1. **引例**：假设一个均匀的金属曲面 Σ，在曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的面密度为 $\mu(x,y,z)$，求 Σ 的质量 m.

(1) **大化小**：将 Σ 任意分成 n 个小曲面 Σ_i，用 ΔS_i 表示 Σ_i 的面积. $i=1,2,\cdots,n$

(2) **常代变**：$\forall (x_i,y_i,z_i)\in\Sigma_i \Rightarrow m_i \approx \mu(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$

(3) **近似和**：$m=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \approx \sum\limits_{i=1}^{n}\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$

(4) 近似和： $m=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$;

例1. 求 $\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的立体表面

练习1：求 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 Σ 为 $y+z=5$ 被 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分.

练习2：1. 求 $\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}$ 其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被 $z=h$ $(0<h<a)$ 截出的上部分.

2、若 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被 $z=\pm h$ 截出的上下两部分，则

(1) $\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}=$ ______ (2) $\iint_{\Sigma}\frac{dS}{|z|}=$ ______

例3：求 $\oiint_{\Sigma}(x+y+z+1)^2 dS$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$

$(R>0)$

例12 求面密度为常数ρ的半球壳$x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$对z轴的转动惯量.

练习4：求$z=\sqrt{x^2+y^2}$被$x^2+y^2=2x$所截部分的面积S.

练习5：求$\iint_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)\,dS$，其中$\Sigma$：$x^2+y^2+z^2=a^2$

$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$

2、曲面的投影：$\vec{e}_n=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 表示曲面Σ上任意点的单位法向量，ΔS 为Σ上的一小片曲面，ΔS 在三个坐标面上的投影分别记为 $(\Delta S)_{xy}$，$(\Delta S)_{yz}$，$(\Delta S)_{xz}$，投影面积分别记为 $(\Delta\sigma)_{xy}$，$(\Delta\sigma)_{yz}$，$(\Delta\sigma)_{xz}$.

(1) 由 $z=z(x,y)$ 表示的曲面分为上，下两侧：

$\cos\gamma>0 \Rightarrow \vec{n}$ 向上，$\cos\gamma<0 \Rightarrow \vec{n}$ 向下

此时，$\cos\gamma>0 \Rightarrow (\Delta S)_{xy}=(\Delta\sigma)_{xy}$

$\cos\gamma<0 \Rightarrow (\Delta S)_{xy}=-(\Delta\sigma)_{xy}$

$\cos\gamma=0 \Rightarrow (\Delta S)_{xy}=0$

$\Rightarrow (\Delta\sigma)_{xy}=\Delta S\cdot\cos\gamma$

(2) 由 $x=x(y,z)$ 表示的曲面分为前，后两侧：

$\cos\alpha>0 \Rightarrow \vec{n}$ 向前　　$\cos\alpha<0 \Rightarrow \vec{n}$ 向后

此时，$\cos\alpha>0$, $(\Delta S)_{yz}=(\Delta\sigma)_{yz}$

$\cos\alpha<0$, $(\Delta S)_{yz}=-(\Delta\sigma)_{yz}$

$\cos\alpha=0$, $(\Delta S)_{yz}=0$

(3) 由 $y=y(x,z)$ 表示的曲面分为左，右两侧：

$\cos\beta>0 \Rightarrow \vec{n}$ 向右，$\cos\beta<0 \Rightarrow \vec{n}$ 向左.

此时，$\cos\beta>0 \Rightarrow (\Delta S)_{xz}=(\Delta\sigma)_{xz}$.

$\cos\beta<0 \Rightarrow (\Delta S)_{xz}=-(\Delta\sigma)_{xz}$.

$\cos\beta=0 \Rightarrow (\Delta S)_{xz}=0$.

