}$;

周期 $2l=6$

$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]$

$a_0=-1$ $\qquad =\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots)$.

$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]$

$=\frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件.

间断点为 $x=3(2k+1)$, $k\in Z$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\}$

$x\neq 3(2k+1), k\in Z$.

2. 将下列函数分别展开成以 $2l$ 为周期的正弦级数和余弦级数.

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<\frac{l}{2}\\ l-x, & \frac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$.

① 正弦展开, 对 $f(x)$ 作奇延拓.

$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,l)\\ -f(-x) & x\in(-l,0)\end{cases}$

傅里叶系数

$a_n=0$.

$b_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right]=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.\quad(n=1,2,\cdots)$

$\therefore f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0,l]$

② 余弦级数 对 $f(x)$ 作偶延拓

$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,l)\\ f(-x), & x\in(-l,0)\end{cases}$

$b_n=0$

$a_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right]$

$=\frac{2l}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right]$

$a_0=\frac{l}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{l}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{l}$.

3. 将下列函数分别展开成以 2π 和 6 为周期傅立叶级数.

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$;

令 $z=x-\frac{\pi}{2}$，则 $f(z)=\begin{cases} z+\frac{\pi}{2}, & -\pi\le z\le 0 \\ -z+\frac{\pi}{2}, & 0<z\le\pi. \end{cases}$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)dz=0$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(z+\frac{\pi}{2})\cos nz\,dz+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-z)\cos nz\,dz$

$=\frac{2}{n^2\pi}[1-(-1)^n]$

$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}[1-(-1)^n]\cos nz=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos(2n-1)z}{(2n-1)^2\pi}$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)(x-\frac{\pi}{2})$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

(2) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3\le x\le 0 \\ x, & 0<x\le 3 \end{cases}$.

令 $\cancel{a_n=\frac{1}{3}}$ $a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x+1)dx+\frac{1}{3}\int_0^3 x\,dx$

$=\frac{1}{3}\left((x^2+x)\Big|_{-3}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^3\right)=-\frac{1}{2}$

$a_n=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_0^3 x\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)$

$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x+1)\cancel{\cos}\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_0^3 x\sin\frac{n\pi x}{3}dx)$

$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$, $(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2})$

习题 11-1

1. 指出下列微分方程的阶数：

(1) $x(y')^2-2yy'+x=0$； 一阶

(2) $x^2y''-xy'+y=0$； 二阶

(6) $\frac{d\rho}{d\theta}+\rho=\sin^2\theta$. 一阶

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

(1) $xy'=2y$，$y=5x^2$；

$y'=10x$

$xy'=10x^2$　$2y=10x^2$　$\therefore xy'=2y$　$\therefore$是

(4) $y''-(r_1+r_2)y'+r_1r_2y=0$，$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

$y'=C_1e^{r_1x}\cdot r_1+C_2e^{r_2x}\cdot r_2$　$y''=C_1r_1^2e^{r_1x}+C_2r_2^2e^{r_2x}$

$y''-(r_1+r_2)y'+r_1r_2y=r_1^2C_1e^{r_1x}+C_2r_2^2e^{r_2x}-C_1r_1^2e^{r_1x}-r_1r_2C_2e^{r_2x}-C_1r_1r_2e^{r_1x}$
$-C_2r_2^2e^{r_2x}+r_1r_2(C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x})=0$　$\therefore$是

4. 确定函数关系式中所含的参数，使函数满足所给的初始条件：

(2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$.

$y|_{x=0}=C_1e^0=0$　$\therefore C_1=0$

$y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x}$

$y'|_{x=0}=C_2+2C_1=1$　$\therefore C_2=1$

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 原点到曲线上任一点处的切线的距离等于该切点的横坐标.

设曲线 $Y=y(x)$，则曲线上点 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$

$$x=\frac{|0-y-y'(0-x)|}{\sqrt{1+y'^2}}$$

整理得 $2xyy'-y^2+x^2=0$

班级　　　　　　学号　　　　　　姓名　　　　　　序号

习题 11-2

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'-y\ln y=0$;

$xy'-y\ln y=\frac{xdy}{dx}-y\ln y=0$　　$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{1}{x}dx.$

$\therefore \ln(\ln y)=\ln x+\ln C$

$\therefore \ln y=Cx$

$\therefore y=e^{Cx}$

(6) $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$;

$\frac{e^y}{e^y-1}dy=-\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$\int\frac{e^y}{e^y-1}dy=\int-\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$\ln(e^y-1)=-\ln(e^x+1)+\ln C$

$\therefore (e^x+1)(e^y-1)=C$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(3) $\cos ydx+(1+e^{-x})\sin ydy=0$, $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$;

$\frac{dx}{1+e^{-x}}+\frac{\sin y}{\cos y}dy=0$

$\int\frac{-\sin ydy}{\cos y}=\int\frac{dx}{1+e^{-x}}\Rightarrow\int\frac{d\cos y}{\cos y}=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$

$\ln C_1\cos y=\ln(1+e^x)$　$\therefore \cos y=\frac{1+e^x}{C_1}$　$y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 代入

$\therefore C_1=2\sqrt{2}$　　$\therefore y=\arccos\frac{\sqrt{2}(1+e^x)}{4}.$

(5) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$, $y|_{x=0}=1$.

