《概率论与数理统计》习题详解

习　题　1

1. 以集合的形式写出下列随机试验的样本空间 S：

(1) 抛两颗骰子观察出现的点数；

(2) 口袋中有红、黑、白球各 1 个，先任取一球，放回后再取一球，观察两次取得球的颜色；

(3) 口袋中有红、黑、白球各 1 个，先任取一球不放回，再取一球，观察两次取得球的颜色；

(4) 在区间 $(0,1)$ 内任取两数，记录取得两数的值.

解　(1) $S_1=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\}$.

(2) $S_2=\{$(红,红),(红,黑),(红,白),(黑,红),(黑,黑),(黑,白),(白,红),(白,黑),(白,白)$\}$.

(3) $S_3=\{$(红,黑),(红,白),(黑,红),(黑,白),(白,红),(白,黑)$\}$.

(4) $S_4=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$.

2. 若某随机试验的样本空间 $S=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，记事件 $A=\{x\mid 1.5\leqslant x\leqslant 2\}$，事件 $B=\{x\mid 1.8\leqslant x\leqslant 2.5\}$，请以集合的形式写出下列事件：

(1) $A\cup B$；　(2) $A-B$；　(3) AB；　(4) $\overline{A}\,\overline{B}$.

解　(1) $A\cup B=\{x\mid 1.5\leqslant x\leqslant 2.5\}$；

(2) $A-B=\{x\mid 1.5\leqslant x<1.8\}$；

(3) $AB=\{x\mid 1.8\leqslant x\leqslant 2\}$；

(4) $\overline{A}\,\overline{B}=\{x\mid 1\leqslant x<1.5$ 或 $2.5<x\leqslant 3\}$.

3. 设 S 是随机试验 E 的样本空间，A,B,C 是随机事件，$\varnothing$ 为不可能事件，问下列命题是否成立？

(1) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$；　(2) 若 $A\cup B=S$，则 $A\cap B=\varnothing$；

(3) $(A\cup B)-B=A$；　(4) $(A-B)\cup B=A$；

(5) $(A\overline{B})\cup B=A\cup B$；　(6) 若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$；

(7) 若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；　(8) 若 $AB=\varnothing$，则 $ABC=\varnothing$.

解　(1) 不成立，举反例.设 $A=\{1\}$，$B=C=\{2\}$，则 $B-C=\varnothing$，$A-B=\{1\}$，

$$A-(B-C)=\{1\}\neq(A-B)\cup C=\{1,2\}.$$

(2) 不成立，举反例.设 $S=\{1,2\}$，$A=B=\{1,2\}$，则 $A\cup B=S$，$A\cap B\neq\varnothing$.

扫码使用
夸克扫描王

(3) 不成立,举反例.设 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$,则

$$A\cup B=\{1,2,3\},\quad (A\cup B)-B=\{1\}\neq A.$$

(4) 不成立,举反例.设 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$,则

$$A-B=\{1\},\quad (A-B)\cup B=\{1,2,3\}\neq A.$$

(5) 成立,因为 $(A\overline{B})\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=(A\cup B)S=A\cup B$.

(6) 成立,因为 $\forall x\in\overline{B}$,若 $x\in A$,由 $A\subset B$,则 $x\subset B$ 矛盾,因此 $x\notin A$,即 $x\in\overline{A}$,所以 $\overline{B}\subset\overline{A}$.

(7) 成立,因为若 $\exists x\in BC$,则 $x\in B$ 且 $x\in C$,由 $C\subset A$ 知 $x\in A$,即 $x\in AB$,与 $AB=\varnothing$ 矛盾,因此没有元素 $x\in BC$,即 $BC=\varnothing$.

(8) 成立,因为若 $\exists x\in ABC$,则 $x\in A,x\in B,x\in C$,即 $x\in AB$,与 $AB=\varnothing$ 矛盾,因此没有元素 $x\in ABC$,即 $ABC=\varnothing$.

4. 请叙述下列事件的对立事件:

(1) A=“投篮 3 次,全部投进”;

(2) B=“射击 4 次,至少有一次命中目标”;

(3) C=“加工 5 个零件,至少有一个合格品”.

解 (1) $\overline{A}$=“投篮 3 次,至少有一次没投进”.

(2) $\overline{B}$=“射击 4 次,任何一次都没有命中目标”.

(3) $\overline{C}$=“加工 5 个零件,全部为不合格品”.

5. 设 A,B 为两个事件,且 $P(A)=0.5,P(B)=0.6$,问:

(1) 在什么情况下,$P(AB)$ 取得最大值?最大值为多少?

(2) 在什么情况下,$P(AB)$ 取得最小值?最小值为多少?

解 (1) $P(AB)\leqslant P(A)=0.5$,当 $A\subset B$ 时,$P(AB)=P(A)=0.5$,则当 $A\subset B$ 时,$P(AB)$ 取得最大值,最大值为 0.5.

(2) 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,且 $P(A\cup B)\leqslant 1$,知

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1=0.1.$$

当 $P(A\cup B)=1$ 或 $A\cup B=S$ 时,$P(AB)=0.1$.综上,当 $P(A\cup B)=1$ 或 $A\cup B=S$ 时,$P(AB)$ 取得最小值,最小值为 0.1.

6. 设随机事件 A,B 互不相容,且 $P(A)=0.2,P(A\cup B)=0.8$,求 $P(B)$.

解 由 A,B 互不相容知 $P(AB)=0$,而 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,所以

$$P(B)=P(A\cup B)+P(AB)-P(A)=0.8+0-0.2=0.6.$$

7. 设随机事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$,且 $P(A)=0.3$,求 $P(B)$.

解 由题意可知

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB),\end{aligned}$$

即 $1-P(A)-P(B)=0$,由 $P(A)=0.3$ 知 $P(B)=0.7$.

8. 设 A,B 为随机事件,且 $P(A)=0.7,P(A-B)=0.2$,求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解 因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.2,P(A)=0.7$,所以 $P(AB)=0.5$,

扫码使用
夸克扫描王

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.5=0.5.$$

9. 设 A,B 为试验 E 的两个任意随机事件,求证:$|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac{1}{4}$.

证明 由于 $P(AB)\leqslant P(A),P(AB)\leqslant P(B)$,因此

$$P(AB)P(AB)\leqslant P(A)P(B),$$

则

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant|P(AB)-P(AB)P(AB)|.$$

若令 $P(AB)=x$,显然 $0\leqslant x\leqslant 1$,因此

$$|P(AB)-P(AB)\cdot P(AB)|=|x-x^2|=\left|\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right|\leqslant\frac{1}{4}.$$

10. 将一枚骰子连掷两次,求两次抛掷出现的点数之和为 6 的概率.

解 样本空间 S 中含 $6\times6=36$ 个样本点,每个样本点出现是等可能的,因此事件 A"点数之和为 6"$=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$,共五个样本点,则 $P(A)=\frac{5}{36}$.

11. 班级中有 5 名男生,3 名女生,现要任意选出 3 名班干部,求班干部中至少有一名女生的概率.

解 令事件 A 为"班干部中至少有一名女生",则 $\overline{A}$ 为"班干部全部为男生",而样本空间 S 有 C_8^3 个样本点,事件 $\overline{A}$ 有 C_5^3 个样本点.由于每个样本点是等可能的,则 $P(\overline{A})=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5\times4\times3}{8\times7\times6}=\frac{5}{28}$,所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{23}{28}$.

12. 在 5 双不同的手套中任取 4 只,求 4 只都不配对的概率.

解 令事件 A 为"4 只都不配对",即从 5 双手套中先任取四双,再从每双手套中任取一只,有 $C_5^4(C_2^1)^4$ 种取法.从 5 双(10 只)手套中任取 4 只有 C_{10}^4 种取法,则样本空间 S 有 C_{10}^4 个样本点.由于每种取法是等可能的,则 $P(A)=\frac{C_5^4(C_2^1)^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$.

13. 从 1,2,3,4,5,6,7 这 7 个数字中,任意选出 3 个不同数字,求:

(1) 事件 A="3 个数字中既不含 1,也不含 2"的概率;

(2) 事件 B="3 个数字中不含 1,或不含 2" 的概率;

(3) 事件 C="3 个数字中含 1,但不含 2" 的概率.

解 (1) 由题意可知 $P(A)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$.

(2) 设事件 B_1 为"3 个数字中不含 1",事件 B_2 为"3 个数字中不含 2",则

$$P(B_1)=\frac{C_6^3}{C_7^3}=\frac{4}{7},\quad P(B_2)=\frac{C_6^3}{C_7^3}=\frac{4}{7},$$

因此

$$P(B)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)=\frac{6}{7}.$$

扫码使用
夸克扫描王

(3) 由题意可知 $P(C)=\dfrac{C_1^1C_5^2}{C_7^3}=\dfrac{2}{7}$.

14. 从数字 1,2,…,9 中有放回地任取 n 次,求 n 次取得数字的乘积为 10 的倍数的概率.

解 令事件 B_1 为"任取 n 次中不含数字 5",事件 B_2 为"任取 n 次中不含偶数",则 $P(B_1)=\dfrac{8^n}{9^n}$,$P(B_2)=\dfrac{5^n}{9^n}$,B_1B_2 为"任取 n 次中不含 5,也不含偶数",即 $P(B_1B_2)=\dfrac{4^n}{9^n}$,$B_1\cup B_2$ 为"n 次取得数字的乘积不为 10 倍数",即

$$P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)=\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}.$$

因此$\overline{B_1\cup B_2}$为"n 次取得的数字乘积为 10 的倍数",其概率为

$$P(\overline{B_1\cup B_2})=1-\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}.$$

15. 在 30 个零件中有 10 个优等品,15 个合格品和 5 个次品,现任取 3 次,每次取一个零件,求:

(1) 无放回抽样,3 个零件都是合格品的概率;

(2) 无放回抽样,第一次取优等品,后两次取合格品的概率;

(3) 有放回抽样,3 个零件都是合格品的概率;

(4) 有放回抽样,第一次取优等品,后两次取合格品的概率.

解 (1) 无放回抽样,

$$P\{3\text{ 个零件都是合格品}\}=\frac{C_{15}^3}{C_{30}^3}=\frac{13}{116}.$$

(2) 无放回抽样,

$$P\{\text{第一次取优等品,后两次取合格品}\}=\frac{A_{10}^1A_{15}^2}{A_{30}^3}=\frac{5}{58}.$$

(3) 有放回抽样,

$$P\{3\text{ 个零件都是合格品}\}=\frac{15}{30}\cdot\frac{15}{30}\cdot\frac{15}{30}=\frac{1}{8}.$$

(4) 有放回抽样,

$$P\{\text{第一次取优等品,后两次取合格品}\}=\frac{10}{30}\cdot\frac{15}{30}\cdot\frac{15}{30}=\frac{1}{12}.$$

16. 抛掷$(2n+1)$次硬币,求出现正面次数多于反面次数的概率.

解 令事件 A 为"$(2n+1)$次抛掷中,正面次数多于反面次数",则事件 $\overline{A}$ 为"$(2n+1)$次抛掷中,反面次数多于正面次数",由对称性,$P(A)=P(\overline{A})$.又由 $P(A)+P(\overline{A})=1$,则

$$P(A)=\frac{1}{2}=0.5.$$

17. 某物业公司后勤一组有电工、水暖工、木工各 3 人,后勤二组有电工、水暖工、卫生员各 2 人,现从两组中各任取一人,求所取 2 人工种相同的概率.

扫码使用
夸克扫描王

解 由题意可知,2 人相同工种,只有以下两种情形:

一组电工和二组电工; 一组水暖工和二组水暖工.

因此设所取 2 人工种相同的事件为 A,则

$$P(A)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1+C_3^1\cdot C_2^1}{C_9^1\cdot C_6^1}=\frac{2}{9}.$$

18. 袋中有 12 个零件,其中质量为 10 g 的甲零件有 2 个,质量为 50 g 的乙零件有 4 个,质量为 100 g 的丙零件有 6 个,现从袋中任取 6 个零件,求这 6 个零件的质量之和不少于 500 g 的概率.

解 令事件 A_1 为"取出 6 个零件,均为丙零件",事件 A_2 为"取出 6 个零件中,5 个丙零件,一个其他零件",事件 A_3 为"取出 6 个球中,4 个丙零件,2 个乙零件",事件 A 为"6 个零件质量之和不少于 500 g",则

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_6^6}{C_{12}^6}+\frac{C_6^5C_6^1}{C_{12}^6}+\frac{C_6^4C_4^2}{C_{12}^6}=\frac{127}{924}.$$

19. 在区间(0,1)中随机地取两个数,求:

(1) 求两数之差的绝对值大于$\frac{1}{2}$的概率;

(2) 求两数之和大于$\frac{1}{2}$的概率;

(3) 求两数的最大值大于$\frac{1}{2}$的概率.

解 全样本空间 $S=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$.