1. 引例：设稳定流动的不可压缩流体（密度为1）

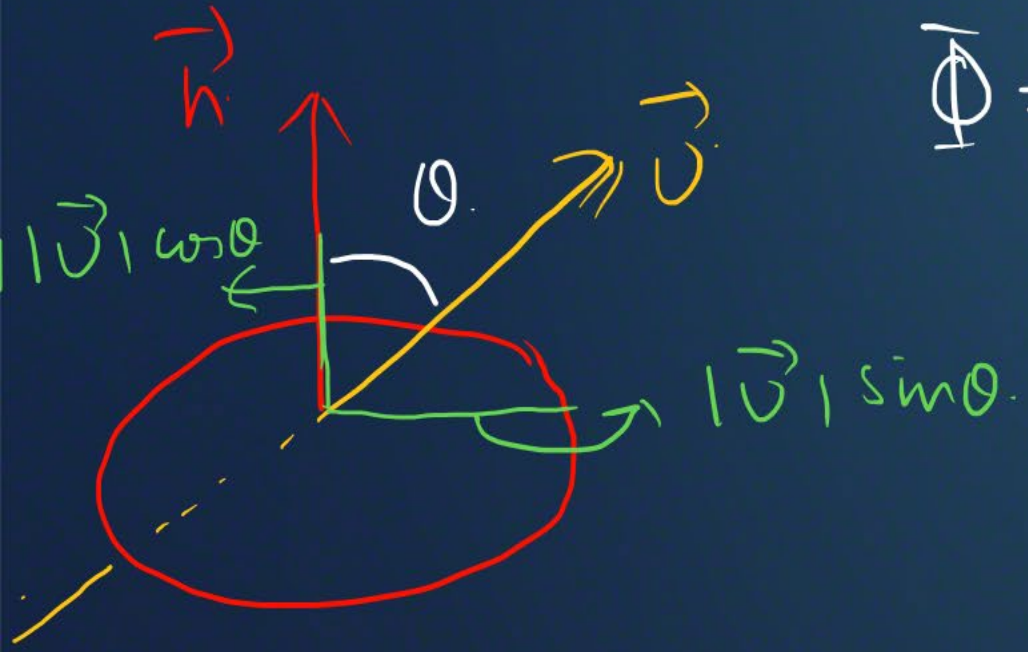
的速度场为 $\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$

求单位时间内流过定向曲面 Σ 的流量 Φ

(1). 令 Σ 为面积为 S 的平面，此时 Σ 上任意点的

单位法向量 $\vec{e}_n=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 为常向量.

再令流体的速度场 $\vec{v}$ = 常向量 $\Longrightarrow$



$$\Phi = \underbrace{\underbrace{\underbrace{|\vec{v}|\cos\theta \times 1}_{\text{长度}} \times S}_{\text{体积}} \times 1}_{\text{质量}}$$

$$= \vec{v}\cdot\vec{e}_n S$$

(2) 设 Σ 为一般的定向曲面

$$\vec{v}=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$$

找微元 $d\Phi=\vec{v}\cdot\vec{e_n}\,dS$

$$\Rightarrow \Phi=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{e_n}\,dS$$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

例11 求 $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\,dxdy$，其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$

$(R>0)$ 的下半部分的下侧

例12：求 $\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y dzdx + z dxdy$，

其中 Σ 是圆柱体 $0 \le z \le b$，$x^2+y^2 \le a^2$ 的表面外侧 ※

$(a>0)$

例13：求 $\iint_{\Sigma} xy\,dydz + z^2\,dzdx + (x^2+y^2)\,dxdy$.

其中Σ：$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 介于 $x^2+y^2 \le x$ 中的部分，

方向向上. *

上次课总结：1. 简化第一型曲面积分计算的技巧：

① $\iint_{\Sigma} dS = \Sigma$ 的面积 ② 对称性 ③ 轮换对称性

2. 一投：D_{xy} 二换：$\Sigma: z=z(x,y) \Rightarrow$

$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, d\sigma$ 三代：$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\, dS$

$z \to z(x,y)$, $dS \to d\sigma$, $\Sigma \to D_{xy}$

$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, d\sigma$

3. ① 质心：$\bar{x}=\dfrac{\iint_{\Sigma} x\mu(x,y,z)\,dS}{\iint_{\Sigma}\mu(x,y,z)\,dS}$　$\bar{y}=\dfrac{\iint_{\Sigma} y\mu(x,y,z)\,dS}{\iint_{\Sigma}\mu(x,y,z)\,dS}$

$\bar{z}=\dfrac{\iint_{\Sigma} z\mu(x,y,z)\,dS}{\iint_{\Sigma}\mu(x,y,z)\,dS}$

② 对坐标轴的转动惯量：$I_x=\iint_{\Sigma}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dS$

$I_y=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dS$　$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)\,dS$

§9.7:

例1：求$\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y dzdx + z dxdy$，其中$\Sigma$是圆柱体：$0 \le z \le b$，$x^2+y^2 \le a^2$的表面外侧※$(a>0)$.

练习：求$\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$，其中$\Sigma$：

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 外侧※

例12：求 $\iint_{\Sigma} x\,dy\,dz - y\,dz\,dx + x^2\,dx\,dy$，其中Σ是上半椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (z\geq 0)$，Σ的方向

为上侧

练习2：求$\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$，其中Σ

为$x^2+y^2=z^2$介于$z=0$及$z=h\ (h>0)$之间部分的

下侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是Σ在点$(x,y,z)$处的法向

量的方向余弦.

