1. 引例：设一条不均匀的金属曲线 L，L 上点 (x,y) 处的线密度为 $\mu(x,y)$ 连续，求 L 的质量.

①大化小：将 L 任意分成 n 个小弧段 L_i，用 Δs_i 表示 L_i 的弧长，$i=1,2,\cdots,n$.

②常代变：$\forall(\xi_i,\eta_i)\in L_i \Rightarrow m_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.

③近似和：$m=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$

④ 取极限

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$

例1 求 $\oint_L (x+y)\,ds$，其中 L 是以 $O(0,0)$，$A(1,0)$，及 $B(0,1)$ 为顶点的三角形

练习1：设L为$x^2+y^2=1$，$y=x$及x轴在第一象限内围成的扇形的整个边界，则$\oint_L \cos\sqrt{x^2+y^2}\,ds=$ ______

练习2：$\oint_L (x^2+y^2)\,ds=$ ______. 其中L：$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

练习3：设L：$x^2+y^2=-2x$，则$\oint_L (x^3y+y^3)\,ds=$ ______.

练习4：设L：$y=-\sqrt{1-x^2}$，则$\int_L (xy^2+x^2+y^2)\,ds=$ ______

例5：设 $L: x^2+y^2=1$ 则 $\oint_L (xy+x^2)\,ds=$ ______

例6：求 $\int xy\,ds$，$L:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$（第一象限，$a>b>0$）

例12. 求柱面 $x^2+y^2=2x$ 介于 xoy 面与 $z=x^2+y^2$ 之间的面积 S.

例3：求半径为a，中心角为2φ的均匀圆弧的重心.

例14 求 $\oint_{\Gamma} x^2 ds$ 其中Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

练习: 设Γ: $\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 求 $\oint_{\Gamma} x^2 ds$.

上次课总结：1. 计算技巧：① $\int_L ds = L$的弧长 ② 对称性

③ 轮换对称性

2. 计算：① 平面曲线弧：$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy$$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$$

② 空间曲线弧：$\int_{\Gamma} f(x, y, z)\,ds$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

3. 物理应用：① 重心 $(\bar{x}, \bar{y})$　$\bar{x} = \dfrac{\int_L x\mu(x,y)\,ds}{\int_L \mu(x,y)\,ds}$　$\bar{y} = \dfrac{\int_L y\mu(x,y)\,ds}{\int_L \mu(x,y)\,ds}$

② 转动惯量：$I_x = \int_L y^2 \mu(x,y)\,ds$　$I_y = \int_L x^2 \mu(x,y)\,ds$

注　$\int_L \underbrace{f(x,y)}_{\geq 0}\,ds$ 的几何意义

1、<u>引例</u>：有一条曲线 L，一端为 A，另一端为 B，质点在

变力 $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 的作用下沿着 L

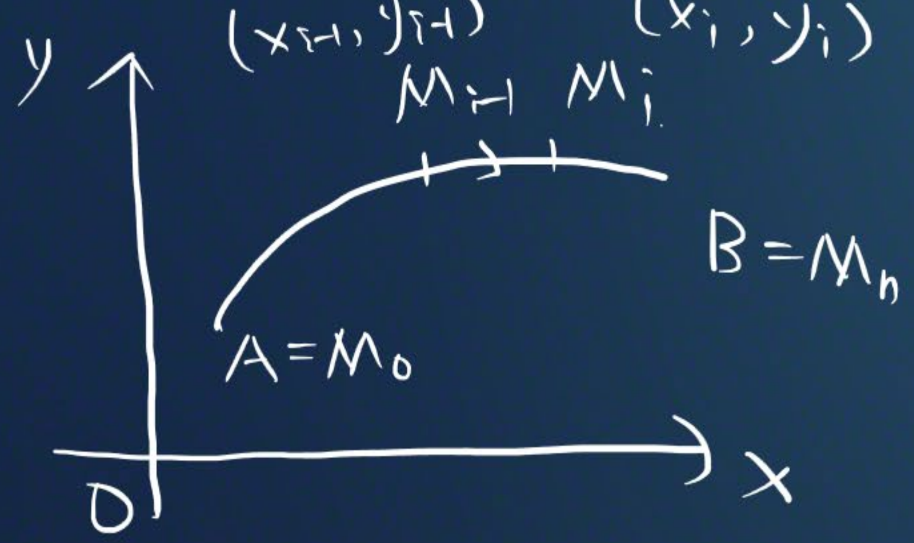
从点 A 移动到点 B，求此过程中，$\vec{F}(x,y)$ 对

质点所做的功 W.