(1) 设事件 A_1 为"两数之差的绝对值大于$\frac{1}{2}$",则

$$A_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x<1,0<y<1,|x-y|>\frac{1}{2}\right\}$$

为如图 1(a)所示区域,

$$P(A_1)=\frac{A_1\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}=\frac{1}{4}.$$

(2) 设事件 A_2 为"两数之和大于$\frac{1}{2}$",则

$$A_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x<1,0<y<1,x+y>\frac{1}{2}\right\}$$

为如图 1(b)所示区域,

$$P(A_2)=\frac{A_2\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}=\frac{7}{8}.$$

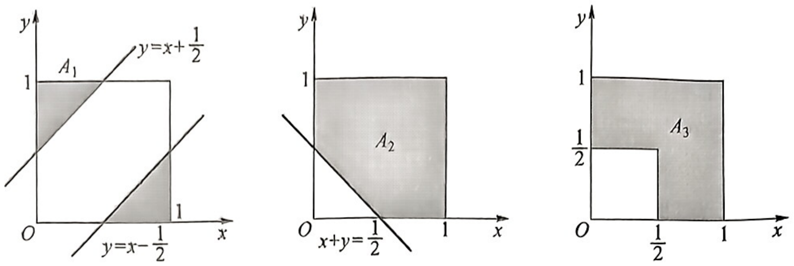
(3) 设事件 A_3 为"两数的最大值大于$\frac{1}{2}$",则

$$A_3=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x<1,0<y<1,\max\{x,y\}>\frac{1}{2}\right\}$$

扫码使用
夸克扫描王

为如图 1(c)所示区域,

$$P(A_3)=\frac{A_3\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}=\frac{3}{4}.$$



(a) (b) (c)

图 1

20. 在长度为 a 的线段内任取两点,将其分成 3 段,求它们能构成一个三角形的概率.

解 设分成 3 段,长度分别为 x,y 和 $a-x-y$,则全样本空间

$$S=\{(x,y)\mid x>0,y>0,a-x-y>0\}.$$

设事件 A 为"3 段能构成三角形",则

$$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x<\frac{a}{2},0<y<\frac{a}{2},0<a-x-y<\frac{a}{2}\right\}$$

为如图 2 所示区域,

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}=\frac{1}{4}=0.25.$$

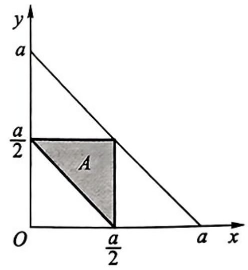


图 2

21. 甲、乙两艘轮船都要停靠在同一个泊位,它们等可能地在一昼夜的任意时刻到达,甲、乙两船停靠泊位的时间分别为 4 h 和 2 h,求有一艘船停靠泊位时需等待一段时间的概率.

解 设 x,y 分别表示甲、乙两船到达泊位的时刻,根据题意有 $0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24$,又设 $A=\{$有一艘船停靠泊位时需等待一段时间$\}$.

如果甲船先到,那么当乙船到达时刻满足 $x<y<x+4$ 时,乙船需要等待;如果乙船先到,那么当甲船到达时刻满足 $y<x<y+2$ 时,甲船需要等待.

如图 3 所示,两艘船到达时间 (x,y) 与图中正方形内的点是一一对应的,事件 A 对应图中阴影部分,由几何概率公式知所求的概率为

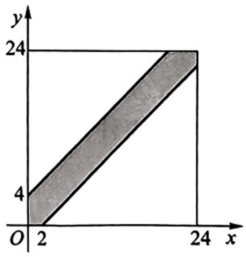


图 3

$$P(A)=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}=\frac{24^2-\frac{1}{2}\times 20^2-\frac{1}{2}\times 22^2}{24^2}\approx 0.233.$$

22. 设随机事件 A,B 互不相容,且 $P(A)=0.7,P(B)=0.2$,求:

(1) $P(A-B)$;(2) $P(A\mid A\cup B)$.

解 (1) 由 A,B 互不相容,则 $P(AB)=0$,从而

扫码使用 夸克扫描王

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.7.$$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.9$（有限可加性），则

$$P(A\mid A\cup B)=\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{0.9}=\frac{0.7}{0.9}=\frac{7}{9}.$$

23. 设 A,B,C 为随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，求 $P(AB\mid\overline{C})$.

解 由于 A 与 C 互不相容，则 $AB\subset A\subset\overline{C}$，即 $AB\overline{C}=AB$，从而

$$P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

24. 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B\mid A)=0.5$，求：

(1) $P(A-B)$；(2) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解 (1) $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.3$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3.$$

(2) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.7.$

25. 袋中有 9 个球，其中 3 个是红球，每次取 1 个球，求：

(1) 无放回抽样，第 3 次取得红球的概率；

(2) 无放回抽样，直到第 3 次才取得红球的概率；

(3) 有放回抽样，第 3 次取得红球的概率；

(4) 有放回抽样，直到第 3 次才取得红球的概率.

解 (1) 由抽签原则，$P\{$第 3 次取得红球$\}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

(2) 令事件 A_i 为“第 i 次取得红球”($i=1,2,3$)，则直到第 3 次才取得红球的概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5}{28}.$$

(3) $P\{$第 3 次取得红球$\}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

(4) 令事件 A_i 为“第 i 次取得红球”($i=1,2,3$)，$\overline{A}_1,\overline{A}_2,A_3$ 相互独立，则直到第 3 次才取得红球的概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=\frac{6}{9}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{9}=\frac{4}{27}.$$

26. 在 4 个鞋盒中各有一双鞋，现从每个鞋盒中取出左脚鞋进行质检，质检后随机地将 4 只左脚鞋放入 4 个鞋盒，问“质检后 4 个鞋盒中的鞋子都不是原来的一双”的概率.

解 记 4 个鞋盒编号分别为 1,2,3,4，令事件 A_i 为“第 i 号鞋盒中正好放回第 i 号左脚鞋”($i=1,2,3,4$)，则

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{1}{4},$$

扫码使用
夸克扫描王

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=\cdots=P(A_2A_4)=\frac{1}{4\times3}\quad(共\ C_4^2\ 个),$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2A_4)=\cdots=P(A_2A_3A_4)=\frac{1}{4\times3\times2}\quad(共\ C_4^3\ 个),$$

$$P(A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{4!},$$

所以

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)&=P(A_1)+\cdots+P(A_4)-P(A_1A_2)-\cdots-P(A_3A_4)+\\&\quad P(A_1A_2A_3)+\cdots+P(A_2A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)\\&=\frac{1}{4}\times4-\frac{1}{4\times3}C_4^2+\frac{1}{4\times3\times2}C_4^3-\frac{1}{4!}\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{5}{8},\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&P\{质检后\ 4\ 个鞋盒中的鞋子都不是原来的一双\}\\&=P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4})=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

27. 一道选择题有 4 个备选答案，其中只有一个是正确的，假设某学生能正确解答的概率为 $\frac{2}{3}$，不会做而乱猜的概率为 $\frac{1}{3}$，且他一定会选择一个答案.

(1) 求此学生能答对这个题目的概率；

(2) 若已知学生答对了这个题目，求他确实是正确解答的概率.

解 (1) 记 B 为"此学生能正确解答"，A 为"此学生能答对这个题目"，则

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{2}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

(2) $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{8}{9}.$

28. 某城市男女人数之比为 3∶2，假设 5%的男性为色盲，2.5%的女性为色盲，在该城市随机地选 1 人发现是色盲，求此人是男性的概率.

解 记事件 A 为"任选一人为男性"，B 为"任选一人为色盲"，则

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{\frac{3}{5}\times0.05}{\frac{3}{5}\times0.05+\frac{2}{5}\times0.025}=\frac{3}{4}.$$

29. 两个箱子，第一个箱子有 3 个白球，2 个红球，第二个箱子有 4 个白球，4 个红球. 现从第一个箱子中随机地取出一个球放到第二个箱子里，再从第二个箱子中取出一个球，

(1) 求最后从第二个箱子中取出的是白球的概率；

扫码使用
夸克扫描王

（2）若已知最后从第二个箱子中取出的是白球，求从第一个箱子放入第二个箱子的是白球的概率.

解　记事件 B 为"从第一个箱子放入第二个箱子的为白球"，事件 A 为"从第二个箱子取出的是白球"，则

（1）$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{23}{45}$.

（2）$P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}}{\frac{23}{45}}=\frac{15}{23}$.

30. 三个人独立地破译一份密码，已知三人各自能译出的概率分别为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，求三人至少有一人能将此密码译出的概率.

解　记三人各自能译出分别为事件 A,B,C，由题意，A,B,C 相互独立，且

$$\begin{aligned}P\{\text{至少有一个能译出}\}&=P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})\\&=1-\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

31. 某运动员投篮的命中率为 $\frac{4}{5}$，求此人投篮 3 次中至少投中 1 次的概率.

解　记事件 A_i 为"第 i 次投中"，$i=1,2,3$，则 A_1,A_2,A_3 相互独立，且

$$\begin{aligned}P\{\text{至少投中一次}\}&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})\\&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\\&=1-\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{124}{125}.\end{aligned}$$

32. 判断下列命题是否正确，正确的给出证明，错误的举出反例：

（1）若三个事件 A,B,C 互相独立，则 AB 与 C 独立；

（2）若三个事件 A,B,C 互相独立，则 $A\cup B$ 与 C 独立.

解　（1）由已知，

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),\quad P(AB)=P(A)\cdot P(B),$$

则

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(AB)P(C),$$

即 AB 与 C 独立.

（2）因为

$$\begin{aligned}P[(A\cup B)C]&=P[AC\cup BC]=P(AC)+P(BC)-P(ACBC)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)\\&=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(C)=P(A\cup B)P(C),\end{aligned}$$

所以 $A\cup B$ 与 C 独立.

扫码使用
夸克扫描王

习 题 2

1. 盒中有 5 个球,分别标有整数号码 3 至 7,现从盒中随机取出 3 个球,问所取出的球的号码最大值的分布律.

解 设随机变量 X 表示取出的 3 个球中号码最大的球,可能的取值为 5,6,7,且

$$P\{X=5\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10},\quad P\{X=6\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10},\quad P\{X=7\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5},$$

即取出球的号码最大值的分布律为

X	5	6	7
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

2. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{20}$	$2a$	$\frac{1}{5}$

其中 a 为未知常数,求 a 的值.

解 由离散型随机变量分布律的性质,可知

$$\frac{1}{2}+a+\frac{1}{20}+2a+\frac{1}{5}=1,$$

解得 $a=\frac{1}{12}$.

3. 设 $F_1(x),F_2(x)$ 是两个随机变量的分布函数,非负常数 a,b 满足 $a+b=1$.令 $F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$,证明 $F(x)$ 是某一个随机变量的分布函数.

证明 验证 $F(x)$ 满足分布函数的三条性质.

(1) 因为 a,b 非负,对于任意的实数 $x_1<x_2$,

$$\begin{aligned}F(x_1)-F(x_2)&=aF_1(x_1)+bF_2(x_1)-[aF_1(x_2)+bF_2(x_2)]\\&=a[F_1(x_1)-F_1(x_2)]+b[F_2(x_1)-F_2(x_2)]\\&\leqslant 0,\end{aligned}$$

因此函数 $F(x)$ 是单调不减的.

(2) 由 $F_1(x),F_2(x)$ 的性质,

$$\begin{aligned}F(-\infty)&=\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}(aF_1(x)+bF_2(x))\\&=\lim_{x\to-\infty}aF_1(x)+\lim_{x\to-\infty}bF_2(x)=0+0=0,\end{aligned}$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(aF_1(x)+bF_2(x))$$

扫码使用
夸克扫描王

$$=\lim_{x\to+\infty}aF_1(x)+\lim_{x\to+\infty}bF_2(x)=a+b=1.$$

(3) 对于任意实数 x_0，有

$$F(x_0+0)=aF_1(x_0+0)+bF_2(x_0+0)=aF_1(x_0)+bF_2(x_0)=F(x_0),$$

即函数 $F(x)$ 是右连续的.

综上所述，$F(x)$ 是某一个随机变量的分布函数.

4. 随机变量的分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

求：(1) X 的分布函数；(2) $P\{1.5<X\leqslant 2.5\}$.

解 (1) 由分布函数定义 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，

当 $x<1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $1\leqslant x<2$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=1\}=\frac{1}{4}$；

当 $2\leqslant x<3$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{1}{2}$；

当 $x\geqslant 3$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=1$，

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{1}{2}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

(2) $P\{1.5<X\leqslant 2.5\}=F(2.5)-F(1.5)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

5. 某公司经理拟将一提案交董事代表投票决议，规定如果提案获得多数董事代表赞成则通过.经理估计各代表对此提案投赞成票的概率为 0.6，且各代表投票情况是相互独立的.为以较大概率通过提案，试问经理应请 3 名还是 5 名董事代表？

解 设当请 3 名董事代表时，投赞成票的人数为 X，由题意可知 $X\sim b(3,0.6)$.提案通过的概率为

$$P\{X\geqslant 2\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=C_3^2\cdot 0.6^2\cdot 0.4+C_3^3\cdot 0.6^3=0.648.$$

设当请 5 名董事代表时，投赞成票的人数为 Y，由题意可知 $Y\sim b(5,0.6)$，提案通过的概率为

$$\begin{aligned}P\{Y\geqslant 3\}&=P\{Y=3\}+P\{Y=4\}+P\{Y=5\}\\&=C_5^3\cdot 0.6^3\cdot 0.4^2+C_5^4\cdot 0.6^4\cdot 0.4+C_5^5\cdot 0.6^5\\&\approx 0.683.\end{aligned}$$

由此可知，请 5 名董事代表比请 3 名董事代表通过提案的概率大.

扫码使用
夸克扫描王

6. 假设某大型设备在任何时间间隔 t h 内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布.若 T 为两次故障之间的时间间隔,求(1)$f_T(t)$;(2)在设备已经无故障运行 8 h 的情况下,继续无故障运行 4 h 的概率.

