概率论与数理统计

概率论与数理统计教研团队[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

2024 年　春

大工至善
大学至真

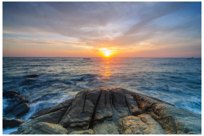
哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

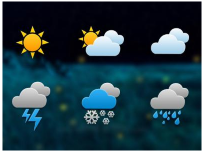
目　录

随机试验、样本空间、随机事件

问题引出

自然界和现实生活中的现象.



- **确定性现象**
- **不确定性现象**

概率论与数理统计——研究随机现象统计规律的数学分支.

随机试验

E1 **抛一枚硬币, 观察其出现正面 H、反面 T 的情况.**

随机试验

E1 抛一枚硬币，观察其出现正面 H、反面 T 的情况.

E2 抛一颗骰子，观察其出现的点数.

随机试验

E1 抛一枚硬币, 观察其出现正面 H、反面 T 的情况.

E2 抛一颗骰子, 观察其出现的点数.

E3 抛一颗骰子, 观察点数 2 是否出现.

随机试验

E1 抛一枚硬币, 观察其出现正面 H、反面 T 的情况.

E2 抛一颗骰子, 观察其出现的点数.

E3 抛一颗骰子, 观察点数 2 是否出现.

E4 记录车站售票处一天内售出的车票数.

随机试验

E1 抛一枚硬币, 观察其出现正面 H、反面 T 的情况.

E2 抛一颗骰子, 观察其出现的点数.

E3 抛一颗骰子, 观察点数 2 是否出现.

E4 记录车站售票处一天内售出的车票数.

E5 任取同一生产线上生产的一只灯泡, 测试其寿命.

随机试验

E1 抛一枚硬币, 观察其出现正面 H、反面 T 的情况.

E2 抛一颗骰子, 观察其出现的点数.

E3 抛一颗骰子, 观察点数 2 是否出现.

E4 记录车站售票处一天内售出的车票数.

E5 任取同一生产线上生产的一只灯泡, 测试其寿命.

E6 在 $[0, 1]$ 之间随机取一点, 记录其值.

定义 1 (随机试验)

- 可以在相同条件下重复进行

定义 1 (随机试验)

- **可以在相同条件下重复进行**
- **在进行一次试验之前，不能事先确定试验的哪个结果会出现**

定义 1 (随机试验)

- 可以在相同条件下重复进行
- 在进行一次试验之前，不能事先确定试验的哪个结果会出现
- 试验的全部可能结果是已知的

定义 1 (随机试验)

- 可以在相同条件下重复进行
- 在进行一次试验之前, 不能事先确定试验的哪个结果会出现
- 试验的全部可能结果是已知的

用字母 E 表示随机试验, 通过研究随机试验来研究随机现象.

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S.
样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. 抛一枚硬币, 观察其出现正面 H、反面 T 的情况.

样本空间

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S. 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$

样本空间

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S. 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
2. **抛一颗骰子, 观察其出现的点数.**

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S. 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
2. $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

样本空间

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S.
样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
2. $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. 抛一颗骰子, 观察点数 2 是否出现.

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S.
样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
2. $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $S_3 = \{$ 出现, 不出现 $\}$

样本空间

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S. 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
2. $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $S_3 = \{$ 出现, 不出现 $\}$
4. 记录车站售票处一天内售出的车票数.

样本空间

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S. 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
2. $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $S_3 = \{$ **出现, 不出现** $\}$
4. $S_4 = \{x | x \in \mathbb{N}\}$

样本空间

定义 2 (样本空间)

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S. 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
2. $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $S_3 = \{$ **出现, 不出现** $\}$
4. $S_4 = \{x | x \in \mathbb{N}\}$
5. **任取同一生产线上生产的一只灯泡, 测试其寿命.**

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S. 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
2. $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $S_3 = \{$ **出现, 不出现** $\}$
4. $S_4 = \{x | x \in \mathbb{N}\}$
5. $S_5 = \{t | t \geq 0\}$

样本空间

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S. 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
2. $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $S_3 = \{$ **出现, 不出现** $\}$
4. $S_4 = \{x | x \in \mathbb{N}\}$
5. $S_5 = \{t | t \geq 0\}$
6. **在** $[0, 1]$ **之间随机取一点, 记录其值.**

定义 2 (样本空间)
随机试验 E 的所有可能结果组成的集合, 称为 E 的样本空间, 记为 S. 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点, 记为 e_i.