$\frac{xdx}{x^2-1}=\frac{ydy}{y^2+1}$

积分 $\frac{1}{2}\ln(x^2-1)=\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+C$

通解: $y=\sqrt{C(x^2-1)-1}$　　$y|_{x=0}=1$　　$\therefore C=-2$

$\therefore$特解 $y=\sqrt{-2(x^2-1)-1}$

3. 求下列微分方程的通解：

(2) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$；

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}+\frac{y}{2x}$　令 $\frac{y}{x}=u$　$\therefore x\frac{du}{dx}=\frac{1}{2u}+\frac{u}{2}$

$\frac{2u}{2+u}du=\frac{1}{x}dx$

$2u-4\ln(2+u)=\ln x+C$

(8) $(1+e^{-\frac{x}{y}})ydx+(y-x)dy=0$；

$(1+e^{-\frac{x}{y}})\frac{dx}{dy}=-\frac{1-x}{y}$　令 $u=\frac{x}{y}$ 则 $x=uy$

$\frac{dx}{dy}=\cancel{dy}\frac{du}{dx}y+u$　$(1+e^{-u})(\frac{ydu}{dy}+u)x=-(1-u)=u-1$

化简 $\frac{(1+e^{u})du}{dy}=-(e^{u}+u)$　即有 $\frac{1}{u+e^{u}}d(u+e^{u})=\frac{-dy}{y}$

积分 $\ln(u+e^{u})=-\ln y+C$　$\therefore u+e^{u}=\frac{C}{y}$　$\because u=\frac{x}{y}$

$\therefore ye^{\frac{x}{y}}+x=C$

4. 求下列微分方程的通解：

(3) $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+2xy=4x^2$；

$\cancel{(x^2+1)dy}$　$\frac{dy}{dx}+\frac{2xy}{x^2+1}=\frac{4x^2}{x^2+1}$　$P(x)=\frac{2x}{x^2+1}$　$Q(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$

$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2+1}dx}\cdot\left[\int\frac{4x^2}{x^2+1}\cdot e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}dx+C\right]$

$=(x^2+1)(\frac{4}{3}x^3+C)$

(10) $(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$.

$\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{y^2-6x}=0$　$\frac{dy}{y}=\frac{2}{6x-y^2}dx$.

$\cancel{\therefore \ln y=\int}$　$y=Ce^{-\int\frac{2}{y^2-6x}dx}$.

$\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}\cdot x=-\frac{y}{2}$

则 $x=e^{\int\frac{3}{y}dy}\left(\int-\frac{y}{2}e^{-\int\frac{3}{y}dy}dy+C\right)=y^3\left(\int-\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{y^3}dy+C\right)$

$=y^3(\frac{1}{2y}+C)=\frac{y^2}{2}+Cy^3$.

5. 下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $\frac{dy}{dx} - y\tan x = \sec x$，$y|_{x=0} = 0$；

$$y = e^{\int \tan x dx}\left[\int \sec x\, e^{-\int \tan x dx} dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{\cos x}(C + x)$$

当 $x=0$　$y=0$ 时　$C=0$　　$\therefore y = \frac{x}{\cos x}$

(5) $\frac{dy}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3} y = 1$，$y|_{x=1} = 0$.

$$\cancel{\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-2}{x^3} y}$$

$$\cancel{y = e^{3\ln x + \frac{1}{x^2} + C}}$$

$$\cancel{= x^3 e^{\frac{1}{x^2} + C}}$$

~~代入原方程~~

$$\cancel{x^3 e^{\frac{1}{x^2}+C}}$$

$$y = e^{-\int \frac{2-3x^2}{x^3} dx}\left[\int e^{\int \frac{2-3x^2}{x^3} dx} dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + Cx^3 e^{\frac{1}{x^2}}$$

当 $x=1$，$y=0$ 时　$C = -\frac{1}{2e}$

则 $2y = x^3(1 - e^{\frac{1}{x^2} - 1})$

6. 求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$；

两边乘 y^{-2} 得

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1} = (\cos x - \sin x)$$

令 $z = y^{-1}$

$$\frac{dz}{dx} - z = \sin x - \cos x$$

$$z = e^{-\int (-1) dx} \cdot \left[\int (\sin x - \cos x) \cdot e^{\int (-1) dx} dx + C\right]$$

$$= Ce^{x} - \sin x$$

$$\therefore y = \frac{1}{Ce^x - \sin x}$$

(4) $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$；

两边同时乘以 y^{-5}

令 $z = y^{-4}$　有　$\frac{dz}{dx} + (-4)(-1)z = (-4)x$

$P(x) = 4$　　$Q(x) = -4x$.