解 (1) 由题意可知,发生故障的次数 $N(t)$ 为离散型随机变量,其分布律为

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

设随机变量 T 的分布函数为 $F_T(t)$,由分布函数定义可知

$$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}$$

因为时间间隔非负,随机变量 T 的取值非负,于是当 $t<0$ 时,$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=0$.因为 T 表示两次故障的时间间隔,即 $T>t$ 表示在时间间隔 t 内无故障发生,于是当 $t\geqslant 0$ 时,

$$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}.$$

因此随机变量 T 的分布函数为

$$F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

从而随机变量 T 的概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

(2) 由条件概率可知,所求概率为

$$P\{T>12\mid T>8\}=\frac{P\{T>12,T>8\}}{P\{T>8\}}=\frac{P\{T>12\}}{P\{T>8\}}$$
$$=\frac{1-F_T(12)}{1-F_T(8)}=\frac{e^{-12\lambda}}{e^{-8\lambda}}=e^{-4\lambda}.$$

7. 大量数据分析表明:预订餐厅桌位而不来就餐的顾客比例为 5%.假设餐厅有 95 个桌位,但被 100 位顾客预订,假设这 100 位顾客互相不认识.在预订时间内,预订了桌位的顾客来到餐厅却没有桌位的概率约是多少?

解 在预订时间内,预订了桌位的顾客来到餐厅却没有桌位,相当于在 100 位预订桌位的顾客中来就餐的客人数量大于桌位数 95,即不来就餐的顾客少于 5 人.设 X 表示 100 位预订桌位的顾客不来就餐的人数,则 $X\sim b(100,0.05)$,所求概率为

$$P\{X<5\}=P\{X\leqslant 4\}=\sum_{k=0}^{4}C_{100}^{k}\,0.05^k\cdot 0.95^{100-k}.$$

利用泊松逼近定理,$\lambda=np=5$,查表可得

$$P\{X\leqslant 4\}\approx\sum_{k=0}^{4}\frac{5^k e^{-5}}{k!}\approx 0.440\ 5.$$

8. 在伯努利试验中,设每次试验事件 A 发生的概率为 p.

(1) 如果将试验进行到事件 A 第一次出现为止,以 X 表示所需要的试验次数,求 X 的分布律;

(2) 将试验进行到事件 A 出现 r 次为止,以 Y 表示所需的试验次数,求 Y 的分布律.(此时称 Y 服从参数为 r,p 的帕斯卡分布或负二项分布.)

扫码使用
夸克扫描王

解 (1) X 的所有可能取值为 $1,2,\cdots$,事件 $\{X=k\}$ 表示事件 A 第一次出现时,已经进行了 k 次试验,故 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots.$$

(2) 试验至少要进行 r 次,Y 的所有可能取值为 $r,r+1,r+2,\cdots$,事件 $\{Y=k\}$ 表示事件 A 第 r 次出现时,试验进行了 k 次,且前 $(k-1)$ 次试验中事件 A 出现了 $(r-1)$ 次,由于各次试验是相互独立的,故 Y 的分布律为

$$P\{Y=k\}=\mathrm{C}_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}p=\mathrm{C}_{k-1}^{r-1}p^{r}(1-p)^{k-r},\quad k=r,r+1,r+2,\cdots.$$

9. 三个朋友去喝咖啡,玩一个博弈游戏.他们决定用掷硬币的方式确定谁付账:每人掷一枚硬币,如果有人掷出的结果与其他两人不一样,那么由他付账;如果三个人掷出的结果是一样的,那么就重新掷,一直这样下去,直到确定了由谁来付账.求:(1)进行到第 2 轮确定了由谁来付账的概率.(2)进行了 3 轮还没有确定付账人的概率.

解 设 X 表示掷硬币的轮数,则 X 的所有可能取值为 $1,2,\cdots$,三个人掷出的结果一样的概率记为 $1-p=2\times\frac{1}{2^3}$,则 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots,$$

即 X 服从几何分布.

(1) 进行到第 2 轮确定由谁来付账的概率为

$$P\{X=2\}=(1-p)^{2-1}p=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}.$$

(2) 进行了 3 轮还没有确定付账人的概率为

$$\begin{aligned}P\{X>3\}&=1-P\{X=1\}-P\{X=2\}-P\{X=3\}\\&=1-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{1}{64}.\end{aligned}$$

10. 设连续型随机变量的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}a, & x<-1,\\ c+d\arcsin x, & -1\leqslant x<1,\\ b, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

其中 a,b,c,d 为常数,求 a,b,c,d 的值.

解 由分布函数的性质 $F(+\infty)=1,F(-\infty)=0$,以及

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=a,\quad F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=b$$

得到

$$a=0,\quad b=1.$$

再由连续型随机变量的分布函数是连续函数,可知 $F(x)$ 在点 $x=-1$ 和 $x=1$ 处连续,即有

$$\lim_{x\to-1^-}F(x)=\lim_{x\to-1^+}F(x)=F(-1),\quad \lim_{x\to1^-}F(x)=\lim_{x\to1^+}F(x)=F(1),$$

可得到

$$c-\frac{d\pi}{2}=0,\quad c+\frac{d\pi}{2}=1,$$

扫码使用
夸克扫描王

解得 $c=\frac{1}{2},d=\frac{1}{\pi}$.于是常数 $a=0,b=1,c=\frac{1}{2},d=\frac{1}{\pi}$.

11. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求随机变量 X 的分布函数.

解 由连续型随机变量分布函数的定义 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$ 可知，当 $x<0$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}x=0;$$

当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2};$$

当 $1\leqslant x<2$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{x}(2-x)\mathrm{d}x=-\frac{x^2}{2}+2x-1;$$

当 $x\geqslant 2$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(2-x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{x}0\mathrm{d}x=1,$$

所以随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ -\frac{x^2}{2}+2x-1, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

12. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{c}{x}, & 1\leqslant x<\mathrm{e}^2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 c 为未知常数，求：(1) c 的值；(2) 随机变量 X 的分布函数；(3) $P\left\{\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant\frac{3}{2}\right\}$.

解 (1) 由概率密度性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{\mathrm{e}^2}\frac{c}{x}\mathrm{d}x=c\ln x\Big|_{1}^{\mathrm{e}^2}=c(\ln\mathrm{e}^2-\ln 1)=2c,$$

解得 $c=\frac{1}{2}$.

(2) 由分布函数的定义 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$，当 $x<1$ 时，

扫码使用
夸克扫描王

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}x=0;$$

当 $1\leqslant x<\mathrm{e}^2$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1} 0\mathrm{d}x+\int_{1}^{x}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{2};$$

当 $x\geqslant\mathrm{e}^2$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1} 0\mathrm{d}x+\int_{1}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}^2}^{x} 0\mathrm{d}x=1,$$

故随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{\ln x}{2}, & 1\leqslant x<\mathrm{e}^2,\\ 1, & x\geqslant \mathrm{e}^2.\end{cases}$$

(3) $P\left\{\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant\frac{3}{2}\right\}=F\left(\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)+P\left\{X=\frac{1}{2}\right\}=\dfrac{\ln\frac{3}{2}}{2}-0+0=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2).$

13. 设随机变量 $X\sim N(10,4)$,求:(1) $P\{7<X\leqslant 12\}$;(2) $P\{X>a\}=0.33$ 时,a 的值.

解 (1) $P\{7<X\leqslant12\}=P\left\{\frac{7-10}{2}<\frac{X-10}{2}\leqslant\frac{12-10}{2}\right\}=\Phi(1)-\Phi\left(-\frac{3}{2}\right)$

$$=\Phi(1)+\Phi\left(\frac{3}{2}\right)-1\approx 0.774\ 5.$$

(2) $P\{X>a\}=P\left\{\frac{X-10}{2}>\frac{a-10}{2}\right\}=1-\Phi\left(\frac{a-10}{2}\right)=0.33$,即 $\Phi\left(\frac{a-10}{2}\right)=0.67$,查表可知,$\frac{a-10}{2}\approx$ 0.44,解得 $a\approx 10.88$.

14. 在正常的考试中,学生的成绩 X 应当服从 $N(a,\sigma^2)$ 分布.如果规定分数在 $a+\sigma$ 以上为“优秀”,a 至 $a+\sigma$ 之间为“良好”,$a-\sigma$ 至 a 之间为“中等”,$a-\sigma$ 以下为“较差”.求这四个等级的学生各占多大比例.

解 “优秀”的比例为

$$P\{X>a+\sigma\}=P\left\{\frac{X-a}{\sigma}>\frac{a+\sigma-a}{\sigma}\right\}=1-\Phi(1)\approx 0.158\ 7,$$

“良好”的比例为

$$P\{a<X\leqslant a+\sigma\}=P\left\{\frac{a-a}{\sigma}<\frac{X-a}{\sigma}\leqslant\frac{a+\sigma-a}{\sigma}\right\}=\Phi(1)-\Phi(0)\approx 0.341\ 3,$$

“中等”的比例为

$$P\{a-\sigma<X\leqslant a\}=P\left\{\frac{a-\sigma-a}{\sigma}<\frac{X-a}{\sigma}\leqslant\frac{a-a}{\sigma}\right\}=\Phi(0)-\Phi(-1)\approx 0.341\ 3,$$

“较差”的比例为

$$P\{X\leqslant a-\sigma\}=P\left\{\frac{X-a}{\sigma}\leqslant\frac{a-\sigma-a}{\sigma}\right\}=\Phi(-1)=1-\Phi(1)\approx 0.158\ 7.$$

扫码使用
夸克扫描王

15. 开车从某城市的城南甲地到城北乙地.如果穿行城市,所需要的时间(单位:min)服从$N(50,100)$分布;若绕行城市,则所需时间服从$N(60,16)$分布.假设现有(1)65 min可用;(2)70 min可用,问是穿行好还是绕行好?

解 设穿行城市所需的时间为X,绕行城市所需时间为Y,由题意可知

$$X\sim N(50,100),\quad Y\sim N(60,16).$$

(1) 若有65 min可用,计算

$$P\{X\leqslant 65\}=P\left\{\frac{X-50}{10}\leqslant\frac{65-50}{10}\right\}=\Phi(1.5),$$

$$P\{Y\leqslant 65\}=P\left\{\frac{Y-60}{4}\leqslant\frac{65-60}{4}\right\}=\Phi(1.25),$$

因为$P\{X\leqslant 65\}=\Phi(1.5)>\Phi(1.25)=P\{Y\leqslant 65\}$,所以选择穿行城市.

(2) 若有70 min可用,计算可得

$$P\{X\leqslant 70\}=P\left\{\frac{X-50}{10}\leqslant\frac{70-50}{10}\right\}=\Phi(2),$$

$$P\{Y\leqslant 70\}=P\left\{\frac{Y-60}{4}\leqslant\frac{70-60}{4}\right\}=\Phi(2.5),$$

因为$P\{X\leqslant 70\}=\Phi(2)<\Phi(2.5)=P\{Y\leqslant 70\}$,所以选择绕行城市.

16. 设某仪器上的电子元件寿命X(单位:h)服从参数为$\lambda=\frac{1}{1\ 000}$的指数分布,求:(1)寿命至少为1 000 h的概率;(2)寿命在1 000 h至1 200 h之间的概率;(3)如果已知电子元件已经正常工作1 000 h,还能再正常工作1 000 h以上的概率.

解 (1) 由题意可知随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1\ 000}e^{-\frac{1}{1\ 000}x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

寿命至少为1 000 h的概率为

$$P\{X\geqslant 1\ 000\}=\int_{1\ 000}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{1\ 000}^{+\infty}\frac{1}{1\ 000}e^{-\frac{1}{1\ 000}x}\,dx=e^{-1}.$$

(2) 寿命在1 000 h至1 200 h之间的概率为

$$P\{1\ 000\leqslant X\leqslant 1\ 200\}=\int_{1\ 000}^{1\ 200}f(x)\,dx=\int_{1\ 000}^{1\ 200}\frac{1}{1\ 000}e^{-\frac{1}{1\ 000}x}\,dx=e^{-1}-e^{-1.2}.$$

(3) 正常工作1 000 h后还能再正常工作1 000 h以上的概率为

$$P\{X\geqslant 1\ 000+1\ 000\mid X\geqslant 1\ 000\}=\frac{P\{X\geqslant 2\ 000,X\geqslant 1\ 000\}}{P\{X\geqslant 1\ 000\}}=\frac{P\{X\geqslant 2\ 000\}}{P\{X\geqslant 1\ 000\}}$$

$$=\frac{\int_{2\ 000}^{+\infty}\frac{1}{1\ 000}e^{-\frac{1}{1\ 000}x}\,dx}{\int_{1\ 000}^{+\infty}\frac{1}{1\ 000}e^{-\frac{1}{1\ 000}x}\,dx}=\frac{e^{-2}}{e^{-1}}=e^{-1}.$$

扫码使用
夸克扫描王

17. 设随机变量 X 服从区间$[a,b]$上的均匀分布,其中 $0<a<b$.且 $P\{0<X<3\}=\frac{1}{4}$,$P\{X>4\}=\frac{1}{2}$.求:(1)随机变量 X 的概率密度函数;(2)$P\{1<X<5\}$.

解 (1) 因为随机变量 X 服从区间$[a,b]$上的均匀分布,所以其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为

$$P\{0<X<3\}=P\{a<X<3\}=\int_a^3\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

可得$\frac{3-a}{b-a}=\frac{1}{4}$,由

$$P\{X>4\}=\int_4^b\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

可得$\frac{b-4}{b-a}=\frac{1}{2}$,所以可得方程组

$$\begin{cases}\frac{3-a}{b-a}=\frac{1}{4},\\ \frac{b-4}{b-a}=\frac{1}{2},\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}a=2,\\ b=6,\end{cases}$$

所以

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 2<x<6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $P\{1<X<5\}=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 0\mathrm{d}x+\int_2^5\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$

18. 设随机变量 X 服从$(0,10)$上的均匀分布,现对 X 进行 4 次独立观测,试求至少有 3 次观测值大于 5 的概率.