1. $S_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$
2. $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $S_3 = \{$ **出现, 不出现** $\}$
4. $S_4 = \{x | x \in \mathbb{N}\}$
5. $S_5 = \{t | t \geq 0\}$
6. $S_6 = \{y | y \in [0, 1]\}$

- **样本点基本属性**
  1. **互斥性: 无论哪两个样本点都不会在同一次试验中出现.**
  2. **完备性: 每次试验一定会出现某一个样本点.**

- **样本点基本属性**
  1. **互斥性: 无论哪两个样本点都不会在同一次试验中出现.**
  2. **完备性: 每次试验一定会出现某一个样本点.**

- **样本空间的特点**
  1. **样本空间中的样本点可以有限个、也可以无穷多个.**
  2. **样本空间中的样本点可以是数、也可以不是数.**
  3. **样本空间与试验目的有关.**

随机事件

定义 3 (随机事件)
设随机试验 E 的样本空间 S 的子集为随机事件，简称事件. 用 $A, B, C\cdots$ 表示：

1. 基本事件：一个样本点组成的单点集。
2. 必然事件：每次试验一定发生的事件，记为 S
3. 不可能事件：每次试验都不能发生的事件，记为 $\varnothing$

随机事件

定义 3 (随机事件)
设随机试验 E 的样本空间 S 的子集为随机事件，简称事件. 用 $A, B, C \cdots$ 表示:

1. 基本事件：一个样本点组成的单点集。
2. 必然事件：每次试验一定发生的事件，记为 S
3. 不可能事件：每次试验都不能发生的事件，记为 $\varnothing$

定义 3 (随机事件)
设随机试验 E 的样本空间 S 的子集为随机事件，简称事件. 用 $A, B, C \cdots$ 表示:

1. 基本事件：一个样本点组成的单点集。
2. 必然事件：每次试验一定发生的事件，记为 S
3. 不可能事件：每次试验都不能发生的事件，记为 $\varnothing$

事件的关系及运算

- $A \subset B$　B 包含 A，A 发生导致 B 发生.

事件的关系及运算

- $A \subset B$　B 包含 A，A 发生导致 B 发生.
- $A = B$　A 与 B 相等，A 与 B 为同一事件.

事件的关系及运算

- $A \subset B$　B 包含 A，A 发生导致 B 发生.
- $A = B$　A 与 B 相等，A 与 B 为同一事件.
- $A \cup B$　A 与 B 的和事件，A 与 B 至少有一个发生.

事件的关系及运算

- $A \subset B$　B 包含 A，A 发生导致 B 发生.
- $A = B$　A 与 B 相等，A 与 B 为同一事件.
- $A \cup B$　A 与 B 的和事件，A 与 B 至少有一个发生.
- $A \cap B$　A 与 B 的积事件，A 与 B 同时发生.

事件的关系及运算

- $A \subset B$　B 包含 A，A 发生导致 B 发生.
- $A = B$　A 与 B 相等，A 与 B 为同一事件.
- $A \cup B$　A 与 B 的和事件，A 与 B 至少有一个发生.
- $A \cap B$　A 与 B 的积事件，A 与 B 同时发生.
- $A - B$　A 与 B 的差事件，A 发生且 B 不发生.

事件的关系及运算

- $A \subset B$　B 包含 A，A 发生导致 B 发生.
- $A = B$　A 与 B 相等，A 与 B 为同一事件.
- $A \cup B$　A 与 B 的和事件，A 与 B 至少有一个发生.
- $A \cap B$　A 与 B 的积事件，A 与 B 同时发生.
- $A - B$　A 与 B 的差事件，A 发生且 B 不发生.
- $AB = \varnothing$　A 与 B 互不相容，A 与 B 不能同时发生.

事件的关系及运算

- $A \subset B$　B 包含 A，A 发生导致 B 发生.
- $A = B$　A 与 B 相等，A 与 B 为同一事件.
- $A \cup B$　A 与 B 的和事件，A 与 B 至少有一个发生.
- $A \cap B$　A 与 B 的积事件，A 与 B 同时发生.
- $A - B$　A 与 B 的差事件，A 发生且 B 不发生.
- $AB = \varnothing$　A 与 B 互不相容，A 与 B 不能同时发生.
- $A \cup B = S, AB = \varnothing$　A 与 B 对立事件，$A = \overline{B}$，$B = \overline{A}$.

事件的运算

- **交换律**

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

事件的运算

- **交换律**

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

- **结合律**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

事件的运算

- **交换律**

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

- **结合律**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

- **分配率**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

事件的运算

- **交换律**

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

- **结合律**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

- **分配率**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- **德摩根律**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

例 1

设箱子中有 4 个球，标号分别为 1,2,3,4，其中 1,2 号为红球，3,4 号为黑球，现在箱中任取两球，事件 A 表示“两个球均为红色”，事件 B 表示“两个球均不是红色”，事件 C 表示“两个球不全是红色”

(1) 分别写出样本空间 S 及事件 A, B, C;

(2) 判断事件 A 与事件 B 是否互不相容，是否对立？判断事件 A 与事件 C 是否互不相容，是否对立？

(3) 判断说法“若事件 B 发生必导致事件 C 发生”是否正确？

例 2

设 A,B,C 为 3 个事件，请用 A,B,C 表示下列事件。

(1) A 发生，B 与 C 都不发生;

(2) A,B,C 中至少有一个发生;

(3) A 与 B 都发生而 C 不发生;

(4) A,B,C 都发生;

(5) A,B,C 都不发生;

(6) A,B,C 至少有两个发生;

(7) A,B,C 中不多于两个发生.

例 3

化简下列事件

(1) $AB \cup A\overline{B}$;

(2) $A\overline{B} \cup \overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B}$.