$$z = e^{-\int 4 dx} \cdot \left[\int (-4x) \cdot e^{\int 4 dx} dx + C\right]$$

$$= e^{-4x}\left[-\int 4x e^{4x} dx + C\right]$$

$$= Ce^{-4x} - x + \frac{1}{4}$$

$$\therefore y^{-4} = Ce^{-4x} - x + \frac{1}{4}$$

(5) $xdy-[y+xy^3(1+\ln x)]dx=0$;

$xdy=[y+xy^3(1+\ln x)]dx$

$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=y^3(1+\ln x)$

两边同时乘以 y^{-3}　$y^{-3}\frac{dy}{dx}-\frac{y^{-2}}{x}=1+\ln x$

$\frac{dz}{dx}+(-2)(-\frac{1}{x})z=(-2)(1+\ln x)$

$z=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\cdot[\int(-2-2\ln x)e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c]$

$=\frac{1}{x^2}[\int-2(1+\ln x)x^2dx+c]$

$=-\frac{2}{3}x(1+\ln x)+\frac{2}{9}x+cx^{-2}$

$\therefore\frac{x^2}{y^2}=-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}x^3\ln x+C$.

(6) $y'+\frac{2}{x}y=3x^2y^{\frac{4}{3}}$.

令 $z=y^{-\frac{1}{3}}$

则 $\frac{dz}{dx}-\frac{2}{3x}z=-x^2$

$\therefore z=e^{-\int-\frac{2}{3x}dx}(\int-x^2e^{\int-\frac{2}{3x}dx}dx+c)$

$=x^{\frac{2}{3}}(c-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}})$

$\therefore\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=Cx^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{7}x^3$

7. 求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{(x+y)^2}$;

令 $u=x+y$　$y=u-x$　$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$

$\therefore\frac{du}{dx}-1=\frac{4}{u^2}$

$\therefore$ ~~$\frac{du}{dx}=\frac{4+u^2}{u^2}$~~　$(1-\frac{4}{4+u^2})du=dx$

分离变量：~~$\frac{u^2}{4+u^2}du=dx$~~　两边积分：$\int(1-\frac{4}{4+u^2})du=\int dx$

$y-2\arctan u=x+C$

(6) $y'\cos y-\cos x\sin^2y=\sin y$.

$z=\sin y$　$\therefore\frac{dz}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$

$\frac{dz}{dx}-z^2\cos x=z$　$\therefore\frac{dz}{dx}-z=z^2\cos x$

令 $u=z^{-1}$　$\therefore\frac{du}{dx}+u=-\cos x$

$u=e^{-x}(\int-\cos x e^x dx+C_1)=e^{-x}[-\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{2}+C_1]$

$=-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+C_1e^{-x}$,

又 $u=\frac{1}{z}=\frac{1}{\sin y}$

$\therefore\frac{2}{\sin y}+\cos x+\sin x=Ce^{-x}$.

8. 判断下列方程中哪些是全微分方程，并求全微分方程的通解：

(2) $(2x^3 - xy^2)\mathrm{d}x + (2y^3 - x^2y)\mathrm{d}y = 0$;

$P = 2x^3 - xy^2 \quad Q = 2y^3 - x^2y \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$

∴是全微分方程 通解：$\int_0^x (2x^3 - xy^2)dx + \int_0^y (2y^3 - x^2y)dy = C$

∴ $\frac{x^4+y^4}{2} - x^2y^2 = C$

(3) $e^y\mathrm{d}x + (xe^y - 2y)\mathrm{d}y = 0$;

令 $P = e^y \quad Q = xe^y - 2y$ 又 $\frac{\partial P}{\partial y} = e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}$

∴是全微分方程

通解：$u(x,y) = \int_0^x e^0 dx + \int_0^y (xe^y - 2y)dy = C$

∴ $xe^y - y^2 = C$

(5) $\sin(x+y)\mathrm{d}x + [x\cos(x+y)](\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) = 0$;

$P = \sin(x+y) + x\cos(x+y) \quad Q = x\cos(x+y)$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos(x+y) + (-x\sin(x+y)) = \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos(x+y) + (-x\sin(x+y))$

∴是全微分方程 通解：$\int_0^x [\sin(x+y) + x\cos(x+y)]dx + \int_0^y x\cos(x+y)dy = C$

∴ $x\sin(x+y) = C$

(7) $(1+e^{2\theta})\mathrm{d}\rho + 2\rho e^{2\theta}\mathrm{d}\theta = 0$; $P = 1+e^{2\theta} \quad Q = 2\rho e^{2\theta}$

$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 2e^{2\theta} = \frac{\partial Q}{\partial \rho}$ ∴是全微分方程

$\int_0^\rho 2d\rho + \int_0^\theta 2\rho e^{2\theta} d\theta = C$

∴ $\rho(e^{2\theta}+1) = C$

(8) $(x^2 + y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = 0$;

$P = x^2 + y^2 \quad Q = xy$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y$ ∴此方程不是全微分方程.

(10) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$.