解 设 Y 表示 4 次独立观测中,观测值大于 5 的次数,p 为观测值大于 5 的概率,则 $Y\sim b(4,p)$.

由题意可知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & 0<x<10,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

观测值大于 5 的概率为

$$p=P\{X>5\}=\int_5^{10}\frac{1}{10}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

所以至少有 3 次观测值大于 5 的概率为

扫码使用
夸克扫描王

$$P\{Y\geqslant 3\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}=C_4^3p^3(1-p)^1+C_4^4p^4(1-p)^0=\frac{5}{16}.$$

19. 设随机变量 X 和 Y 具有相同的概率密度函数，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

若已知事件 $A=\{X>a\}$ 和 $B=\{Y>a\}$ 相互独立，且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，求常数 a.

解 因为事件 A 与 B 独立，所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B).$$

而

$$P(A)=P\{X>a\}=\int_a^2\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=1-\frac{a^3}{8},$$

$$P(B)=P\{Y>a\}=\int_a^2\frac{3}{8}y^2\mathrm{d}y=1-\frac{a^3}{8},$$

故有

$$2\left(1-\frac{a^3}{8}\right)-\left(1-\frac{a^3}{8}\right)^2=\frac{3}{4},$$

解得 $1-\frac{a^3}{8}=\frac{1}{2}$ 或 $1-\frac{a^3}{8}=\frac{3}{2}$，于是可得 $a=\pm\sqrt[3]{4}$.又因为 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，可知 $0<P(A)<1$，所以 $0<a<2$，常数 $a=\sqrt[3]{4}$.

20. 若 $\alpha=0.005$，计算标准正态分布上 α 分位点：z_α 和 $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

解 设随机变量 $Z\sim N(0,1)$，由标准正态分布上 α 分位点的定义可知

$$P\{Z>z_\alpha\}=\alpha.$$

当 $\alpha=0.005$ 时，$P\{Z>z_{0.005}\}=0.005$，于是可知

$$P\{Z>z_{0.005}\}=1-P\{Z\leqslant z_{0.005}\}=1-\Phi(z_{0.005})=0.005,$$

进而有 $\Phi(z_{0.005})=0.995$，查表可知 $z_{0.005}\approx 2.575$.

同理可得 $z_{0.0025}\approx 2.81$.

21. 设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作.若一周 5 个工作日里无故障可获利润 10 万元，发生一次故障可获利润 5 万元，发生两次故障可获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内利润的分布律.

解 设 X 表示一周内机器发生故障的次数，Y 表示一周内的利润，由题意可知 $X\sim b(5,0.2)$，Y 的可能取值为 $-2,0,5,10$，且

$$P\{Y=-2\}=P\{X\geqslant 3\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}\approx 0.0579,$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=2\}=C_5^2\,0.2^2\cdot 0.8^3=0.2048,$$

$$P\{Y=5\}=P\{X=1\}=C_5^1\,0.2^1\cdot 0.8^4=0.4096,$$

$$P\{Y=10\}=P\{X=0\}=C_5^0\,0.2^0\cdot 0.8^5\approx 0.3277,$$

一周内利润的分布律为

扫码使用
夸克扫描王

Y	-2	0	5	10
P	0.057 9	0.204 8	0.409 6	0.327 7

22. 某工厂生产的零件直径 X(单位:cm)服从正态分布 $N(10,1)$.零件直径在 9 cm 到 11 cm 之间为合格品,销售一个合格品可获利 10 元,销售一个直径小于 9 cm 的零件没有利润,销售一个直径大于 11 cm 的零件亏损 2 元.求销售一个零件获得利润 Y(单位:元)的概率分布.

解 Y 的可能取值为$-2,0,10$.由题意可知随机变量 $X\sim N(10,1)$,则有

$$P\{Y=-2\}=P\{X>11\}=P\left\{\frac{X-10}{1}>\frac{11-10}{1}\right\}=1-\Phi(1),$$

$$P\{Y=0\}=P\{X<9\}=P\left\{\frac{X-10}{1}<\frac{9-10}{1}\right\}=1-\Phi(1),$$

$$P\{Y=10\}=P\{9\leqslant X\leqslant 11\}=P\left\{\frac{9-10}{1}\leqslant\frac{X-10}{1}\leqslant\frac{11-10}{1}\right\}=2\Phi(1)-1,$$

故每销售一个零件所获得利润的分布律为

Y	-2	0	10
P	$1-\Phi(1)$	$1-\Phi(1)$	$2\Phi(1)-1$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数.

23. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求 $Y=(X-1)^2$ 的分布律.

解 Y 的可能取值为 $0,1,\frac{9}{4},4$,且

$$P\{Y=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{10},\quad P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=\frac{2}{5},$$

$$P\left\{Y=\frac{9}{4}\right\}=P\left\{X=\frac{5}{2}\right\}=\frac{3}{10},\quad P\{Y=4\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{5},$$

故 $Y=(X-1)^2$ 的分布律为

Y	0	1	$\frac{9}{4}$	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

24. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度函

扫码使用
夸克扫描王

数 $f_Y(y)$.

解　因为当 $x>0$ 时，函数 $f_X(x)\neq 0$，故只需考虑区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $y=e^x$ 的性质，在区间 $(0,+\infty)$ 上 $y=e^x$ 为单调函数，其反函数记为 $h(y)$，即 $x=h(y)=\ln y$，且有 $y=e^x>1$，于是有

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|=e^{-\ln y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y^2},\quad y>1,$$

所以随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

25. 设随机变量 X 服从区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，求 $Y=\tan X$ 的分布.

解　由题意可知，随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

方法一：设随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{\tan X\leqslant y\}=P\{X\leqslant \arctan y\}\\&=\int_{-\infty}^{\arctan y}f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan y}\frac{1}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\arctan y+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\frac{1}{\pi}\arctan y+\frac{1}{2},\quad -\infty<y<+\infty.$$

进一步可得到 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=F'(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)},\quad -\infty<y<+\infty.$$

方法二：因为仅当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数 $f_X(x)\neq 0$，故只需考虑 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的性质. $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是单调函数，故存在反函数为

$$x=h(y)=\arctan y,\quad -\infty<y<+\infty,$$

由此可知 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)|=\frac{1}{\pi(1+y^2)},\quad -\infty<y<+\infty.$$

26. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求随机变量 $Y=X^2+1$ 的分布函数与概率密度函数.

解　方法一：设随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，概率密度函数为 $f_Y(y)$，由分布函数定义可知

扫码使用
夸克扫描王

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2+1\leqslant y\},$$

当 $y\leqslant 1$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2+1\leqslant y\}=0$；当 $y>1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{X^2+1\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y-1}\leqslant X\leqslant\sqrt{y-1}\}=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

进一步地，当 $\sqrt{1-y}<1$ 即 $1<y<2$ 时，

$$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}(1-|x|)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{y-1}}(1-x)\,\mathrm{d}x=2\sqrt{y-1}-y+1,$$

当 $y\geqslant 2$ 时，

$$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(1-|x|)\,\mathrm{d}x=1.$$

综上可知，随机变量 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 1,\\ 2\sqrt{y-1}-y+1, & 1<y<2,\\ 1, & y\geqslant 2,\end{cases}$$

从而随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

方法二：因为仅当 $-1<x<1$ 时，函数 $f_X(x)\neq 0$，只需考虑当 $-1<x<1$ 时，函数 $y=x^2+1$ 的性质.记 $I_1=(-1,0)$，$I_2=[0,1)$，可知函数 $y=x^2+1$ 在区间 I_1,I_2 上均是单调函数，反函数分别记为 $h_1(y)$，$h_2(y)$，即在区间 I_1 上，

$$x=h_1(y)=-\sqrt{y-1},\quad 1<y<2,$$

在区间 I_2 上，

$$x=h_2(y)=\sqrt{y-1},\quad 1\leqslant y<2,$$

所以当 $1<y<2$ 时，有

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=f_X(h_1(y))\,|h_1'(y)|+f_X(h_2(y))\,|h_2'(y)|\\&=(1-|h_1(y)|)\frac{1}{2\sqrt{y-1}}+(1-|h_2(y)|)\frac{1}{2\sqrt{y-1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{y-1}}-1,\end{aligned}$$

即随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

27. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，求（1）$Y=2X^2+1$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$；（2）$Z=|X|$的概率密度函数 $f_Z(z)$.

解 （1）由题意可知，随机变量 X 的概率密度函数为

扫码使用
夸克扫描王

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

设随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，由分布函数定义可知

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{2X^2+1\leqslant y\}.$$

当 $y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{2X^2+1\leqslant y\}=P(\varnothing)=0;$$

当 $y\geqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{2X^2+1\leqslant y\}=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leqslant X\leqslant\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}\\&=\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)=2\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-1,\end{aligned}$$

于是随机变量 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}2\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-1, & y\geqslant 1,\\ 0, & y<1,\end{cases}$$

从而可得 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1,\\ 0, & y\leqslant 1.\end{cases}$$

（2）设随机变量 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，由分布函数定义可知

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{|X|\leqslant z\}.$$

当 $z<0$ 时，

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{|X|\leqslant z\}=P(\varnothing)=0;$$

当 $z\geqslant 0$ 时，

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{|X|\leqslant z\}=P\{-z\leqslant X\leqslant z\}=\int_{-z}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

从而可得 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

习　题　3

1. 从 1,2,3 三个数字中任取两个数. 考虑两种取法：(1) 第一次取数后放回再取第二次；(2) 第一次取数后不放回再取第二次. 记第一次取数为 X，第二次取数为 Y，分别就两种取数方法求 (X,Y) 的联合分布律.

扫码使用 夸克扫描王

第三章　第一节

3-1. 从1,2,3三个数字中任取两个数. 考虑两种取法: (1) 第一次取数后放回再取第二次; (2) 第一次取数后不放回再取第二次. 记第一次取数为 X, 第二次取数为 Y, 分别就两种取数方法求 (X,Y) 的联合分布律.

(1) $P\{X=i, Y=j\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $i,j = 1,2,3$.

所以 (X,Y) 的联合分布律为

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2) $P\{X=Y\}=0$　$P\{X=i, Y=j\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, $i \neq j$, $i,j=1,2,3$.

所以 (X,Y) 的联合分布律

Y \ X	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

3-2. 袋子中装有2只黑球, 3只红球, 3只白球, 在其中任取4只球, 以 X 表示取到的红球数, 以 Y 表示取到的黑球数, 求 (X,Y) 的联合分布律.

X 的可能取值为 0, 1, 2, 3 ; Y 的可能取值为 0, 1, 2.

$P\{X=0, Y=0\}=0$　　$P\{X=1, Y=0\} = \frac{C_3^1 C_3^3}{C_8^4} = \frac{3}{70}$

$P\{X=2, Y=0\} = \frac{C_3^2 C_3^2}{C_8^4} = \frac{9}{70}$　　$P\{X=3, Y=0\} = \frac{C_3^1}{C_8^4} = \frac{3}{70}$

$P\{X=0, Y=1\} = \frac{C_2^1}{C_8^4} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}$　　$P\{X=1, Y=1\} = \frac{C_2^1 C_3^1 C_3^2}{C_8^4} = \frac{9}{35}$

$P\{X=2, Y=1\} = \frac{C_3^2 C_2^1 C_3^1}{C_8^4} = \frac{9}{35}$　　$P\{X=3, Y=1\} = \frac{C_2^1}{C_8^4} = \frac{1}{35}$

$P\{X=0, Y=2\} = \frac{C_3^2}{C_8^4} = \frac{3}{70}$　　$P\{X=1, Y=2\} = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_8^4} = \frac{9}{70}$

$P\{X=2, Y=2\} = \frac{C_3^2}{C_8^4} = \frac{3}{70}$　　$P\{X=3, Y=2\}=0$

Y \ X	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$
1	$\frac{1}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{1}{35}$
2	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{3}{70}$	0

扫码使用
夸克扫描王

3-3. 设随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3}),$$

求: (1) 系数A,B,C;　　　(2) (X,Y)的概率密度.

(1) $F(-\infty,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})=0$

$F(x,-\infty)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0$　　解得 $A=\frac{1}{\pi^2}$　$B=C=\frac{\pi}{2}$

$F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1$

(2) $f(x,y)=\frac{\partial^2(F(x,y))}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$

3-4. 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求: (1) (X,Y)的分布函数;　(2) $P\{X\geq Y\}$.

~~(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$　$1=2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(2x+y)}dxdy$~~

~~$=2\int_0^{+\infty}$~~

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$

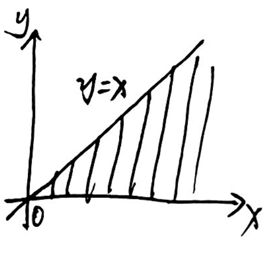
$=\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$=\int_0^x 2e^{-2x}dx\int_0^y e^{-y}dy=(1-e^{-2x})(1-e^{-y})$

$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

(2) $P\{X\geq Y\}=\iint\limits_{x\geq y}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^x 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$=\int_0^{+\infty}(2e^{-2x}-2e^{-3x})dx=\frac{1}{3}$



扫码使用
夸克扫描王

3-5. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} k(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1) 常数 k 的值；　　(2) (X,Y) 的概率密度.