随机事件的概率

概率的定义

对于随机事件 A, 我们关心随机事件 A 发生与否, 以及以多大的可能性发生, 这种可能性的大小称之为事件 A 发生的概率, 记作 $P(A)$. 在概率论发展的历史上, 曾有过概率的古典定义、概率的几何定义、概率的频率定义和概率的主观定义.

定义 4 (古典概型)

若随机试验 E 满足以下条件:

(1) 样本空间含有有限个样本点, 即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$.

(2) 每个样本点出现的可能性相同, 即基本事件发生的可能性相等

$P\{e_1\}=P\{e_2\}=\cdots=P\{e_n\}$

则称这类随机现象的数学模型为古典概型.

古典概型是概率论发展早期确定概率常用的方法, 若事件 A 含有 k 个样本点, 则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{所含样本点的个数}}{\text{样本空间}S\text{中所含样本点的个数}}$$

例 1

某学习小组有 3 名男生和 2 名女生, 老师随机点名两次.

(1) 设事件 A_1 为 “两次点到同一名同学” , 求 $P(A_1)$;

(2) 设事件 A_2 为 “两次点到的均是男同学” , 求 $P(A_2)$;

(3) 设事件 A_3 为 “两次点到同学性别不同” , 求 $P(A_3)$.

例 1

某学习小组有 3 名男生和 2 名女生, 老师随机点名两次.

(1) 设事件 A_1 为“两次点到同一名同学”, 求 $P(A_1)$;

(2) 设事件 A_2 为“两次点到的均是男同学”, 求 $P(A_2)$;

(3) 设事件 A_3 为“两次点到同学性别不同”, 求 $P(A_3)$.

解：(1) 样本空间为两次点名的所有可能结果, 共计 $5^2=25$, 两次点到同一名同学有 5 种可能的结果, 所以有

$$P(A_1)=\frac{5}{5^2}=\frac{1}{5}$$

例 1

某学习小组有 3 名男生和 2 名女生, 老师随机点名两次.

(1) **设事件 A_1 为“两次点到同一名同学”, 求 $P(A_1)$;**

(2) **设事件 A_2 为“两次点到的均是男同学”, 求 $P(A_2)$;**

(3) **设事件 A_3 为“两次点到同学性别不同”, 求 $P(A_3)$.**

(2) 两次点到的均是男同学有 $3 \times 3 = 9$ 种可能的结果, 所以有

$$P(A_2) = \frac{9}{5^2} = \frac{9}{25}$$

例 1

某学习小组有 3 名男生和 2 名女生, 老师随机点名两次.

(1) **设事件 A_1 为“两次点到同一名同学”, 求 $P(A_1)$;**

(2) **设事件 A_2 为“两次点到的均是男同学”, 求 $P(A_2)$;**

(3) **设事件 A_3 为“两次点到同学性别不同”, 求 $P(A_3)$.**

(3) 两次均为男同学的样本点 3^2 个, 两次均为女生的样本点 2^2 个, 事件 A_3 包含的样本点 $25-9-4$ 个, 因此

$$P(A_3)=\frac{12}{25}=0.48$$

例 2

箱子中有 3 个红球和 7 个黑球, 从中随机取两次, 每次取一个球. 考虑两种情形:

(1) 第一次取出后不放回箱中, 第二次从剩余的球中再取一个, 这种方式称为无放回抽样;

(2) 第一次取出球记录颜色后放回箱中, 第二次再从箱中取一个, 这种方式称为有放回抽样.

试分别就上述两种情形, 求事件 A “第 I 次为红球, 第 2 次为黑球”的概率; 和事件 B “两次均为红球”的概率.

箱子中有 3 个红球和 7 个黑球

解：(1) 无放回抽样

样本空间 S 含样本点 $A_{10}^{2} = 10 \times 9 = 90$ 个, 每一个样本点表示一种取法, 样本点等可能出现, 适用古典概型.

解：(1) 无放回抽样
样本空间 S 含样本点 $A_{10}^{2}=10\times 9=90$ 个, 每一个样本点表示一种取法, 样本点等可能出现, 适用古典概型.

事件 A 含样本点 3×7 个, 则

解：(1) 无放回抽样

样本空间 S 含样本点 $A_{10}^{2} = 10 \times 9 = 90$ 个, 每一个样本点表示一种取法, 样本点等可能出现, 适用古典概型.

事件 A 含样本点 3×7 个, 则

$$P(A) = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

箱子中有 3 个红球和 7 个黑球

解：(1) 无放回抽样
样本空间 S 含样本点 $A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$ 个, 每一个样本点表示一种取法, 样本点等可能出现, 适用古典概型.

事件 A 含样本点 3×7 个, 则

$$P(A) = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

事件 B 含样本点 $A_3^2 = 3 \times 2$ 个, 则

箱子中有 3 个红球和 7 个黑球

解：(1) 无放回抽样

样本空间 S 含样本点 $A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$ 个, 每一个样本点表示一种取法, 样本点等可能出现, 适用古典概型.