$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos y-\sin x$　$\frac{\partial N}{\partial x}=\cos y-\sin x$

∴是全微分方程

通解为 $x\sin y+y\cos x=C$

9. 用观察法求出下列方程的积分因子，并求其通解：

(3) $(x^2+y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$;

$x^2dx+ydx-xdy=0$

同时乘以积分因子 $\frac{1}{x^2}$

$dx+\frac{ydx-xdy}{x^2}=0$

即 $dx-d\frac{y}{x}=0$

$x-\frac{y}{x}=C$

(4) $(1-x^2y)\mathrm{d}x+x^2(y-x)\mathrm{d}y=0$.

$dx-x^2ydx+x^2ydy-x^3dy=0$

$\frac{1}{x^2}dx-ydx+ydy-xdy=0$

~~$d(-\frac{1}{x})+d(\frac{y^2}{2})+d(-xy)=0$~~

通解 $-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{2}-xy=0$.

11. 镭的衰变有如下规律：镭衰变的速度与它的现存量 R 成正比，由经验材料得知，镭经过 1600 年后，只剩余原始量 R_0 的一半.试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

$\frac{dR}{dt}=-\lambda R$

$\frac{dR}{R}=-\lambda dt$

两边积分得 $\ln R=-\lambda t+C_1$

$\therefore R=Ce^{-\lambda t}$ $(C=e^{C_1})$

当 $t=0$ 时，$R=R_0$　$\therefore R_0=Ce^0=C$

$\therefore R=R_0e^{-\lambda t}$

当 $t=1600$ 时

$R=\frac{1}{2}R_0$　$\therefore \frac{1}{2}R_0=R_0e^{-1600\lambda}$

$\therefore \lambda=\frac{\ln 2}{1600}$

$\therefore R=R_0e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}$

$=R_0e^{-0.000433t}$

班级　　　　学号　　　　姓名　　　　序号

17. 设曲线积分 $\int_L xf(x)dx+[2xf(x)-x^2]dy$ 在右半平面($x>0$)内与路径无关，其中 $f(x)$ 可导，且 $f(1)=1$，求 $f(x)$.

∵积分与路径无关得 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

∴ $2f(x)+2xf'(x)-2x=f(x)$

令 $f(x)=u$ 方程变为 $u'+\frac{u}{2x}=1$, $u|_{x=1}=1$

通解为 $u=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right)=\frac{2}{3}x+\frac{C}{\sqrt{x}}$

将 $u|_{x=1}$ 代入，得 $C=\frac{1}{3}$

∴ $f(x)=u=\frac{2}{3}x+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

18. 设 $f(x)$ 为可微函数，求方程 $f(x)=e^x+e^x\int_0^x[f(t)]^2dt$ 的解.

两边求导将 $f(x)$ 带入得 $f'(x)=f(x)+e^x[f(x)]^2$

∴ $\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{1}{f(x)}=e^x$

令 $u=\frac{1}{f(x)}$ 即 $u'=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$

∴ $u'+u=-e^x$ 通解 $u=Ce^{-x}-\frac{1}{2}e^x$

又 $f(0)=1$ ∴ $f(x)=\frac{2}{3e^{-x}-e^x}$

班级　　　　　学号　　　　　姓名　　　　　序号

习题 11-3

1. 求下列微分方程的通解：

(2) $y'''=xe^x$;

$y''=\int xe^x dx+C_1=(x-1)e^x+C_1$

$y'=\int[(x-1)e^x+C_1]dx+C_2$
$=(x-2)e^x+C_1x+C_2$

$y=\int[(x-2)e^x+C_1x+C_2]dx+C_3$
$=(x-3)e^x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$

(3) $y''=y'+x$;

~~设 $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}$ 方程化为 $\frac{dp}{dx}=p+x$~~

$y''-y'=x$　$r^2-r=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=1 \\ r_2=0 \end{cases}$

设 $Q_m(x)=x(ax+b)$

$-2ax+2a-b=x$

$\begin{cases} -2a=1 \\ 2a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}$　通解 $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$

(4) $y''=1+(y')^2$;

$y'=p(x)$　$y''=p'(x)$

$p'=1+p^2$

$\frac{dp}{1+p^2}=dx$　　$p=\tan(x+C_1)=y'$

$y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$

(9) $y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$.