(1) 大化小：用 L 上的点 $M_1, \cdots, M_{n-1}$ 将 L 分成 n 个

有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$　　$i=1,2,\cdots,n$

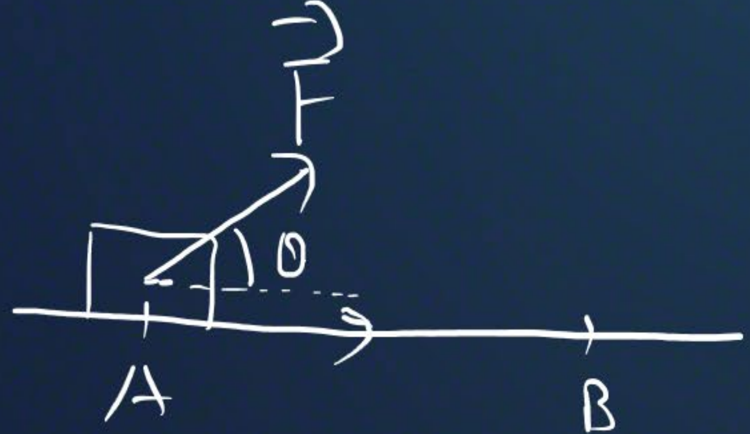
$M_0=A$　　$M_n=B$



记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $\quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$

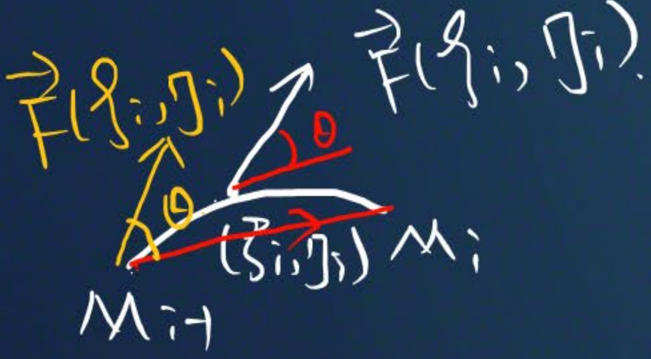
$$\Rightarrow \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$$

(2) 常代常: 恒力做功: $W = |\vec{F}| \cos\theta \, |\overrightarrow{AB}|$.



$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\forall (\xi_i,\eta_i)\in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i} \Rightarrow W_i \approx |\vec{F}(\xi_i,\eta_i)|\,|\overrightarrow{M_{i-1}M_i}|\cos\theta$$



$$= \vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$$

$$= P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

(3) 近似和: $W=\sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$

(4) 取极限: $W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$.

例11 在力场 $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}+(x+y+z)\vec{k}$ 的作用下，质点沿螺旋线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=\frac{ct}{2\pi}$ 由点 $A(a,0,0)$ 移动至点 $B(a,0,c)$，求 $\vec{F}$ 所做的功 W

例12：求 $\int_L xy^2dx+(x+y)dy$，其中L为

(1) $y=x^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段.

(2) 有向折线 $\overrightarrow{OBA}$，其中 O, B, A 三点的坐标分别为 $O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(0,1)$.

练习1：求 $\int_L y^2 dx$，其中 L 为：

(1) 半径为 a，圆心在原点，按逆时针方向绕行的上半圆周。

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段。

练习2：求 $\int_L 2xy\,dx + x^2 dy$，其中 L 为

(1) $y=x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧。

(2) $x=y^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧。

(3) $\overrightarrow{OAB}$，$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$

例13：求 $\int_L xy\,dx$，其中L为 $y^2=x$ 上从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段.