事件 A 含样本点 3×7 个, 则

$$P(A) = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

事件 B 含样本点 $A_3^2 = 3 \times 2$ 个, 则

$$P(B) = \frac{A_3^2}{A_{10}^2} = \frac{1}{15}$$

箱子中有 3 个红球和 7 个黑球

(2) 有放回抽样

样本空间 S 含样本点 $10^2 = 100$ 个, 每一个样本点表示一种取法, 样本点等可能出现, 适用古典概型.

箱子中有 3 个红球和 7 个黑球

(2) 有放回抽样

样本空间 S 含样本点 $10^2 = 100$ 个, 每一个样本点表示一种取法, 样本点等可能出现, 适用古典概型.

事件 A 含样本点 $A_3^1 \times A_7^1 = 21$ 个, 则

箱子中有 3 个红球和 7 个黑球

(2) 有放回抽样

样本空间 S 含样本点 $10^2 = 100$ 个, 每一个样本点表示一种取法, 样本点等可能出现, 适用古典概型.

事件 A 含样本点 $A_3^1 \times A_7^1 = 21$ 个, 则

$$P(A) = \frac{A_3^1 \times A_7^1}{10^2} = \frac{21}{100}$$

(2) 有放回抽样

样本空间 S 含样本点 $10^2 = 100$ 个, 每一个样本点表示一种取法, 样本点等可能出现, 适用古典概型.

事件 A 含样本点 $A_3^1 \times A_7^1 = 21$ 个, 则

$$P(A) = \frac{A_3^1 \times A_7^1}{10^2} = \frac{21}{100}$$

事件 B 含样本点 $3 \times 3 = 9$ 个, 则

箱子中有 3 个红球和 7 个黑球

(2) 有放回抽样

样本空间 S 含样本点 $10^2 = 100$ 个, 每一个样本点表示一种取法, 样本点等可能出现, 适用古典概型.

事件 A 含样本点 $A_3^1 \times A_7^1 = 21$ 个, 则

$$P(A) = \frac{A_3^1 \times A_7^1}{10^2} = \frac{21}{100}$$

事件 B 含样本点 $3 \times 3 = 9$ 个, 则

$$P(B) = \frac{9}{100}$$

例 3

设有 n 个球, 每个球都等可能地被放入到 N 个盒子中（设盒子的容量不限）. 试求:

(1) **每个盒子中至多有 1 个球的概率;**

(2) **至少有 2 个球在同一个盒子的概率;**

(3) **某指定的盒子中有 $m(m \leq n)$ 个球的概率.**

例 3

设有 n 个球, 每个球都等可能地被放入到 N 个盒子中（设盒子的容量不限）. 试求:

(1) 每个盒子中至多有 1 个球的概率;

(2) 至少有 2 个球在同一个盒子的概率;

(3) 某指定的盒子中有 $m(m \leq n)$ 个球的概率.

解:(1) 设样本空间 S 为球放入到盒子中的所有可能放法, 共有 N^n, 每一种放法是等可能的. 事件 A 表示"每个盒子中至多有 1 个球", 事件 A 有 $A_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$ 中放法, 因此

$$P(A) = \frac{A_N^n}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

例 3

设有 n 个球, 每个球都等可能地被放入到 N 个盒子中（设盒子的容量不限）. 试求:

(1) **每个盒子中至多有 1 个球的概率;**

(2) **至少有 2 个球在同一个盒子的概率;**

(3) **某指定的盒子中有 $m(m \leq n)$ 个球的概率.**

或者, 设事件 A 表示 "每个盒子中至多有 1 个球", 首先在 N 个盒子里选出 n 个盒子, 共有 C_N^n 种选法, 对于选定的 n 个盒子, 每个盒子各放 1 个球, 有 $n!$ 中方法, 因此

$$P(A) = \frac{n!C_N^n}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

例 3

设有 n 个球, 每个球都等可能地被放入到 N 个盒子中（设盒子的容量不限）．试求：

(1) **每个盒子中至多有 1 个球的概率;**

(2) **至少有 2 个球在同一个盒子的概率;**

(3) **某指定的盒子中有 $m(m \leq n)$ 个球的概率.**

(2) 事件 A 的对立事件 $\bar{A}$ 即表示“至少有 2 个球在同一个盒子”，因此

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

例 3

设有 n 个球, 每个球都等可能地被放入到 N 个盒子中（设盒子的容量不限）. 试求:

(1) **每个盒子中至多有 1 个球的概率;**

(2) **至少有 2 个球在同一个盒子的概率;**

(3) **某指定的盒子中有 $m(m \leq n)$ 个球的概率.**

(3) 设事件 B 表示 "某指定的盒子中有 m 个球", 从 n 个球里选出 m 个球共有 C_n^m 种选球方法, 剩余 $n-m$ 个球可任意放入 $N-1$ 个盒子中, 共有 $(N-1)^{n-m}$ 中放法, 因此

$$P(B) = \frac{C_n^m (N-1)^{n-m}}{N^n}$$

例 4 生日问题

设每个人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的，随机取 $n(n \leq 365)$ 个人，试求：