(1) 由分布函数的性质

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} k(1-e^{-x})(1-e^{-y})=1 \quad \therefore k=1$$

(2) $$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

3-6. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{2}+kxy, & 0<x<1, 0<y<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

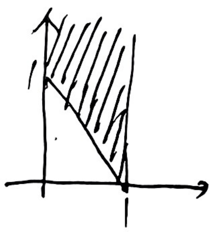
求：(1) 常数 k 的值；　　(2) $P\{X+Y>1\}$.

(1) 由概率密度的性质.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^2\left(\frac{x}{2}+kxy\right)dy\,dx=\int_0^1(x+2kx)\,dx=\frac{1}{2}+k=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}$$

(2) $x+y>1$



如图：

$$P\{X+Y>1\}=\iint_{x+y>1} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{1-x}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{xy}{2}\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{x}{2}\left(\frac{5}{2}+2x-\frac{x^3}{2}\right)dx=\frac{43}{48}$$

扫码使用
夸克扫描王

班级　　　　　　姓名　　　　　　学号

第三章　第二节

3-7. 设随机变量(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	a	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$

求: (1) 常数a的值;　　(2) X,Y的边缘分布律.

(1) $a+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{3}=1$

$\therefore a=\frac{1}{5}$

(2) X的边缘分布律.

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$

Y的边缘分布律

Y	0	1
P	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$

3-8. 设随机变量(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	a	0.2	0.2	0.1
1	0.2	0.1	0.1	b

又知$P\{Y=0\}=0.55$，求:

(1) 常数a,b的值;　　(2) X,Y的边缘分布律.

(1)

$\because P\{Y=0\}=0.55$

$\therefore a+0.2+0.2+0.1=0.55$

$\therefore a=0.05$

又$\because$ ~~a+~~ $0.55+0.2+0.1+0.1+b=1$

$\therefore b=0.05$

(2) X的边缘分布律.

X	0	1	2	3
P	0.25	0.3	0.3	0.15

Y的边缘分布律:

Y	0	1
P	0.55	0.45

扫码使用
夸克扫描王

3-9. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{k}{(1+y^2)(1+x^2)},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求：(1)常数k的值；　(2) X和Y的边缘概率密度.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{(1+y^2)(1+x^2)}dxdy=k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy=k\pi^2=1$

$\therefore k=\frac{1}{\pi^2}$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dy=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<+\infty$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dx=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $-\infty<y<+\infty$.

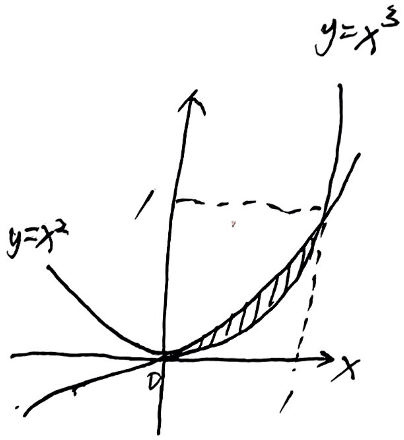
扫码使用
夸克扫描王

3-10. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 $D=\{(x,y)\mid 0<x^3<y<x^2\}$. 求:

(1) 常数 k 的值;　　(2) 边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.



~~f(x,y)=~~

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D k\,dx\,dy=k\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1 \quad \therefore k=12$

(2) 当 $0<x<1$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{x^3} 0\,dy+\int_{x^3}^{x^2} 12\,dy+\int_{x^2}^{+\infty} 0\,dy$

$=12(x^2-x^3)$

当 $x\le 0$, $x\ge 1$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy=0$

$\therefore$ X的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}12(x^2-x^3) & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

当 $0<y<1$ 时

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} 0\,dx+\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} 12\,dx+\int_{\sqrt[3]{y}}^{+\infty} 0\,dx$

$=12(\sqrt[3]{y}-\sqrt{y})$,

Y的边缘概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}12(\sqrt[3]{y}-\sqrt{y}), & 0<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

扫码使用
夸克扫描王

3-8. 设随机变量(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	a	0.2	0.2	0.1
1	0.2	0.1	0.1	b

又知$P\{Y=0\}=0.55$，求:

(1) 在$X=1$的条件下，Y的分布律；　　(2) $P\{X<2|Y=1\}$.

(1) $P\{Y=0\}=a+0.2+0.2+0.1=0.55$　　$\therefore a=0.05$.

又 $0.55+0.2+0.1+0.1+b=1$　　$\therefore b=0.05$

又 $P\{X=1\}=0.2+0.1=0.3$.

$P\{Y=0|X=1\}=\dfrac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\dfrac{2}{3}.$

$P\{Y=1|X=1\}=\dfrac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}=\dfrac{1}{3}$

Y	0	1
$P\{Y=k\|X=1\}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

(2) $P\{X<2|Y=1\}=\dfrac{P\{X<2,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\dfrac{P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}$

$=\dfrac{0.2+0.1}{0.45}=\dfrac{2}{3}$

扫码使用
夸克扫描王

3-10. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中$D=\{(x,y)\mid 0<x^3<y<x^2\}$. 求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D k\,dx\,dy = k\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1 \quad \therefore k=12$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{x^3} 0\,dy+\int_{x^3}^{x^2} 12\,dy+\int_{x^2}^{+\infty} 0\,dy$$

$$=12(x^2-x^3)$$

若$x\le 0$或$x\ge 1$, 对任意y, $f(x,y)=0$

$$\therefore f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)=0$$

~~当$x^3<x^2$~~ 又$0<x^3<x^2$

$\therefore x\in(0,1)$

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}12(x^2-x^3), & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

同理 $f_Y(y)=\begin{cases}12(\sqrt[3]{y}-\sqrt{y}) & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

当$0<y<1$时 $f_Y(y)>0$ ~~在Y=y的条件下~~

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{12}{12(\sqrt[3]{y}-\sqrt{y})}=\frac{1}{\sqrt[3]{y}-\sqrt{y}},\quad \sqrt{y}<x<\sqrt[3]{y}.$$

$$\therefore f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{y}-\sqrt{y}} & 0<y<1,\ \sqrt{y}<x<\sqrt[3]{y}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

当$0<x<1$时, $f_X(x)>0$, ~~在X=x的~~

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{12}{12(x^2-x^3)}=\frac{1}{x^2-x^3},\quad x^3<y<x^2$$

$$\therefore f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2-x^3}, & 0<x<1,\ x^3<y<x^2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

扫码使用
夸克扫描王

3-11. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6(1-y), & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$.

若$0<x<1$，当$x<y<1$时有$f(x,y)=6(1-y)$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{x}0\,dy+\int_{x}^{1}6(1-y)dy+\int_{1}^{+\infty}0\,dy$$

$$=3(x-1)^2$$

若$x\le 0$或$x\ge 1$，对任意y均有$f(x,y)=0$，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}0\,dy=0$$

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}3(x-1)^2, & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

同理，$f_Y(y)=\begin{cases}6y(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

当$0<x<1$时$f_X(x)>0$，在$X=x$的条件下，Y的

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\cancel{\frac{6(1-y)}{3(x-1)^2}}\ \frac{2(1-y)}{(x-1)^2}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$0<y<1$时，$f_Y(y)>0$，在$Y=y$的条件下，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

扫码使用
夸克扫描王

3-12. 设某机场日到港人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，从机场到市区可选择乘坐巴士或不坐巴士，每位旅客选择乘坐巴士到市区的概率为 $p(0<p<1)$，且每位旅客乘坐巴士与否相互独立，以 Y 表示选择乘坐巴士的人数. 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

由二维随机变量 (X,Y) 的分布律与边缘分布和条件分布律的关系

$$P\{X=m, Y=n\}=P\{X=m\}P\{Y=n|X=m\}, \quad n=0,1,\cdots m, \quad m=0,1,2\cdots$$

$$P\{X=m\}=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m=0,1,\cdots$$

在到港人数为 m 的条件下，乘坐巴士的人数 $Y\sim b(m,p)$ 可知.

$$P\{Y=n|X=m\}=C_m^n p^n(1-p)^{m-n}$$

$$\therefore P\{X=m,Y=n\}=P\{X=m\}P\{Y=n|X=m\}$$

$$=C_m^n p^n(1-p)^{m-n}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad n=0,1,\cdots,m, \quad m=0,1,2,\cdots$$

扫码使用
夸克扫描王

班级　　　　　　　　姓名　　　　　　　　学号

第三章　第四节

3-13. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，分布律为

X	-1	0	1
p_k	0.3	0.2	0.5

，

Y	-1	1
p_k	0.2	0.8

.

求：

(1) (X,Y) 的分布律；　　(2) 求概率 $P\{X=Y\}$；

(3) 求关于 t 的方程 $t^2+2tX+Y+\frac{3}{2}=0$ 有实根的概率.

(1) ∵ X 与 Y 相互独立，$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
-1	0.06	0.04	0.1
1	0.24	0.16	0.4

(2) $P\{X=Y\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}=0.06+0.4=0.46$

(3) $\Delta=(2X)^2-4(Y+\frac{3}{2})\geq 0$

$\therefore P\{(2X)^2-4(Y+\frac{3}{2})\geq 0\}$

$=P\{X^2\geq Y+\frac{3}{2}\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=-1\}$

$=0.06+0.1=0.16.$

扫码使用
夸克扫描王

3-14. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} kx^2y, & x^2\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求:

(1) 常数k的值;

(2) 边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$;

(3) 条件概率密度$f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 判断X与Y是否相互独立.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} kx^2y\,dx = k\int_0^1 \frac{2}{3} y^{\frac{5}{2}} dy = \frac{4}{21}k = 1$

$\therefore k = \frac{21}{4}$

(2) ∵若$-1\le x\le 1$，对于固定的x，当$x^2\le y\le 1$时，$f(x,y)=\frac{21}{4}x^2y$，当$y<x^2$或$y>1$时

$f(x,y)=0$.

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{x^2} 0\,dy + \int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\,dy + \int_1^{+\infty} 0\,dy$

$= \frac{21}{8}x^2(1-x^4)$

若$x<-1$或$x>1$，对于任意的y，均有$f(x,y)=0$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy = 0$

$\therefore\ f_X(x)=\begin{cases} \frac{21}{8}x^2(1-x^4) & -1\le x\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(3) 当$-1<x<1$时，$f_X(x)>0$，在$X=x$的条件下的条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \frac{2y}{1-x^4} & x^2<y \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

当$0<y<1$时 $f_Y(y)>0$，在$Y=y$的条件下的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$为$=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \frac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}}, & -\sqrt{y}<x<\sqrt{y} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(4) ∵ $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$ ∴ X与Y不独立.

扫码使用
夸克扫描王

3-15. 设随机变量(X,Y)的分布律为:

$Y \backslash X$	-1	0	2	3
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

求:

(1) X,Y 的边缘分布律; (2) $P\{X=2\mid Y=2\}$;

(3) $P\{X+Y>2\}$; (4) X 与 Y 是否相互独立.

(2) $P\{X=2\mid Y=2\} = \dfrac{P\{X=2, Y=2\}}{P\{Y=2\}} = \dfrac{1}{5}$

(1)

X	-1	0	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	0	2
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

(3) $P\{X+Y>2\} = P\{X=2, Y=2\} + P\{X=3, Y=0\} + P\{X=3, Y=2\}$

$= \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

(4) $\because 0 = P\{X=-1, Y=0\} \neq P\{X=-1\}P\{Y=0\} = \frac{9}{64}$

$\therefore$ X与Y不相互独立.

3-18. 设随机变量 $X \sim b\left(1,\dfrac{2}{5}\right)$, 随机变量 $Y \sim N(1,4)$, 且 X,Y 相互独立, 求概率 $P\{X-Y\le 1\}$.

$\because X \sim b(1,\frac{2}{5})$ $\therefore$ X的分布律为

X	0	1
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

$P\{X-Y\le 1\} = P\{X=0\}P\{X-Y\le 1 \mid X=0\} + P\{X=1\}P\{X-Y\le 1 \mid X=1\}$

$= P\{X=0\}P\{Y\ge -1 \mid X=0\} + P\{X=1\}P\{Y\ge 0 \mid X=1\}$

$\because$ X与Y相互独立 $\therefore$ $P\{Y\ge -1 \mid X=0\} = P\{Y\ge -1\}$, $P\{Y\ge 0 \mid X=1\} = P\{Y\ge 0\}$

$\therefore P\{X-Y\le 1\} = P\{X=0\}P\{Y\ge -1\} + P\{X=1\}P\{Y\ge 0\}$

$\because Y \sim N(1,4)$ $\therefore$ $P\{Y\ge -1\} = P\{\frac{Y-1}{2} \ge \frac{-1-1}{2}\} = 1-\phi(-1) = \phi(1)$

$P\{Y\ge 0\} = P\{\frac{Y-1}{2} \ge \frac{0-1}{2}\} = 1-\phi(-\frac{1}{2}) = \phi(\frac{1}{2})$

$\therefore P\{X-Y\le 1\} = P\{X=0\}P\{Y\ge -1\} + P\{X=1\}P\{Y\ge 0\} = \frac{3}{5}\phi(1) + \frac{2}{5}\phi(\frac{1}{2}) \approx 0.78138$

扫码使用
夸克扫描王

班级　　　　　　　　姓名　　　　　　　　学号

第三章　第五节

3-15. 设随机变量 (X,Y) 的分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	0	2	3
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

求：(1) $M=\max\{X,Y\}$ 的分布律；　(2) $N=\min\{X,Y\}$ 的分布律；

(3) $Z=X^2-3Y$ 的分布律.