例14：把 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 化为第一型曲线积分，

其中 L 为沿 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$。

例5：求 $\int_{\overrightarrow{PQ}} \vec{A} \cdot \vec{e}_{\tau}\, ds$，其中 $\vec{A} = \{x^2, 3y^2 z, -x^2 y\}$

$\overrightarrow{PQ}$ 是由点 $P(0,0,0)$ 到点 $Q(3,2,1)$ 的直线段.

§9.3：

例11 求 $\oint_L e^{y^2}dx + xdy$，其中 L 为 $4x^2+y^2=8x$

L 的方向为正方向

例4：求 $\oint_L \frac{x\,dy - y\,dx}{9x^2+16y^2}$，其中 L 是不自相交，绕原点的光滑闭曲线，方向为顺时针方向.

例1：求 $\oint_L \frac{\ln(x^2+y^2)dx+(x^2+y^2)dy}{x^2+y^2+2x}$，其中 L：

$(x+1)^2+y^2=4$ 正向

<u>例13</u>、求$\int_L (x^2-2y)dx-(x+y^2)dy$，其中L为$y=\sqrt{2x-x^2}$上点A(0,0)到B(2,0)的一段弧.

<u>练习2</u>：求$\int_L (e^x\sin y-8y)dx+(e^x\cos y+y^4)dy$ 其中L：$x^2+y^2=ax$的上半圆周由点O(0,0)到点A(a,0)的那段弧 (a>0).

定理2：设开域 G 为一单连通区域，若 $P(x,y)$，$Q(x,y)\in C^{1}(G)$，则 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关（或 $\forall$ 闭曲线 $L\in G$，$\oint_L Pdx+Qdy=0$）

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ 在 } G \text{ 内恒成立.}$$

例14 求 $\int_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$，其中L是从点A(-1, 0)

沿 $y=1-|x|$ 到点B(1, 0)的折线段.

练习3：求 $\int_{\overset{\frown}{OAB}} (e^y+x)\,dx + (xe^y-2y)\,dy$，$\overset{\frown}{OAB}$ 是过

O(0, 0)，A(0, 1)，B(1, 2)三点的圆弧段.

定理3：设开区域 G 为一单连通区域，若 $P(x,y)$，$Q(x,y)\in C^1(G)$，则 $Pdx+Qdy$ 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分（即 $du(x,y)=Pdx+Qdy$）$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ 在 } G \text{ 内恒成立.}$$

例5 问 $(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$ 是否为全微分？

如是，求一个原函数 $u(x,y)$

练习4：判断 $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy$ 是否为全微分？

并求 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy$

上次课总结：1. ① $\int_{-L} P\,dx + Q\,dy = -\int_{L} P\,dx + Q\,dy$

② 不能用对称性与轮换对称性

③ 物理意义：变力沿曲线做功.

2. ① $\int_{L} P\,dx + Q\,dy = \int_{\alpha(起)}^{\beta(终)} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\,dt$.

② $\int_{L} P\,dx + Q\,dy = \int_{a}^{b} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\,y'(x)]\,dx$.

③ $\int_{L} P\,dx + Q\,dy = \int_{c}^{d} [P(x(y), y)\,x'(y) + Q(x(y), y)]\,dy$.

④ $\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} \big[P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) +$

$Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) +$

$R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t) \big]\,dt.$

3. ① $\int_{L} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L} P\,dx + Q\,dy = \int_{L} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,ds$

$= \int_{L} \vec{F} \cdot \vec{e}_{\tau}\,ds$

② $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$

$= \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{e}_{\tau}\,ds.$

上次课总结：1、Green公式： $P,Q\in C^1(D)\Rightarrow$

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]d\sigma$$

或

$$\oint_{-L} Pdx+Qdy=-\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]d\sigma$$

2、
- 求闭曲线的第二型曲线积分：即 $\oint_L Pdx+Qdy$
  - $P,Q\in C^1(D)\Rightarrow$ 直接用
  - $P,Q\notin C^1(D)\Rightarrow$ 挖洞再用
- 求开曲线的第二型曲线积分 即 $\int_L Pdx+Qdy$
  - $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$：补直线，再用
  - $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$：路径无关