$\frac{dp}{dy}+\frac{2p}{1-y}=0 \Rightarrow \frac{1}{2p}dp=\frac{1}{y-1}dy \Rightarrow p=C_1$

$\frac{dy}{dx}=C_1(y-1)^2$　$\frac{dy}{(y-1)^2}=C_1dx$

$\Rightarrow \frac{-1}{y-1}=C_1x+C_2 \Rightarrow y=1-\frac{1}{C_1x+C_2}$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'''=e^{ax}$, $y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$;

∵ $y'''=e^{ax}$, $x=1$, $y''=0$ 积分得 $y''=\int_1^x y'''dx=\frac{1}{a}(e^{ax}-e^a)$

∵ $x=1$时 $y'=0$ ∴ $y'=\int_1^x y''dx=\int_1^x\frac{1}{a}(e^{ax}-e^a)dx=\frac{1}{a^2}e^{ax}-\frac{e^a}{a}x+\frac{e^a}{a}(1-\frac{1}{a})$

又∵$x=1$时 $y=0$ 再积分得

$y=\int_1^x y'dx=\int_1^x[\frac{1}{a^2}e^{ax}-\frac{e^a}{a}x+\frac{e^a}{a}(1-\frac{1}{a})]dx$
$=\frac{1}{a^3}e^{ax}-\frac{e^a}{2a}x^2+\frac{e^a}{a^2}(a-1)x+\frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2)$

(2) $y^3y''+1=0$, $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$;

将原方程改写成 $y''+\frac{1}{y^3}=0$ 两端乘$2y'$ 得 $2y'y''+\frac{2y'}{y^3}=0$

即 $(y'^2-\frac{1}{y^2})'=0$　∴ $y'^2-\frac{1}{y^2}=C_1$

代入 $y=1$ $y'=0$ 得 $C_1=-1$　∴ $y'^2=\frac{1}{y^2}-1=\frac{1-y^2}{y^2}$　$y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$

分离变量 $\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx$　　积分得 $-\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$

代入 $x=1$, $y=1$ 得 $C=\mp1$.　∴ $-\sqrt{1-y^2}=\pm(x-1)$

两边平方得 $x^2+y^2=2x$

∵在点 $x=1$处 $y=1$　∴ $x=1$的某邻域内 $y>0$ ∴特解可表示为 $y=\sqrt{2x-x^2}$

班级　　　　学号　　　　姓名　　　　序号

习题 11-3

1. 求下列微分方程的通解：

(2) $y'''=xe^x$;

$y''=\int xe^x dx+C_1=(x-1)e^x+C_1$

$y'=\int[(x-1)e^x+C_1]dx+C_2$

$=(x-2)e^x+C_1x+C_2$

$y=\int[(x-2)e^x+C_1x+C_2]dx+C_3$

$=(x-3)e^x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$

(3) $y''=y'+x$;

~~设 $y'=p$，$y''=\frac{dp}{dx}$ 方程化为 $\frac{dp}{dx}=p+x$~~

$y''-y'=x$ 　 $r^2-r=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=1 \\ r_2=0 \end{cases}$

设 $Q_m(x)=x(ax+b)$

$-2ax+2a-b=x$

$\begin{cases} -2a=1 \\ 2a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}$ 　通解 $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$

(4) $y''=1+(y')^2$;

$y'=p(x)$ 　$y''=p'(x)$

$p'=1+p^2$

$\frac{dp}{1+p^2}=dx$ 　 $p=\tan(x+C_1)=y'$

$y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$

(9) $y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$.

$\frac{dp}{dy}+\frac{2p}{1-y}=0 \Rightarrow \frac{1}{2p}dp=\frac{1}{y-1}dy \Rightarrow p=C_1$

$\frac{dy}{dx}=C_1(y-1)^2$ 　 $\frac{dy}{(y-1)^2}=C_1dx$

$\Rightarrow \frac{-1}{y-1}=C_1x+C_2 \Rightarrow y=1-\frac{1}{C_1x+C_2}$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'''=e^{ax}$，$y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$;

又 $y'''e^{ax}$，$x=1$，$y''=0$ 积分得 $y''=\int_1^x y'''dx=\frac{1}{a}(e^{ax}-e^a)$

又 $x=1$ 时 $y'=0$ ∴ $y'=\int_1^x y''dx=\int_1^x\frac{1}{a}(e^{ax}-e^a)dx=\frac{1}{a^2}e^{ax}-\frac{e^a}{a}x+\frac{e^a}{a}(1-\frac{1}{a}$

又 $x=1$ 时 $y=0$ 再积分得

$y=\int_1^x y'dx=\int_1^x[\frac{1}{a^2}e^{ax}-\frac{e^a}{a}x+\frac{e^a}{a}(1-\frac{1}{a})]dx$

$=\frac{1}{a^3}e^{ax}-\frac{e^a}{2a}x^2+\frac{e^a}{a^2}(a-1)x+\frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2)$

(2) $y^3y''+1=0$，$y|_{x=1}=1$，$y'|_{x=1}=0$;

将原方程改写成 $y''+\frac{1}{y^3}=0$ 两端乘 $2y'$ 得 $2y'y''+\frac{2y'}{y^3}=0$

即 $(y'^2-\frac{1}{y^2})'=0$ 　∴ $y'^2-\frac{1}{y^2}=C_1$

代入 $y=1$ $y'=0$ 得 $C_1=-1$ 　∴ $y'^2=\frac{1}{y^2}-1=\frac{1-y^2}{y^2}$ 　 $y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$

分离变量 $\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx$ 　积分得 $-\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$