(1) $M=\max\{X,Y\}$ 的可能取值 $0,2,3$. 分布律

$M=\max\{X,Y\}$	0	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

(2) 可能取值为 $-1,0,2$，分布律：

$N=\min\{X,Y\}$	-1	0	2
p	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

(3) $Z=X^2-3Y$ 的可能取值 $-6,-5,-2,0,1,3,4,9$. 分布律：

$Z=X^2-3Y$	-6	-5	-2	0	1	3	4	9
p	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0

3-16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，Y 服从参数为 $\frac{1}{8}$ 的指数分布. 求：(1) 概率 $P\{X^2>Y\}$；　(2) $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(1) $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}e^{-\frac{y}{8}}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$\because$ X与Y相互独立　$\therefore f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}e^{-\frac{y}{8}}, & 0<x<1,\ y>0\\ 0 & 其他.\end{cases}$

$P\{X^2>Y\}=\iint\limits_{x^2>y} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left[\int_0^{x^2}\frac{1}{8}e^{-\frac{y}{8}}dy\right]dx=\int_0^1(1-e^{-\frac{x^2}{8}})dx$

$=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{8}}dx=1-2\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}}dx$

$=1-2\sqrt{2\pi}\left(\phi(\frac{1}{2})-\phi(0)\right)=1-\sqrt{2\pi}\left(2\phi(\frac{1}{2})-1\right)$

(2) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$　当 $0<x=z-y<1,\ y>0$ 时 $f_X(z-y)f_Y(y)\neq 0$；$z\le 0$ 时 $f_X(z-y)f_Y(y)=0$

当 $0<z<1$ 时 $f_Z(z)=\int_0^z\frac{1}{8}e^{-\frac{y}{8}}dy=1-e^{-\frac{z}{8}}$　当 $z\geq 1$ 时 $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}\frac{1}{8}e^{-\frac{y}{8}}dy=e^{-\frac{z-1}{8}}-e^{-\frac{z}{8}}$，$f_Z(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ 1-e^{-\frac{z}{8}} & 0<z<1\\ e^{-\frac{z-1}{8}}-e^{-\frac{z}{8}} & z\geq 1\end{cases}$

扫码使用
夸克扫描王

0

区间(0,1)上的均匀分布，Y 服从参数

(2) $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

$\frac{y}{8}$, $y>0$

, 其他

$(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}e^{-\frac{y}{8}}, & 0<x<1, y>0\\ 0 & 其他.\end{cases}$

$e^{-\frac{y}{8}}dy]dx=\int_0^1(1-e^{-\frac{x}{8}})dx$

$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}}dx$

$1-\sqrt{2\pi}(2\phi(\frac{1}{2})-1)$

$f_X(z-y)f_Y(y)=0$

$1, y>0$ 时 $f_X(z-y)f_Y(y)\neq 0$; $z\leq 0$ 时

$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}\frac{1}{8}e^{-\frac{y}{8}}dy=e^{-\frac{z-1}{8}}-e^{-\frac{z}{8}}$, $f_Z(z)=\begin{cases}0 & z\leq 0\\ 1-e^{-\frac{z}{8}} & 0<z<1\\ e^{-\frac{z-1}{8}}-e^{-\frac{z}{8}} & z\geq 1\end{cases}$

扫码使用
夸克扫描王

班级　　　　　　　　姓名　　　　　　　　学号

3-19. 设 X,Y 分别表示两只不同型号灯泡的寿命，X,Y 相互独立，它们的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad \text{和} \quad g(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度.　　∵ X, Y 相互独立

$$\therefore f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(zy)f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}ye^{-yz}2e^{-2y}dy=\int_0^{+\infty}2ye^{-(2+z)y}dy=\frac{2}{(2+z)^2}$$

当 $z\le 0$ 时 $f_Z(z)=0$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

3-20. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Z=XY$ 的概率密度.

当 $z>0$, $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}xe^{-x(1+\frac{z}{x})}dx$

$$=e^{-z}\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-z}$$

当 $z\le 0$ 时 $f_Z(z)=0$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

扫码使用
夸克扫描王

3-21. 对某种电子装备进行 4 次独立的观测，观测值记为 X_1,X_2,X_3,X_4，设它们均服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$．求：

(1) $Z=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ 的分布函数； (2) 概率 $P\{\max\{X_1,X_2,X_3,X_4\}>1\}$．

(1) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\max\{X_1,X_2,X_3X_4\}\le z\}$

$=(P\{X_1\le z\})^4=[\phi(\frac{z-1}{\sigma})]^4$

(2) $P\{\max\{X_1X_2X_3X_4\}>1\}=1-P\{\max\{X_1,X_2,X_3,X_4\}\le 1\}$

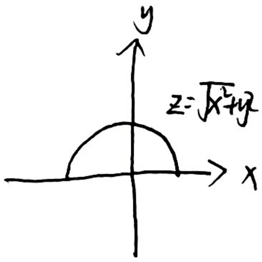
$=1-(P\{X_1\le 1\})^4=1-(P\{\frac{X_1-1}{\sigma}\le\frac{1-1}{\sigma}\})^4$

$=1-(\phi(0))^4=1-(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{16}$

3-22. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度．

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$

$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)\,dx\,dy$



当 $z>0$ 时 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $0\le r\le z$ $0\le\theta\le 2\pi$

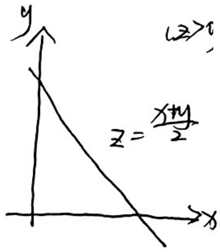
$F_Z(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z re^{-\frac{r^2}{2}}dr=1-e^{-\frac{z^2}{2}}$

当 $z\le 0$ 时 $f_Z(z)=0$ $\therefore F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

$\therefore f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases} ze^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0 \\ 0 & z\le 0\end{cases}$

扫码使用
夸克扫描王

3-23. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，求 $Z=\dfrac{X+Y}{2}$ 的概率密度.



$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\frac{X+Y}{2}\le z\}=P\{X+Y\le 2z\}$

$=\iint\limits_{x+y\le 2z} f(x,y)\,dxdy$

当 $x>0, y>0$ 时，$f(x,y)=e^{-(x+y)}$　其他情况均有 $f(x,y)=0$,

∴ 当 $z>0$ 时

$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le 2z} f(x,y)\,dxdy=\int_0^{2z}\left(\int_0^{2z-x} e^{-(x+y)}dy\right)dx$

$=1-e^{-2x}-2ze^{-2z}$

当 $z\le 0$ 时 $f_Z(z)=0$ ∴

$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases} 4ze^{-2z}, & z>0 \\ 0 & z\le 0. \end{cases}$

扫码使用
夸克扫描王

班级　　　　姓名　　　　学号

第四章 第一节

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

求 $E(X),E(X^2),E(3X^2+5)$.

$E(X)=(-2)\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$

$E(X^2)=(-2)^2\times0.4+0^2\times0.3+2^2\times0.3=2.8$

$E(3X^2+5)=3E(X^2)+5=13.4$

2. 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，求 $E(\frac{1}{X+1})$.

$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$\therefore E(\frac{1}{X+1})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$

$=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1)=\frac{1}{\lambda}-\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}$.

扫描全能王 创建

3．有两个相互独立工作的电子装置，它们的寿命 X_1, X_2（单位：小时）服从参数为 λ 的指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

(1) 若将这两个电子装置串联连接组成整机，求整机寿命 N 的数学期望；
(2) 若将这两个电子装置并联连接组成整机，求整机寿命 M 的数学期望．

(1) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

$\because$ 串联 $\therefore N=\min\{X_1,X_2\}$ 则 $F_N(z)=1-[1-F(z)]^2=\begin{cases}1-e^{-2\lambda z}, & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

$\therefore f_N(z)=F_N'(z)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda z}, & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

$\therefore E(N)=\int_{-\infty}^{+\infty} z f_N(z)\,dz=\int_0^{+\infty}2\lambda z e^{-2\lambda z}\,dz$

$=\frac{1}{2\lambda}$

4．袋中有 N 只球，其中的白球个数 X 为一随机变量，已知 $E(X)=n$，求从袋中任取一球得到的是白球的概率．

记 $A=\{$从袋中任取一球为白球$\}$

由全概率公式 $P(A)=\sum_{k=0}^{N}P\{A|X=k\}\cdot P\{X=k\}$

$=\sum_{k=0}^{N}\frac{k}{N}P\{X=k\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}kP\{X=k\}$

$=\frac{1}{N}E(X)=\frac{n}{N}$

扫描全能王 创建

5．某公司生产的机器其无故障工作时间 X (单位:万小时)是一个随机变量，其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x>1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

公司每出售一台机器可获利 1600 元，若机器售出后使用 1.2 万小时之内出现故障，则公司予以更换，更换一台机器公司需花费 2800 元；若在 1.2 万小时到 2 万小时内出现故障，则予以维修，维修一台机器公司需花费 400 元;若使用 2 万小时以后出现故障，则公司不予承担售后服务，求该公司售出每台机器的平均获利.

由题意知每台机器利润 Y 可取值为 -1200，1200，1600，

$P\{Y=-1200\}=P\{X<1.2\}=\int_1^{1.2}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{6}$

$P\{Y=1200\}=P\{1.2\le X<2\}=\int_{1.2}^{2}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{3}$

$P\{Y=1600\}=P\{X>2\}=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}$

Y	-1200	1200	1600
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$\therefore E(Y)=-1200\times\frac{1}{6}+1200\times\frac{1}{3}+1600\times\frac{1}{2}=1000$ (元)

扫描全能王 创建

6. 设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：$E(X),E(Y),E(XY),E(X^2+Y^2)$.

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x x\cdot 12y^2dy=\frac{4}{5}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x y\cdot 12y^2dy=\frac{3}{5}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 12y^2dy=\frac{1}{2}$

$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)\,dxdy$

$=\int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)\cdot 12y^2dy=\frac{16}{15}.$

扫描全能王 创建

班级　　　　　　姓名　　　　　　学号

7. 一个小班有 n 个同学，编号为$1,2,\cdots,n$，中秋节每人准备一件礼物，相应的编号为$1,2,\cdots,n$，将所有的礼物集中放在一起，然后每个同学随机取一件，若取到自己的礼物，就认为配对成功，以 X 表示 n 个同学配对成功的个数，求 $E(X)$.

$$X_i=\begin{cases}1, & 第i个取得第i个礼物\\ 0, & 其他\end{cases}\quad i=1,2,\cdots n.$$

X_i	0	1
P	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

又由 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 知

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=nE(X_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

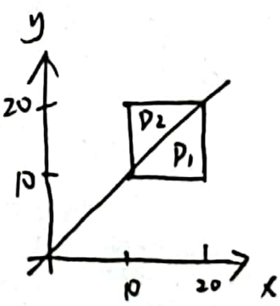
8. 某鲜肉经销店，每日进货量 X (单位: kg) 与顾客的需求量 Y (单位:kg) 是相互独立的随机变量，且都服从区间$(10,20)$上的均匀分布. 经销店每售出 1kg 鲜肉可得利润 10 元；若进货量超过了需求量，未售出的鲜肉由总店回收制作熟食，经销店不受损失；若需求量超过了进货量，经销店可从总店调剂供应，调剂的鲜肉每千克获利润 5 元，试计算鲜肉经销店每天所得利润的数学期望.

设T为一天内所得利润(元)

$$T=g(X,Y)=\begin{cases}10Y, & X>Y\\ 10X+5(Y-X), & X\le Y\end{cases}=\begin{cases}10Y & X>Y\\ 5(X+Y), & X\le Y\end{cases}$$

又 $E(T)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{100}, & 10\le x\le 20,\ 10\le y\le 20,\\ 0 & 其他\end{cases}$$



$$E(T)=\iint_{D_1}10y\cdot\frac{1}{100}dxdy+\iint_{D_2}5(x+y)\cdot\frac{1}{100}dxdy$$

$$=0.1\int_{10}^{20}dy\int_{y}^{20}y\,dx+0.05\int_{10}^{20}dy\int_{10}^{y}(x+y)dx$$

$$=0.1\int_{10}^{20}(20-y)y\,dy+0.05\int_{10}^{20}\left(\frac{3}{2}y^2-10y-50\right)dy$$

$$=\frac{200}{3}+5\times15\approx141.67\text{(元)}$$

扫描全能王 创建

9. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望.

$P\{X>\frac{\pi}{3}\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$, $Y\sim b(4,\frac{1}{2})$

$E(Y)=4\times\frac{1}{2}=2$ $D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})=1$

$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=5$

扫描全能王 创建

第四章 第二节

10. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，求：

$E(X),D(X)$.

$\because P\{X=1\}=P\{X=2\}$

$\therefore \lambda e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$　　$\lambda=2$

~~$\therefore E(X)=D(X)=2$~~

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}(k^2-k+k)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+E(X)=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

11. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ 2-kx, & 1\le x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求: (1)常数 k；　　(2) $E(X^2)$；　　(3) $D(X)$.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 x dx+\int_1^2(2-kx)dx=\frac{1}{2}+(2-\frac{3}{2}k)=1$　$\therefore k=1$

(2) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^3 dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\frac{7}{6}$

(3) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)dx=\int_0^1 x^2 dx+\int_1^2 x(2-x)dx=1$

$\therefore D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$=\frac{1}{6}$

扫描全能王 创建

12.设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(X)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a+b\arcsin x, & -1\le x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

求：a、b、$E(X)$、$D(X)$.