练习3：求$\iint_{\Sigma}x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+(z^2-2z)\,dx\,dy$，其中Σ是$z=\sqrt{x^2+y^2}$

被$z=1$所截得的有限部分的内侧

练习4：求 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+yz)\,dy\,dz+(y^2+xz)\,dz\,dx$

$$+(z^2+xy)\,dx\,dy$$

其中 Σ 是 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$ 部分的上侧 *

1、**场**：某种物理量在空间（或平面）的某一区域内的一种分布称为场。按照该物理量是数量还是向量，场分为数量场与向量场。场的分布情形在数学上可用多元数量值函数与向量值函数来描述。

2. 通量：设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 沿场中某一定向曲面 Σ 的第二型曲面积分 $\iint_{\Sigma}\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_{\Sigma}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$

称为向量场 $\vec{F}(x,y,z)$ 沿 Σ 的通量.

例13：(1) $\vec{u}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + ye^z\vec{j} + x\ln(1+z^2)\vec{k}$

在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\operatorname{div}\vec{u}(P) =$ ______

(2) 设 $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$ ______

上次课总结：1、第二型曲面积分的物理意义.

2、上，前，右侧 $\Rightarrow$ 二重积分为正.

下，后，左侧 $\Rightarrow$ 二重积分为负.

计算 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy$ 需要将曲面Σ表示成 $z=z(x,y)$.

计算 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz$ 需要将曲面表示成 $x=x(y,z)$.

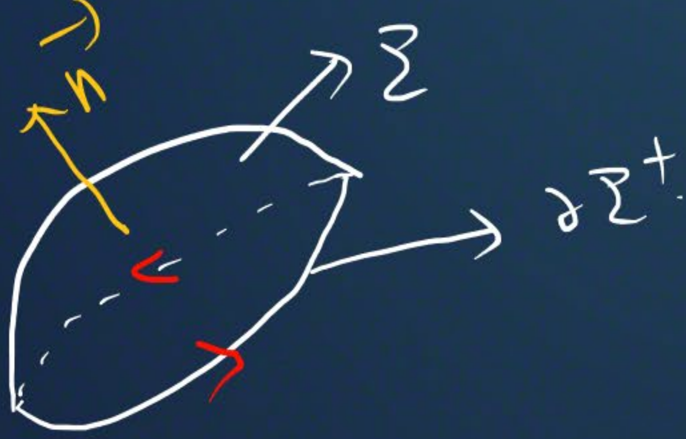
计算 $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dzdx$ 需要将曲面表示成 $y=y(x,z)$.

3. $\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$

$$= \iint_{\Sigma} \left(P \cdot \frac{F_x}{F_z} + Q\frac{F_y}{F_z} + R\right) dxdy$$

设曲 Σ: $F(x, y, z) = 0$

$\partial\Sigma^+$ 与 Σ 的侧符合右手规则：当右手除拇指外其余四指依 $\partial\Sigma^+$ 的绕行方向时，拇指指向 Σ 的侧.



例11 求 $\oint_{\Gamma} 3y\,dx - xz\,dy + yz^2\,dz$ 其中Γ是 $\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ z=2 \end{cases}$

Γ取逆时针方向.

练习1：求 $\oint_{L} -3y^2\,dx + 4z\,dy + 6x\,dz$，其中L是由点 $A(2,0,0)$ 到 $B(0,2,1)$，再到 $O(0,0,0)$ 最后回到A的三角形.

练习2：求 $\oint_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$

L是用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 截立方体：$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，$0\le z\le 1$

的表面所截得的截痕，L的方向是从Oz轴的正向看去，取逆时针方向.

例12 设 $\vec{A} = \text{grad}\,u$，$u = u(x, y, z) \in C^2$，

求 $\text{rot}\,(\text{grad}\,u)$

例13 设 $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ 具有二阶连续偏导数，

求 $\text{div}(\text{rot}\,\vec{F})$

<u>例4</u>. 设重力的方向与z轴的反方向一致，求质量为m的质点，从(x_1, y_1, z_1)沿直线移动到(x_2, y_2, z_2)时重力所做的功.

上次课重点：1、Gauss公式：$P, Q, R \in C^1(\Omega) \Rightarrow$

$$\oiint_{\Sigma外} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv.$$

或

$$\oiint_{\Sigma内} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = -\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$

2、计算：

① 求 $\oiint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$

直接使用Gauss公式.

② 求 $\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$：补上光滑曲面平行或重合的平面，再使用Gauss公式.

2、散度：$\operatorname{div}\vec{F}=\lim\limits_{\Omega\to M_0}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{e}_n\,dS$

注 $\vec{F}=\{P,Q,R\}$，其中 P,Q,R 为 C^1 类函数。

即可微分

$$\operatorname{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

上次课总结：1. Stokes 公式：

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\left(\text{或} = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \right)$$

2、旋度：$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

3、$\vec{F} = \{P, Q, R\}$，$P, Q, R \in C^1$，$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

$\Rightarrow \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 与路径无关 $\Rightarrow \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = f$(终点…)

$-f$(起点…)，其中 $\nabla f = \vec{F}$.