(1) n **个人的生日各不相同的概率；**

(2) n **个人中至少有两个人的生日在同一天的概率.**

例 4 生日问题

设每个人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的, 随机取 $n(n \leq 365)$ 个人, 试求:

(1) n **个人的生日各不相同的概率;**

(2) n **个人中至少有两个人的生日在同一天的概率.**

解: (1) 直接运用例 3 的结果可知, n 个人的生日各不相同的概率为

$$\frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

例 4 生日问题

设每个人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的, 随机取 $n(n \le 365)$ 个人, 试求:

(1) n **个人的生日各不相同的概率;**

(2) n **个人中至少有两个人的生日在同一天的概率.**

解: (1) 直接运用例 3 的结果可知, n 个人的生日各不相同的概率为

$$\frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)}{365^n}$$

(2) n 个人中, 至少有两个人的生日相同的概率为

$$1-\frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)}{365^n}$$

例 4 生日问题

设每个人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的, 随机取 $n(n \leq 365)$ 个人, 试求:

(1) n 个人的生日各不相同的概率;

(2) n 个人中至少有两个人的生日在同一天的概率.

若班级有 50 人, 至少有两个人的生日相同的概率为 0.97;

若班级有 100 人, 至少有两个人的生日相同的概率为 0.9999997.

—— “直觉” 并不总是可靠!

例 5

袋中有三个盒子, 第一个盒子中有两个红球, 第二个盒子中有一个红球和一个白球, 第三个盒子中有两个白球, 现随机从袋子中取出一球, 观察此球为红球, 问与其同一盒子中的另一个球也是红球的概率?

例 5

袋中有三个盒子, 第一个盒子中有两个红球, 第二个盒子中有一个红球和一个白球, 第三个盒子中有两个白球, 现随机从袋子中取出一球, 观察此球为红球, 问与其同一盒子中的另一个球也是红球的概率?

分析: 由于已知取出的是红球, 球只能是从第一个盒子或者是第二个盒子取出, 所以样本空间为 $S = \{$第一个盒子, 第二个盒子$\}$. 而与其同一盒子中的另一个球也是红球, 说明取到的是第一个盒子, 用事件 A 表示, 即 $A = \{$第一个盒子$\}$, 因此概率为

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

例 5

袋中有三个盒子, 第一个盒子中有两个红球, 第二个盒子中有一个红球和一个白球, 第三个盒子中有两个白球, 现随机从袋子中取出一球, 观察此球为红球, 问与其同一盒子中的另一个球也是红球的概率?

分析：由于已知取出的是红球, 球只能是从第一个盒子或者是第二个盒子取出, 所以样本空间为 $S = \{$第一个盒子, 第二个盒子$\}$. 而与其同一盒子中的另一个球也是红球, 说明取到的是第一个盒子, 用事件 A 表示, 即 $A = \{$第一个盒子$\}$, 因此概率为

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

分析错误, 你能否找到原因?

例 5

袋中有三个盒子, 第一个盒子中有两个红球, 第二个盒子中有一个红球和一个白球, 第三个盒子中有两个白球, 现随机从袋子中取出一球, 观察此球为红球, 问与其同一盒子中的另一个球也是红球的概率?

解: 将袋中的 6 个球编号, 第一盒中两个红球为 1 号和 2 号; 第二盒子中红球为 3 号, 白球为 4 号. 由于已知取出的是红球, 球只能是 1, 2, 3 号, 所以样本空间为 $S=\{1\text{ 号球}, 2\text{ 号球}, 3\text{ 号球}\}$, 且每个样本点出现是等可能的.

例 5

袋中有三个盒子, 第一个盒子中有两个红球, 第二个盒子中有一个红球和一个白球, 第三个盒子中有两个白球, 现随机从袋子中取出一球, 观察此球为红球, 问与其同一盒子中的另一个球也是红球的概率?

解：将袋中的 6 个球编号, 第一盒中两个红球为 1 号和 2 号; 第二盒子中红球为 3 号, 白球为 4 号. 由于已知取出的是红球, 球只能是 1, 2, 3 号, 所以样本空间为 $S=\{1$ 号球, 2 号球, 3 号球$\}$, 且每个样本点出现是等可能的. 与其同一盒子中的另一个球也是红球, 说明取到的 1 号球或者是 2 号球, 用事件 $A=\{1$ 号球, 2 号球$\}$ 表示, 于是与其同一盒子中的另一个球也是红球的概率是

$$P(A)=\frac{2}{3}$$

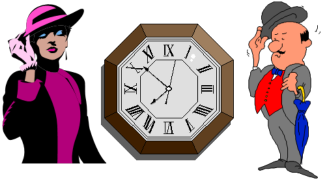
概率的几何定义方法

2014 年 7 月 5 日, 西班牙巴塞罗那机场上演惊险一幕. 一架即将落地的俄罗斯客机突然发现跑道上冒出一架阿根廷客机, 幸好飞行员反应及时才避免惨案发生.

概率的几何定义方法

2014 年 7 月 5 日, 西班牙巴塞罗那机场上演惊险一幕. 一架即将落地的俄罗斯客机突然发现跑道上冒出一架阿根廷客机, 幸好飞行员反应及时才避免惨案发生.