∵随机变量 x 是连续型随机变量

$$\therefore \begin{cases} a+b\arcsin(-1)=a-\frac{\pi}{2}b=0 \\ a+b\arcsin(1)=a+\frac{\pi}{2}b=1 \end{cases}$$ 解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{\pi} \end{cases}$

$$\therefore F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x, & -1\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$ $$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1\le x\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$E(X)=0$　　$D(X)=\frac{1}{2}$

13.设随机变量 X,Y 相互独立，其中 X 在[-2, 4]上服从均匀分布，Y 服从参数为 3 的泊松分布，求 $D(2X-Y)$.

$\cancel{E(X)}$　　$\cancel{\because E(X)=3}$　　$\cancel{\because E(}$

$E(X)=1$　$D(X)=3$

$E(Y)=3$　$D(Y)=3$

∵ X, Y 相互独立

$\therefore D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)$

$=15$

扫描全能王 创建

14.设随机变量 X,Y 相互独立且同分布，都服从 $N(2,4)$.

求：(1) $P\{X>Y\}$;　　　　　　　(2) $E(|X-Y|)$，$D(|X-Y|)$.

$Z=X-Y\sim N(0,8)$　　　$D(Z)=D(X)+D(Y)=\sigma^2=8$

(1) $P\{X>Y\}=P\{X-Y>0\}=P\{Z>0\}=\frac{1}{2}$

(2) $Z\sim N(0,8)$ 概率密度函数

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 8}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 8}},\ -\infty<z<+\infty$$

$$\therefore E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(z)dz$$

$$=2\int_0^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 8}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 8}}dz$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2\cdot 8}}dz$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-(z/4)^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}.$$

$$D(|X-Y|)=D(|Z|)=E(Z^2)-[E(|Z|)]^2$$

$$=D(Z)+[E(Z)]^2-[E(|Z|)]^2$$

$$=8+0-\frac{16}{\pi}=8-\frac{16}{\pi}.$$

扫描全能王 创建

班级　　　　　　　　姓名　　　　　　　　学号

第四章 第三节

15．设袋中装有 5 个白球、3 个红球．第一次从袋中任取一球不放回，第二次又从袋中任取两个球，设“第一次从袋中取得白球数”为随机变量 X，“第二次从袋中取得白球数”为随机变量 Y．求：

(1) X 与 Y 的联合分布律；　(2) $E(X),E(Y),E(3X+Y)$；　(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)$．

(1)

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{56}$	$\frac{10}{56}$	$\frac{10}{56}$
1	$\frac{5}{56}$	$\frac{20}{56}$	$\frac{10}{56}$

(2) $E(X)=0\times\left(\frac{1}{56}+\frac{10}{56}+\frac{10}{56}\right)+1\times\left(\frac{5}{56}+\frac{20}{56}+\frac{10}{56}\right)$

$=\frac{5}{8}$

$E(Y)=0\times\left(\frac{1}{56}+\frac{5}{56}\right)+1\times\left(\frac{10}{56}+\frac{20}{56}\right)+2\times\left(\frac{10}{56}+\frac{10}{56}\right)$

$=\frac{5}{4}$　　$E(3X+Y)=\frac{25}{8}$

(3)

XY	0	1	2
P	$\frac{26}{56}$	$\frac{20}{56}$	$\frac{10}{56}$

$E(XY)=\frac{5}{7}$

$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$=-\frac{15}{224}$

16．设 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}Ax, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，求：

(1) A；　(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)$．

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Ax\,dx\,dy=1$

$A=3$

(2) $E(X)=\int_0^1\int_0^x x\cdot 3x\,dy\,dx=\int_0^1 3x^3\,dx=\frac{3}{4}$

$E(Y)=\int_0^1\int_0^x y\cdot 3x\,dy\,dx=\int_0^1 \frac{3x^3}{2}\,dx=\frac{3}{8}$

$E(XY)=\int_0^1\int_0^x xy\cdot 3x\,dy\,dx=\int_0^1 \frac{3x^4}{2}\,dx=\frac{3}{10}$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{160}$

扫描全能王 创建

17. 设随机变量 X 与 Y 满足 $D(X)=2, D(Y)=4, \mathrm{Cov}(X,Y)=-1$，求：

$\mathrm{Cov}(3X+2Y-1, X-4Y+3)$.

$\mathrm{Cov}(3X+2Y-1, X-4Y-3) = \cancel{3D(X)+10\mathrm{Cov}(X,Y)-8D(Y)}$

$\cancel{=3\times2+10\times(-1)-8\times3=-28}$

$= \mathrm{Cov}(3X+2Y, X-4Y) = \mathrm{Cov}(3X,X)+\mathrm{Cov}(2Y,X)-\mathrm{Cov}(3X,4Y)-\mathrm{Cov}(2Y,4Y)$

$=3D(X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)-12\mathrm{Cov}(X,Y)-8D(Y)$

$=6-2+12-32=-16$

18. 设随机变量 X,Y 线性正相关，且 $D(X)=25$，$D(Y)=16$，求 $D(X-Y)$.

$\cancel{D(X-Y)=D(X)+D(Y)}$

∵ 随机变量 X,Y 线性正相关

∴ $\rho_{XY}=1$

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)$

$=D(X)+D(Y)-2\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\rho_{XY}$

$=25+16-2\times5\times4\times1$

$=1$

扫描全能王 创建

19．若二维随机变量(X,Y)的相关系数$\rho_{XY}=0$，则以下结论正确的是 B .

(A) X与Y相互独立　　　　(B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

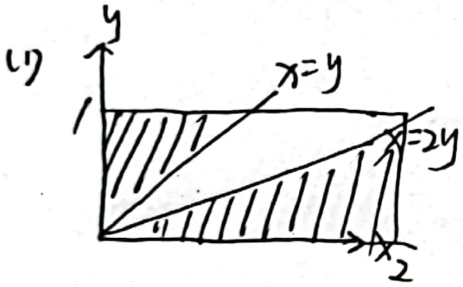
(C) X与Y互不相容　　　　(D) $D(X-Y)=D(X)-D(Y)$

20．设二维随机变量(X,Y)在矩形$G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le Y\le 1\}$上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y\\ 1, & X>Y\end{cases},\quad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y\\ 1, & X>2Y\end{cases}.$$

求：(1) U和V的联合分布；　　(2) U和V的相关系数ρ.

(1)



$P(X\le Y)=\frac14$　$P\{X>2Y\}=\frac12$　$P(Y<X\le 2Y)=\frac14$

~~(U,V)~~ $P\{U=0,V=0\}=\frac14$

$P\{U=0,V=1\}=0$　$P\{U=1,V=0\}=\frac14$

$P\{U=1,V=1\}=\frac12$

U \ V	0	1
0	$\frac14$	0
1	$\frac14$	$\frac12$

(2) ~~解~~ $E(U)=\frac34$　$D(U)=\frac{3}{16}$　$E(V)=\frac12$　$D(V)=\frac14$

$E(UV)=\frac12$

$Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac18$

$$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{1}{\sqrt3}$$

扫描全能王 创建

21．设随机变量 X_1 和 X_2 的分布律为

X_1	-1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X_2	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

并且 $P\{X_1X_2=0\}=1$．

(1) 求 X_1，X_2 的数学期望以及方差；(2) 求 (X_1,X_2) 的联合分布律；

(3) 求 $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$；(4) 判断 X_1，X_2 是否不相关，是否独立．

(1) $E(X_1)=0$ ~~D(X1)=~~ $E(X_1^2)=1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $D(X_1)=\frac{1}{2}$

$E(X_2)=\frac{1}{2}$ ~~D(X2)=~~ $E(X_2^2)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $D(X_2)=\frac{1}{4}$

(2) $P\{X_1X_2=0\}=1$ $X_1X_2=0$ 必然发生

$P(X_1,X_2)=P(X_1|X_2)P(X_2) \Rightarrow P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_2=0|X_1=-1\}P\{X_1=-1\}=\frac{1}{4}$

$\because P\{X_2=0|X_1=-1\}=1$

同理．$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_1=0|X_2=1\}P\{X_2=1\}=\frac{1}{2}$

$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{X_1=0\}-P\{X_1=0,X_2=1\}=0$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_2=0|X_1=1\}P\{X_1=1\}=\frac{1}{4}$

又$\because$ $P\{X_1=-1,X_2=1\}=0$，$P\{X_1=1,X_2=1\}=0$

X_1 \ X_2	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

(3) ~~E(X1X2)~~ $E(X_1X_2)=(-1)(1)\times0+(-1)\times0\times\frac{1}{4}$
$+0\times0\times0+0\times1\times\frac{1}{2}+1\times0\times\frac{1}{4}$
$+1\times1\times0=0$

$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=0$

(4) $P_{-1\,0}=\frac{1}{4}\neq P_{-1}\cdot P_{0}=\frac{1}{8}$

$\therefore X_1$ 与 X_2 不独立．

又 $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$ $\therefore \rho_{X_1X_2}=0$

$\therefore X_1,X_2$ 不相关

扫描全能王 创建

第四章　第四节

22．设随机变量(X,Y)的联合分布律为:

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0	0.2	0.1
1	0.3	0.4	0

求: (1) $E(X)$，$E(Y)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)$，ρ_{XY}，(X,Y)的协方差矩阵；(2) $D(X-Y)$．

(1) $E(X) = -1 \times 0.3 + 0 \times 0.6 + 1 \times 0.1 = -0.2$

$E(X^2) = (-1)^2 \times 0.3 + 0^2 \times 0.6 + 1^2 \times 0.1 = 0.4$

$E(Y) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.7 = 0.7$　$E(Y^2) = 0^2 \times 0.3 + 1^2 \times 0.7 = 0.7$

XY	-1	0	1
P	0.3	0.7	0

$\therefore D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.36$

$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 0.21$

$\therefore E(XY) = -1 \times 0.3 + 0 \times 0.7 + 1 \times 0 = -0.3$　$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0.16$

$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \approx -0.582$　(X,Y)的协方差矩阵 $\begin{pmatrix} D(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 & -0.16 \\ -0.16 & 0.21 \end{pmatrix}$

(2) 由(1) $D(X-Y) = D(X) + D(Y) - 2Cov(X,Y) = 0.36 + 0.21 - 2 \times (-0.16) = 0.89$.

23．已知(X,Y)的协方差矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，设$Z_1 = X - 2Y, Z_2 = 2X - Y$．求$Z_1, Z_2$的相关系数$\rho_{Z_1Z_2}$．

$D(X) = 1$，$D(Y) = 4$　$cov(X,Y) = 1$

$\therefore D(Z_1) = D(X-2Y) = D(X) + 4D(Y) - 4Cov(X,Y) = 13$

$D(Z_2) = D(2X-Y) = 4D(X) + D(Y) - 4Cov(X,Y) = 4$

又$\because$ $Cov(Z_1, Z_2) = Cov(X-2Y, 2X-Y)$

$= 2Cov(X,X) - 4Cov(Y,X) - Cov(X,Y) + 2Cov(Y,Y)$

$= 2D(X) - 5Cov(X,Y) + 2D(Y) = 5$

$\therefore \rho_{Z_1Z_2} = \frac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}} = \frac{5}{26}\sqrt{13}$

扫描全能王 创建

第五章 第一节

5-1. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=2$，方差 $D(X)=0.4$，根据契比雪夫不等式估计 $P\{1<X<3\}$.

$$P\{|X-E(X)| < \varepsilon\} \le 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

~~$P\{1<x<3\} = P\{|X-E$~~

$$P\{1<x<3\} = P\{|X-E(X)|\le 1\} \le 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1-\frac{0.4}{1} = 0.6$$

$$\therefore P\{1<X<3\} = 0.6$$

5-3. 设 X 是连续型随机变量，$E(e^{X^2})$ 存在，试证明对于任意的正数 ε，有 $P\{|X|\ge\varepsilon\}\le\frac{E(e^{X^2})}{e^{\varepsilon^2}}$.

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则

$$P\{|X|\ge\varepsilon\} = \int_{|x|\ge\varepsilon} f(x)\,dx \le \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{e^{x^2}}{e^{\varepsilon^2}} f(x)\,dx$$

$$\le \frac{1}{e^{\varepsilon^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} f(x)\,dx = \frac{E(e^{X^2})}{e^{\varepsilon^2}}.$$

扫描全能王 创建

5-4. 设随机变量序列$\{X_k\}$相互独立，且都服从期望为 2 的泊松分布，则当$n\to+\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$依概率收敛于多少？$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$依概率收敛于多少？

$E(Y_n)=E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k)=2$　　$E(Z_n)=E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2)=E(X_k^2)$

$=D(X_k)+[E(X_k)]^2=6.$

又由大数定律知 $Y_n\xrightarrow{P}E(Y_n)=2$，$Z_n\xrightarrow{P}E(Z_n)=6$.

5-6. 设有一机床制造一批零件，标准质量为 1 kg，假设每个零件的质量与标准质量的误差(单位：千克)服从(−0.05, 0.05)上的均匀分布，设每个零件的质量相互独立，求：(1) 制造 1200 个零件，总质量大于 1202 kg 的概率是多少？

(2) 最多可以制造多少个零件，使得零件质量误差总和的绝对值小于 2kg 的概率不小于 0.9.

(1) 设X_i表示第i个零件的质量，则$X_i\sim U(0.95, 1.05)$，

$\therefore$ $E(X_i)=1$　$D(X_i)=\frac{1}{1200}$，$i=1,2,\cdots,1200$.