代入 $x=1$，$y=1$ 得 $C=\mp 1$ 　∴ $-\sqrt{1-y^2}=\pm(x-1)$

两边平方得 $x^2+y^2=2x$

又在点 $x=1$ 处 $y=1$ ∴ $x=1$ 的某邻域内 $y>0$ ∴ 特解可表示为 $y=\sqrt{2x-x^2}$

(3) $y''+(y')^2=1$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=0$；

令 $y'=p$ 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$ 原方程变为 $p\frac{dp}{dy}+p^2=1$ 分离变量得 $\frac{p\,dp}{1-p^2}=dy$

$\because y=0, p=0$ 积分 $\int_0^p \frac{p\,dp}{1-p^2}=\int_0^y dy \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(1-p^2)=y$ 即 $p=\pm\sqrt{1-e^{-2y}}$

$\therefore \frac{dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm dx$ $\because x=0, y=0$ 积分 $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm\int_0^x dx \Rightarrow \int_0^y \frac{d(e^y)}{\sqrt{e^{2y}-1}}=\pm\int_0^x dx$

$\therefore \ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x$ $\therefore e^y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $y=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

(6) $xy''+x(y')^2-y'=0$，$y|_{x=2}=2$，$y'|_{x=2}=1$.

~~令~~ 令 $u=y'$

$\frac{du}{dx}x+xu^2-u=0$ $u=\frac{1}{x+c}$

$\frac{du}{dx}x+xu^2=0$ $-\frac{x}{(x+c)^2}\cdot\frac{dc}{dx}=u$

$\frac{1}{u}=x+c$ $\therefore \frac{1}{y'}=x+c$ $\because x=2, y'=1$ $\therefore C=$

3. 求方程 $y''+2x(y')^2=0$ 的通过点 $M(0,1)$ 且在点 M 处与直线 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 相切的积分曲线.

所给方程中不显含 y，属于 $y''=f(x,y')$ 型

$\because y(0)=1$ $y'(0)=-\frac{1}{2}$ 令 $y'=p$, $y''=p'$ 代入原方程

$p'+2xp^2=0$ 分离变量 $\frac{dp}{dx}+2xp^2=0$, $-\frac{dp}{p^2}=2x\,dx$

两边积分得 $\frac{1}{p}=x^2+C_1$ $\because y(0)=1$ $y'(0)=-\frac{1}{2}=p(0)$ $\therefore c=-2$

$\therefore$ 即 $\frac{1}{x^2-2}=y'$ 两边积分 $y=\int\frac{1}{x^2-2}dx+C$

4. 设有质量为 m 的物体，在空中由静止下落，如果空气的阻力为 $R=c^2v^2$ (其中 c 为常数，c 为物体运动的速度)，试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系.

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt}=mg-c^2v^2 \\ s|_{t=0}=v|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$\frac{m\,dv}{mg-c^2v^2}=dt$

两边积分

$\ln\left|\frac{cv+\sqrt{mg}}{cv-\sqrt{mg}}\right|=kt+C_1$, $k=\frac{2c\sqrt{g}}{\sqrt{m}}$

由 $v|_{t=0}=0$ 得

$C_1=0$, $\ln\left|\frac{cv+\sqrt{mg}}{cv-\sqrt{mg}}\right|=kt$, 即 $\frac{cv+\sqrt{mg}}{cv-\sqrt{mg}}=e^{kt}$

因为 $mg>c^2v^2$，故 $cv+\sqrt{mg}=(\sqrt{mg}-cv)e^{kt}$

即 $cv(1+e^{kt})=\sqrt{mg}(1-e^{kt})$

或 $\frac{ds}{dt}=-\frac{\sqrt{mg}}{c}\cdot\frac{1-e^{kt}}{1+e^{kt}}$

$s=-\frac{\sqrt{mg}}{ck}\ln\frac{1+e^{kt}}{1+e^{kt}}+C_2$

习题 11-4

2. 验证：$y_1=\cos\omega x$，$y_2=\sin\omega x$ 都是方程 $y''+\omega^2y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

(1) $y_1=\cos\omega x$，$y_2=\sin\omega x$ 都是方程

代入 $y''+w^2y=-w^2\cos wx+w^2\cos wx=0$ ∴ y_1是该方程的解

y_2代入 $y''+w^2y=-w^2\sin wx+w^2\sin wx=0$

∴ y_2也是该方程的解.

又∵ $\frac{y_2}{y_1}=\frac{\sin wx}{\cos wx}=\tan wx\neq k$ ∴ y_1与y_2线性无关

∴ 通解 $y=C_1\cos wx+C_2\sin wx$.