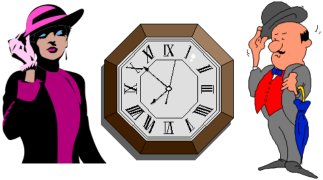
甲乙二人相约在 0 到 T 这段时间内, 在预定地点会面. 到达时刻是等可能的, 先到的人等候另一人, 经过时间 $t(t \leq T)$ 后离去, 甲乙二人能会面的概率时多少呢?



概率的几何定义方法

2014 年 7 月 5 日, 西班牙巴塞罗那机场上演惊险一幕. 一架即将落地的俄罗斯客机突然发现跑道上冒出一架阿根廷客机, 幸好飞行员反应及时才避免惨案发生.

甲乙二人相约在 0 到 T 这段时间内, 在预定地点会面. 到达时刻是等可能的, 先到的人等候另一人, 经过时间 $t(t \leq T)$ 后离去, 甲乙二人能会面的概率时多少呢?



当样本空间所含样本点数目是无限时, 即使基本事件等可能发生, 古典概型也不再适用这一类随机现象. 针对古典概型的局限性, 可以修改度量样本点数目的方式, 得到几何概型.

定义 5 (几何概型)

若随机试验 E 满足以下条件:

(1) 样本空间 S 为一个可度量的区域, 其度量 (如长度、面积、体积等) 记为 $m(S)$;

(2) 向区域内任意投掷一点, 该点落在区域内的任一处都是 “等可能的”, 或者落在 S 中区域 A 的可能性与 A 的度量 $m(A)$ 成正比, 且与与 A 的位置和形状无关.

称这类随机现象的数学模型为几何概型.

定义 5 (几何概型)

若随机试验 E 满足以下条件:

(1) 样本空间 S 为一个可度量的区域, 其度量 (如长度、面积、体积等) 记为 $m(S)$;

(2) 向区域内任意投掷一点, 该点落在区域内的任一处都是 "等可能的", 或者落在 S 中区域 A 的可能性与 A 的度量 $m(A)$ 成正比, 且与与 A 的位置和形状无关.

称这类随机现象的数学模型为几何概型.

几何概型中事件 A 发生的概率为:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)}$$

例 6(会面问题)

甲乙二人相约在 0 到 T 这段时间内, 在预定地点会面. 到达时刻是等可能的, 先到的人等候另一人, 经过时间 $t(t \leq T)$ 后离去, 求甲乙二人能会面的概率.

例 6(会面问题)

甲乙二人相约在 0 到 T 这段时间内, 在预定地点会面. 到达时刻是等可能的, 先到的人等候另一人, 经过时间 $t(t \leq T)$ 后离去, 求甲乙二人能会面的概率.

解：设 x, y 分别表示甲乙二人到达的时刻, 则样本空间为：

$$S=\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}.$$

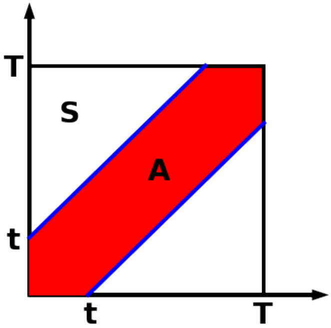
设事件 A 表示甲乙二人能够会面, 则事件 A 可表示为

$$A=\{(x, y) \mid |x-y| \leq t\}.$$

例 6(会面问题)

甲乙二人相约在 0 到 T 这段时间内, 在预定地点会面. 到达时刻是等可能的, 先到的人等候另一人, 经过时间 $t(t \leq T)$ 后离去, 求甲乙二人能会面的概率.

样本空间 S 和事件 A 在坐标平面上表示的区域为



例 6(会面问题)

甲乙二人相约在 0 到 T 这段时间内, 在预定地点会面. 到达时刻是等可能的, 先到的人等候另一人, 经过时间 $t(t \leq T)$ 后离去, 求甲乙二人能会面的概率.

解: 设 x, y 分别表示甲乙二人到达的时刻, 则样本空间为:

$$S = \{(x, y) | 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}.$$

设事件 A 表示甲乙二人能够会面, 则事件 A 可表示为

$$A = \{(x, y) | \, |x - y| \leq t\}.$$

甲乙二人能会面的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2$$

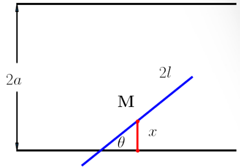
例 7(Buffon 抛针)

在平面上画有等距离的平行线，平行线间的距离为 $2a(a > 0)$，向一平面任意投掷一枚长为 $2l(l < a)$ 的圆柱形的针，试求此针与任一平行线相交的概率.

例 7(Buffon 抛针)

在平面上画有等距离的平行线, 平行线间的距离为 $2a(a>0)$, 向一平面任意投掷一枚长为 $2l(l<a)$ 的圆柱形的针, 试求此针与任一平行线相交的概率.

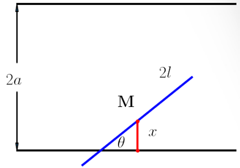
解：设事件 A 表示针和任一平行线相交. 下面用两个参数表示事件 A.