$E(\sum_{i=1}^{1200}X_i)=1200$，$D(\sum_{i=1}^{1200}X_i)=1$

又由中心极限定理可近似认为

$\sum_{i=1}^{1200}X_i\sim N(1200,1)$.　则 $P\{\sum_{i=1}^{1200}X_i>1202\}=P\{\frac{\sum_{i=1}^{1200}X_i-1200}{\sqrt{1}}>\frac{1202-1200}{\sqrt{1}}\}$

(2) 设制造n个零件，~~$\sum_{i=1}^{n}$表示~~ $\therefore$ 总质量为$\sum_{i=1}^{n}X_i$. 且$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=n$，$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{n}{1200}$

由中心极限定理可近似认为$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n,\frac{n}{1200})$，

则 $P\{|\sum_{i=1}^{n}X_i-n|\le 2\}=P\{\frac{|\sum_{i=1}^{n}X_i-n|}{\sqrt{\frac{n}{1200}}}\le\frac{2}{\sqrt{\frac{n}{1200}}}\}\approx 2\phi(\frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{n}})-1$

扫描全能王 创建

班级 姓名 学号

5-7. 在一家保险公司里有 100000 个人参加保险，每人每年付 12 元保险费，在一年里每个人死亡的概率为0.001，并且假设每个人死亡之间相互独立，死亡时家属可向保险公司领得 10000 元，求：

(1) 保险公司一年的利润至少为 60000 元的概率；

(2) 保险公司亏本的概率.

(1) 由题意知，设在100000个人中死亡人数为 X，则 $X \sim b(100000, 0.001)$，

$E(X) = 100000 \times 0.001 = 100$. $D(X) = 100000 \times 0.001 \times 0.999 = 99.9$

又由中心极限定理知，二项分布的极限分布是正态分布，∴可近似认为 $X \sim N(100, 99.9)$

∴利润至少为60000元，则死亡人数概率满足

$$P\{X \leq 114\} = P\left\{\frac{X-100}{\sqrt{99.9}} \leq \frac{114-100}{\sqrt{99.9}}\right\} \approx \phi(1.4) \approx 0.9192.$$

(2) 要使保险公司亏本，则死亡人数概率满足

$$P\{X > 120\} = P\left\{\frac{X-100}{\sqrt{99.9}} > \frac{120-100}{\sqrt{99.9}}\right\} \approx 1-\phi(2) \approx 0.0228.$$

扫描全能王 创建

5-8. 某校有 1000 名学生，每人以 80%的概率去图书馆自习，问图书馆至少应设多少座位，才能以至少 99%的概率保证去上自习的同学都有座位.

设同时去图书馆上自习的人数为X，且图书馆至少设置n个座应，才能保证达到要求.

$X \sim b(1000, 0.8)$.

$E(X) = 1000 \times 0.8 = 800$ $D(X) = 1000 \times 0.8 \times 0.2 = 160$

由中心极限定理二项分布的极限分布是正态分布

$X \sim N(800, 160)$

$\therefore P\{X \le n\} = P\left\{\frac{X-800}{\sqrt{160}} \le \frac{n-800}{\sqrt{160}}\right\} \approx \phi\left(\frac{n-800}{4\sqrt{10}}\right)$.

$\phi\left(\frac{n-800}{4\sqrt{10}}\right) \geqslant 0.99$ 解得 $n \geqslant 829.5$ $n=830$

扫描全能王 创建

第六章 第一节、第二节

6-1. 在正态总体 $N(7.6, 4)$ 中抽取容量为 n 的样本，如果要求样本均值落在 $(5.6,9.6)$ 内的概率不小于 0.95，则样本容量 n 至少为多少？

$\bar{X} \sim N(7.6, 4)$ $\quad \frac{\bar{x}-7.6}{\sqrt{\frac{4}{n}}} \sim N(0,1)$

$P\{5.6<\bar{x}<9.6\} = P\left\{\frac{5.6-7.6}{\sqrt{\frac{4}{n}}} < \frac{\bar{x}-7.6}{\sqrt{\frac{4}{n}}} < \frac{9.6-7.6}{\sqrt{\frac{4}{n}}}\right\}$

$= P\left\{-\sqrt{n} < \frac{\bar{x}-7.6}{\sqrt{\frac{4}{n}}} < \sqrt{n}\right\} = \phi(\sqrt{n}) - \phi(-\sqrt{n})$

$= 2\phi(\sqrt{n}) - 1 \geq 0.95.$

$\therefore \phi\sqrt{n} \geq 0.975$

$\because \phi(1.96) \approx 0.975 \quad \therefore \sqrt{n} \geq 1.96$ 解得 $n \geq 3.84 \quad \therefore n=4$

6-3. $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，试讨论 $a\overline{X}+bX_{n+1}$ 和 $a\overline{X}+bX_n$ 的分布，其中 a, b 均为不为 0 的常数.

$\because \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，$X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且 $\bar{X}$ 与 X_{n+1} 相互独立.

则 $a\bar{X}+bX_{n+1} \sim N(a\mu+b\mu, \frac{a^2\sigma^2}{n}+b^2\sigma^2)$

$\because a\bar{X}+bX_n = a\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + bX_n = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{a}{n}X_n + bX_n$

$= \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + (\frac{a}{n}+b)X_n.$

$E(a\bar{X}+bX_n) = aE(\bar{X}) + bE(X_n) = a\mu+b\mu = (a+b)\mu$

$D(a\bar{X}+bX_n) = D\left(\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n-1} X_i + (\frac{a}{n}+b)X_n\right) = \frac{a^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} D(X_i) + (\frac{a}{n}+b)^2 D(X_n)$

$= \frac{a^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sigma^2 + (\frac{a}{n}+b)^2\sigma^2 = \frac{(n-1)a^2}{n^2} + (\frac{a}{n}+b)^2\sigma^2$

$= (\frac{a^2}{n}+b^2+\frac{2ab}{n})\sigma^2$

则 $a\bar{X}+bX_n \sim N((a+b)\mu, (\frac{a^2}{n}+b^2+\frac{2ab}{n})\sigma^2)$

扫描全能王 创建

6-4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，记 $\overline{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i$ $(1 \le k < n)$，求统计量 $\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k$ 的分布.

$$\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} X_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i = \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)\sum_{i=1}^{k} X_i + \frac{1}{k+1} X_{k+1}$$

$\because$ $\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的线性函数，又由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的且服从正态分布，所以 $\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k$ 服从正态分布.

又 $E(\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k) = E(\overline{X}_{k+1}) - E(\overline{X}_k) = \mu - \mu = 0$.

$$D(\overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k) = D\left[\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)\sum_{i=1}^{k} X_i + \frac{1}{k+1} X_{k+1}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)^2 \sum_{i=1}^{k} D(X_i) + \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 D(X_{k+1})$$

$$= \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)^2 \cdot k\sigma^2 + \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 \sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{k(k+1)},$$

$$\therefore \overline{X}_{k+1} - \overline{X}_k \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{k(k+1)}\right).$$

扫描全能王 创建

第六章 第三节、第四节

6-2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\sigma>0$，$Y=C_1(X_1+X_2)^2+C_2(X_3+X_4+X_5)^2$ 服从 χ^2 分布，试求常数 C_1，C_2 及 χ^2 分布的自由度.

$X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，$X_3+X_4+X_5\sim N(0,3\sigma^2)$

$\therefore \dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，$\dfrac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{3}\sigma}\sim N(0,1)$

且 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\dfrac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{3}\sigma}$ 相互独立　则 $\left(\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2+\left(\dfrac{X_3+X_4+X_5}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(2)$

即 $\dfrac{2}{2\sigma^2}(X_1+X_2)^2+\dfrac{1}{3\sigma^2}(X_3+X_4+X_5)^2\sim\chi^2(2)$

从而 $C_1=\dfrac{1}{2\sigma^2}$，$C_2=\dfrac{1}{3\sigma^2}$ 且 χ^2 分布的自由度为 2.

6-6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自总体 $N(2,4)$ 的样本，$\overline{X}$，S^2 分别是其样本均值和样本方差. 求 $P\{1<\overline{X}<3,\ 1.37<S^2<7.75\}$.

$\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$　$\overline{X}\sim N(2,\dfrac{4}{9})$　由于 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

得 $\dfrac{8S^2}{4}\sim\chi^2(8)$，即 $2S^2\sim\chi^2(8)$

$\because \overline{X}$ 与 S^2 相互独立

那么 $P\{1<\overline{X}<3,1.37<S^2<7.75\}=P\{1<\overline{X}<3\}P\{1.37<S^2<7.75\}$

$=P\left\{\dfrac{1-2}{2/3}<\dfrac{\overline{X}-2}{2/3}<\dfrac{3-2}{2/3}\right\}P\{2\times1.37<2S^2<2\times7.75\}$

$=P\left\{-\dfrac{3}{2}<\dfrac{\overline{X}-2}{2/3}<\dfrac{3}{2}\right\}P\{2.74<2S^2<15.5\}=\left[2\Phi\left(\dfrac{3}{2}\right)-1\right]\left[P\{2S^2<15.5\}-P\{2S^2\le2.74\}\right]$

查表知 上式 $\approx(2\times0.99332-1)[(1-0.05)-(1-0.95)]=0.8664\times0.9\approx0.7798$.

扫描全能王 创建

班级　　　　　　姓名　　　　　　学号

6-8. 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_8$ 是其样本，求下列统计量的分布：

(1) $T_1 = \dfrac{1}{2\sigma^2}[(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2]$；

(2) $T_2 = \dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{X_4^2+X_5^2+X_6^2}}$；

(3) $T_3 = \dfrac{(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2}{(X_5-X_6)^2+(X_7-X_8)^2}$.

(1) $X_1+X_2 \sim N(0,2\sigma^2)$，$X_3-X_4 \sim N(0,2\sigma^2)$

标准化 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$　　$\dfrac{X_3-X_4}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$

且 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\dfrac{X_3-X_4}{\sqrt{2}\sigma}$ 相互独立　由 χ^2 分布的定义知. $\left(\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2+\left(\dfrac{X_3-X_4}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(2)$

$T_1 = \dfrac{1}{2\sigma^2}[(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2] \sim \chi^2(2)$

(2) $X_1+X_2+X_3 \sim N(0,3\sigma^2)$ 标准化得 $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma} \sim N(0,1)$

又 $X_i \sim N(0,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$，$i=4,5,6$ 且相互独立，由 χ^2 分布的定义知

$\left(\dfrac{X_4}{\sigma}\right)^2+\left(\dfrac{X_5}{\sigma}\right)^2+\left(\dfrac{X_6}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(3)$　即 $\dfrac{X_4^2+X_5^2+X_6^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3)$

又 $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}$ 与 $\dfrac{X_4^2+X_5^2+X_6^2}{\sigma^2}$ 相互独立，根据 t 分布的定义知.

$$\frac{\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\sigma}}{\sqrt{\frac{X_4^2+X_5^2+X_6^2}{3\sigma^2}}} \sim t(3)$$　整理得 $T_2 = \dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{X_4^2+X_5^2+X_6^2}} \sim t(3)$

(3) 根据(1) $\dfrac{1}{2\sigma^2}[(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2] \sim \chi^2(2)$　$\dfrac{1}{2\sigma^2}[(X_5-X_6)^2+(X_7-X_8)^2] \sim \chi^2(2)$

相互独立. 根据F分布

$$\frac{\frac{1}{2\sigma^2}[(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2]/2}{\frac{1}{2\sigma^2}[(X_5-X_6)^2+(X_7-X_8)^2]/2} \sim F(2,2)$$

整理得 $T_3 = \dfrac{(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2}{(X_5-X_6)^2+(X_7-X_8)^2} \sim F(2,2)$

扫描全能王 创建

6-9. 设随机变量 $X \sim F(n,n)$，证明：$P\{X<1\}=0.5$.

之 $X \sim F(n,n)$，那么 $Y=\frac{1}{X} \sim F(n,n)$ ∴ X与Y同分布

$$\therefore P\{X>1\}=P\{Y>1\}=P\{\frac{1}{X}>1\}=P\{X<1\}$$

又之 $P\{X>1\}+P\{X<1\}=1$

$$\therefore P\{X>1\}=P\{X<1\}=0.5$$

6-10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，S^2 为样本方差，试求 $D(S^2)$.

之 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 则

$$D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1)$$

得 $D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

扫描全能王 创建

6-11. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，$A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 为此样本的二阶原点矩，证明：$E(A_2) = \sigma^2$，$D(A_2) = \frac{2\sigma^4}{n}$.

$$E(A_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sigma^2$$

$$D(A_2) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \{E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} (3\sigma^4 - \sigma^4) = \frac{2\sigma^4}{n}$$

扫描全能王 创建

6-12. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本,且 $Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i$, $Y_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i$, $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$, $Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$, 证明:统计量Z服从自由度为2的$t$分布.

依题意 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ 有

$Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6})$ $Y_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$

则 $Y_1 - Y_2 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2})$, 由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

得出 $\frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(Y_1 - Y_2)}{\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2 2}}} \sim t(2) \qquad \text{即 } Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} \sim t(2)$$

扫描全能王 创建

6-13. 设总体 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，$\bar{X}$，S^2 分别为样本均值和样本方差，试求 $E(\bar{X}),D(\bar{X}),E(S^2)$.

$$E(\bar{X})=E(X)=\int_0^1 x\cdot 6x(1-x)\,dx=\frac{1}{2}$$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot 6x(1-x)\,dx=\frac{3}{10}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

$$D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{1}{20n}$$

$$E(S^2)=D(X)=\frac{1}{20}$$

扫描全能王 创建