3. 验证：

(1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ 是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解；

记 $y_1=e^x$，$y_2=e^{2x}$，$y^*=\frac{1}{12}e^{5x}$

则 $y_1''-3y_1'+2y_1=e^x-3e^x+2e^x=0$ ∴ y_1与y_2是原方程对应的齐次

$y_2''-3y_2'+2y_2=4e^{2x}-6e^{2x}+2e^{2x}=0$ 方程的解，y_1与y_2线性无关

又∵ $y^{*''}-3y^{*'}+2y^*=\frac{25}{12}e^{5x}-\frac{15}{12}e^{5x}+\frac{2}{12}e^{5x}=e^{5x}$

∴ y^*是原方程的一个特解

∴ $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ 是原方程通解

(2) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$ 是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解；

$y''+9y=0$ 的通解

$Y(x)=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

记 $y^*=\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$

则 $y^{*'}=\frac{1}{32}(5\cos x-4x\sin x)$，$y^{*''}=\frac{1}{32}(-4x\cos x-9\sin x)$.

$y^{*''}+9y^*=\frac{1}{32}(-4x\cos x-9\sin x)+\frac{9}{32}(4x\cos x+\sin x)=x\cos x$

∴ y^*是原方程的一个特解

∴ $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$是方程$y''+9y=x\cos x$的通解

习题 11-5

1. 求下列微分方程的通解：

(7) $y^{(4)}-y=0$；

特征方程 $\lambda^4-1=0$

特征根 $\lambda_{1,2}=\pm 1$

$\lambda_{3,4}=\pm i$

通解：$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$

(9) $y^{(4)}-2y'''+y''=0$.

$r^4-2r^3+r^2=0$　　$r_{1,2}=0$，$r_{3,4}=1$

∴通解 $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(3) $y''-3y'-4y=0$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=-5$；

$r^2-3r-4=0$　　$(r+1)(r-4)=0$，$r_1=-1$，$r_2=4$

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$，$y'=-C_1e^{-x}+4C_2e^{4x}$

$y(0)=0$，$y'(0)=-5$ 代 得

$\begin{cases}C_1+C_2=0\\-C_1+4C_2=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\C_2=-1\end{cases}$

特解 $y=e^{-x}-e^{4x}$

(6) $y''-4y'+13y=0$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=3$.

$r^2-4r+13=0$　　$r=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm 3i$

$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$

$y'=e^{2x}[(2C_1+3C_2)\cos 3x+(2C_2-3C_1)\sin 3x]$

将 $y(0)=0$，$y'(0)=3$ 代入，得 $\begin{cases}C_1=0\\C_2=1\end{cases}$　∴特解 $y=e^{2x}\sin 3x$

班级　　　　学号　　　　姓名　　　　序号

习题 11-6

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $2y''+y'-y=2e^{x}$；

$2r^2+r-1=0$　　$r_1=-1$　　$r_2=\frac{1}{2}$　　$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}$

$f(x)=2e^x$　$\lambda=1$ 不是特征方程的根　$\therefore k=0$.

$\therefore y^*=Ae^x$　代入方程 $A=1$　$\therefore y^*=e^x$　$\therefore$ 通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$

(4) $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$；

$y''+3y'+2y=0$　　$r^2+3r+2=0$　　$r=-1$ 或 -2

$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$　　$f(x)=3xe^{-x}$　　$\lambda=-1$ 单根

$y^*=x(b_1x+b_2)e^{-x}$

代入解得 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(\cancel{\ }\frac{3}{2}x^2-3x)e^{-x}$

(5) $y''-2y'+5y=e^{x}\sin 2x$；

$r^2-2r+5=0$　　$r=1\pm2i$

通解 导 $Y=e^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$

$f(x)=e^x\sin2x$　　　$y^*=xe^x(a\cos2x+b\sin2x)$

代入方程解得 $y=e^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos2x$

(10) $y''-y=\sin^2 x$.

$r^2-1=0$　　~~$r=0$~~　$r_A=\pm1$　　通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

$f(x)=\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2x$　　　特解 $y_1^*=-\frac{1}{2}$.

又 $\omega i=2i$ 不是特征根　故设方程 $y''-y=\frac{1}{2}\cos2x$ 有特解

$y_2^*=b\cos2x+c\sin2x$

计算 $y_2^{*\prime}$，$y_2^{*\prime\prime}$ 代入并比较系数　$b=\frac{1}{10}$，$c=0$

$\therefore y_2^*=\frac{1}{10}\cos2x$　　　$y^*=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos2x$

$\therefore$ 通解 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos2x$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(4) $y''-y=4xe^{x}$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$

$r^2-1=0 \quad r_1=1 \quad r_2=-1 \qquad \bar{y}=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$

$\lambda=1$ 单根　$y^*=x(ax+b)e^{x}=(ax^2+bx)e^{x}$

$a=1, b=-1 \qquad \therefore y^*=(x^2-x)e^{x}$

$\therefore$ 通解　$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+x(x-1)e^{x} \qquad y'=C_1e^{x}-C_2e^{-x}+(x^2+x-1)e^{x}$

$y(0)=0 \quad y'(0)=1$ 得　$C_1=1 \quad C_2=-1$

特解　$y=e^{x}-e^{-x}+x(x-1)e^{x}$.

4. 一链条悬挂于钉子上，启动时一端离开钉子 8m，另一端离开钉子 12m，若摩擦力为 1m 长的链条所受的重力，求链条滑下来所需要的时间.