例 7(Buffon 抛针)

在平面上画有等距离的平行线, 平行线间的距离为 $2a(a>0)$, 向一平面任意投掷一枚长为 $2l(l<a)$ 的圆柱形的针, 试求此针与任一平行线相交的概率.

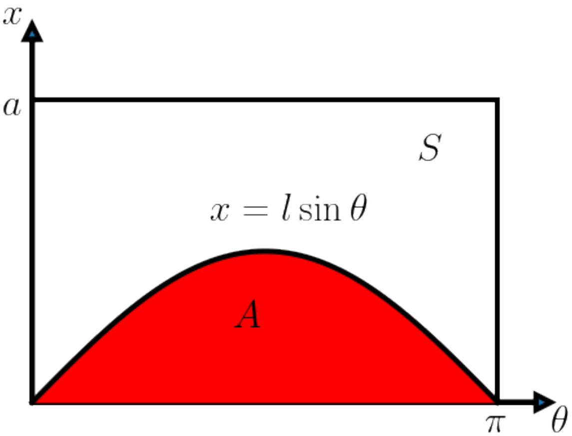
解：设事件 A 表示针和任一平行线相交. 下面用两个参数表示事件 A.



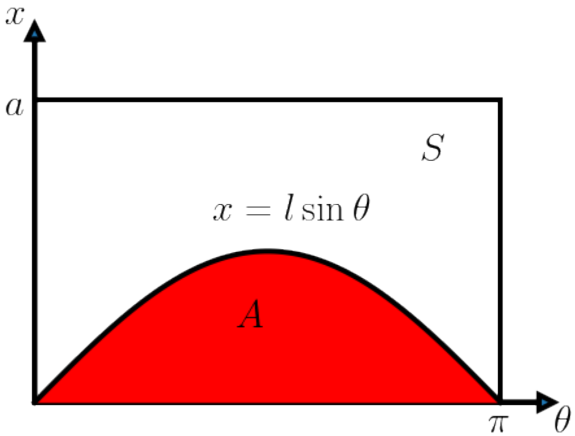
设 x 表示针的中点 M 到最近一条平行线的距离, θ 表示针与平行线的夹角, 于是样本空间 S 和事件 A 可表示为

$$S=\{(x,\theta)|0\leq x\leq a,0\leq\theta\leq\pi\},A=\{(x,\theta)|x\leq l\sin\theta\}$$

样本空间 S 和事件 A 在坐标平面上表示的区域为



样本空间 S 和事件 A 在坐标平面上表示的区域为



$$P(A) = \frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}} = \frac{\int_0^\pi l\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\pi a} = \frac{2l}{\pi a}$$

概率的频率定义

等可能概型只能用于研究具有“等可能”特点的随机现象, 然而大部分随机现象不具有等可能性. 人类的大量实践表明, 在相同条件下, 对随机现象进行大量的重复观测, 其结果总能呈现出某种规律性.

概率的频率定义

等可能概型只能用于研究具有“等可能”特点的随机现象, 然而大部分随机现象不具有等可能性. 人类的大量实践表明, 在相同条件下, 对随机现象进行大量的重复观测, 其结果总能呈现出某种规律性.

定义 6 (频率)

在相同条件下, 进行了 n 次试验. 在这 n 次试验中, 随机事件 A 发生的次数 n_A , 称为事件 A 发生的频数. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率, 记为 $f_n(A)$.

概率的频率定义

等可能概型只能用于研究具有“等可能”特点的随机现象, 然而大部分随机现象不具有等可能性. 人类的大量实践表明, 在相同条件下, 对随机现象进行大量的重复观测, 其结果总能呈现出某种规律性.

定义 6 (频率)
在相同条件下, 进行了 n 次试验. 在这 n 次试验中, 随机事件 A 发生的次数 n_A , 称为事件 A 发生的频数. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率, 记为 $f_n(A)$.

频率性质:

1. $0 \leq f_n(A) \leq 1$
2. $f_n(S) = 1$
3. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为有限个两两互不相容事件, 则

$$f_n\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k\right) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

历史上有不少人做过抛硬币试验, 结果如下表所示, 从表中数据可以看出, 出现正面的频率逐渐稳定在 0.5.

实验者	抛硬币的次数 n	正面 (H) 出现次数 n_H	$f_n(H)$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
Fisher	10000	4979	0.4979
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

历史上有不少人做过抛硬币试验, 结果如下表所示, 从表中数据可以看出, 出现正面的频率逐渐稳定在 0.5.

实验者	抛硬币的次数 n	正面 (H) 出现次数 n_H	$f_n(H)$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
Fisher	10000	4979	0.4979
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

定义 7
设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k, 当 n 很大时, 频率 $f_n(A)$ 在某一常数 p 的附近摆动, 若随着试验次数 n 的增加, 频率会稳定在常数 p 附近, 则称这个常数 p 为事件 A 发生的概率, 记为 $P(A) = p$.