设在时刻t时，链条上较长一段垂下 x m，线密度 ρ，

$F=x\rho g-(20-x)\rho g-\rho g=2\rho gx-21\rho g$

$20\rho x''=2\rho g x-21\rho g \qquad x''-\frac{g}{10}x=-1.05g$

$x=C_1e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10.5$

$x(0)=12$ 及 $x'(0)=0$ 得　$C_1=C_2=\frac{3}{4}$

$x=\frac{3}{4}\left(e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}\right)+10.5 \qquad x=20$ 时 $\frac{3}{4}\left(e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}\right)=9.5$

$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left(\frac{19}{3}+\frac{4\sqrt{22}}{3}\right)s$

5. 设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足

$$\varphi(x)=e^{x}+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x\varphi(t)dt,$$

求 $\varphi(x)$.　等式两边对x求导得　$\varphi'(x)=e^{x}-\int_0^x\varphi(t)dt$

$\varphi''(x)=e^{x}-\varphi(x)$　即 $\varphi''(x)+\varphi(x)=e^{x}$

$r^2+1=0 \qquad r_{1,2}=\pm i$

通解 $\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

$\varphi^*(x)=\frac{1}{2}e^{x}$ 特解　$\therefore \varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^{x}$

又由等式知 $\varphi(0)=1 \quad \varphi'(0)=1 \qquad \therefore C_1=C_2=\frac{1}{2}$

$\therefore \varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^{x})$

班级 学号 姓名 序号

习题 11-7

求下列欧拉方程的通解：

2. $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{2}{x}$；

$x^2y''-xy'+y=2x$ 令 $x=e^t$ 此欧拉方程化为.

$D(D-1)y-Dy+y=2e^t$ $D^2y-2Dy+y=2e^t$

$r^2-2r+1=0$ $r_1=r_2=1$

$\therefore Y=(C_1+C_2t)e^t$ $f(t)=2e^t$ $\lambda=1$

$\therefore y^*(t)=at^2e^t$

$\therefore y^{*\prime}=a(t^2+2t)e^t$ $y^{*\prime\prime}=a(t^2+4t+2)e^t$

$a=1$ $y^*=t^2e^t$ $\therefore y(t)=(C_1+C_2t)e^t+t^2e^t$

$=(C_1+C_2\ln|x|)x+x\ln^2|x|$

4. $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2x-2\ln x$；

令 $x=e^t$ $[D(D-1)-2D+2]y=t^2-2t$ 即 $(D^2-3D+2)y=t^2-2t$.

$r^2-3r+2=0$ $r_1=1$，$r_2=2$ 通解 $Y=C_1e^t+C_2e^{2t}$.

又 $f(t)=t^2-2t$，$\lambda=0$ 不是特征方程的根

可令 $y^*=at^2+bt+c$ 是特解 $a=b=\frac{1}{2}$ $c=\frac{1}{4}$

即 $y^*=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$

通解 $y=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$

$y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}\ln^2x+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}$.

6. $x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$.

令 $x=e^t$ $[D(D-1)-D+4]y=e^t\sin t$

$(D^2-2D+4)y=e^t\sin t$ $r^2-2r+4=0$ $r_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i$

$Y=e^t[C_1\cos(\sqrt{3}t)+C_2\sin(\sqrt{3}t)]$

又 $f(t)=e^t\sin t$，$\lambda+i\omega=1+i$ 不是特征方程的根

$y^*=e^t(a\cos t+b\sin t)$ $a=0$ $b=\frac{1}{3}$ $\therefore y^*=\frac{e^t}{2}\sin t$

$y=e^t[C_1\cos(\sqrt{3}t)+C_2\sin(\sqrt{3}t)]+\frac{e^t}{2}\sin t$

$y=x[C_1\cos(\sqrt{3}\ln x)+C_2\sin(\sqrt{3}\ln x)]+\frac{x}{2}\sin(\ln x)$.

习题 11-8

1. 求下列微分方程组的通解：

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=-x+y+3 \quad ① \\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=x+y-3 \quad ② \end{cases}$；

①+②　①−②　$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=x+3 \end{cases}$　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=3$

$r^2+1=0$　$r=\pm i$　$x=C_1\cos t+C_2\sin t$

$x^*=3$

$\therefore \begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\sin t+3 \\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+y=t \\ 5x+\dfrac{dy}{dt}+3y=t^2 \end{cases}$.

$\begin{cases} (D+2)x+(D+1)y=t \\ 5x+(D+3)y=t^2 \end{cases} \Rightarrow (D^2+1)y=2t^2-3t.$

$r_{1,2}=\pm i$　令 $y^*=at^2+bt+c$

$a=2,\ b=-3\quad c=-4$

$\therefore y=C_1\cos t+C_2\sin t+2t^2-3t-4.$

$x=\frac{1}{5}[t^2-(D+3)y]$

$x=-\dfrac{3C_1+C_2}{5}\cos t+\dfrac{C_1-3C_2}{5}\sin t-t^2+t+3.$