利用事件发生的频率的稳定值来定义事件发生的概率是合理的. 在试验重复次数较大时, 可以利用频率得到概率的一个近似值, 这是频率方法最有价值的地方. 然而此方法的缺点也是非常明显的, 在现实世界无法把一个试验无限次重复下去, 况且有些试验还具有破坏性, 因此得到精确的频率稳定值是困难的.

概率的公理化定义

概率的古典、几何和频率定义方式各适合一类随机现象, 1900 年数学家希尔伯特提出要建立适合所有随机现象的概率的公理化定义.1933 年前苏联数学家柯尔莫哥洛夫首次提出概率的公理化定义, 这一体系成为概率论发展史上的一个里程碑.

概率的公理化定义

概率的古典、几何和频率定义方式各适合一类随机现象, 1900 年数学家希尔伯特提出要建立适合所有随机现象的概率的公理化定义.1933 年前苏联数学家柯尔莫哥洛夫首次提出概率的公理化定义, 这一体系成为概率论发展史上的一个里程碑.

定义 8

设 S 是随机试验 E 的样本空间. 对于 S 的每一个事件 A, 赋予一个实数与之对应, 记为 $P(A)$, 称 $P(A)$ 为事件 A 的概率, 如果函数 $P(A)$ 满足以下条件:

(1) **非负性** 对于每一个随机事件 A, $P(A) \geq 0$

(2) **规范性** 对于必然事件 S, $P(S) = 1$

(3) **可列可加性** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容的事件, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

概率的性质

利用概率的公理化定义，可以导出概率的一系列性质. 以下只给出一些常用的性质.

概率的性质

利用概率的公理化定义，可以导出概率的一系列性质. 以下只给出一些常用的性质.

(1) $P(\varnothing) = 0.$

利用概率的公理化定义, 可以导出概率的一系列性质. 以下只给出一些常用的性质.

(1) $P(\varnothing)=0.$

(2) **有限可加性** 若有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

概率的性质

利用概率的公理化定义, 可以导出概率的一系列性质. 以下只给出一些常用的性质.

(1) $P(\varnothing) = 0.$

(2) **有限可加性** **若有限个事件** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **两两互不相容, 则有**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) **若事件** A, B **满足** $A \subset B$**, 则有**

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A).$$

概率的性质

利用概率的公理化定义, 可以导出概率的一系列性质. 以下只给出一些常用的性质.

(1) $P(\varnothing) = 0.$

(2) **有限可加性　若有限个事件** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **两两互不相容, 则有**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) **若事件** A, B **满足** $A \subset B$**, 则有**

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A).$$

对于任意事件 A, B **有**

$$P(B - A) = P(B\bar{A}) = P(B - AB)$$

概率的性质

(4) **对于任意事件** A, **有** $0 \leq P(A) \leq 1$.

概率的性质

(4) **对于任意事件** A, **有** $0 \leq P(A) \leq 1$.

(5) **对于任意事件** A, **有** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, **其中** $\bar{A}$ **为** A **的对立事件.**

概率的性质

(4) **对于任意事件** A, **有** $0 \leq P(A) \leq 1.$

(5) **对于任意事件** A, **有** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, **其中** $\bar{A}$ **为** A **的对立事件.**

(6) **加法公式　对于任意事件** A, B, **有**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

概率的性质

(4) **对于任意事件** A, **有** $0 \leq P(A) \leq 1.$

(5) **对于任意事件** A, **有** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, **其中** $\bar{A}$ **为** A **的对立事件.**

(6) **加法公式　对于任意事件** A, B, **有**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

对于任意三个事件 A, B, C, **有**

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

概率的性质

(4) 对于任意事件 A, 有 $0 \leq P(A) \leq 1$.

(5) 对于任意事件 A, 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, 其中 $\bar{A}$ 为 A 的对立事件.

(6) 加法公式　对于任意事件 A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

对于任意三个事件 A, B, C, 有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) \right)$$

例 8

设 A, B **为两个事件, 若** $P(A)=0.3, P(B)=0.5, P(AB)=0.2$, **求:**

(1) $P(A\cup B)$; (2) $P(A-B)$; (3) $P(\overline{AB})$; (4) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

例 8

设 A, B 为两个事件, 若 $P(A)=0.3, P(B)=0.5, P(AB)=0.2$, 求:

$(1)\ P(A\cup B)$; $(2)\ P(A-B)$; $(3)\ P(\overline{AB})$; $(4)\ P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解: (1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.5-0.2=0.6.$

例 8

设 A, B **为两个事件, 若** $P(A)=0.3, P(B)=0.5, P(AB)=0.2$, **求:**

(1) $P(A\cup B)$;　(2) $P(A-B)$;　(3) $P(\overline{AB})$;　(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解: (1)　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.5-0.2=0.6.$

(2)　$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3-0.2=0.1.$

例 8

设 A, B 为两个事件, 若 $P(A) = 0.3, P(B) = 0.5, P(AB) = 0.2$, 求:

(1) $P(A \cup B)$; (2) $P(A - B)$; (3) $P(\overline{AB})$; (4) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解: (1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6.$

(2) $P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.3 - 0.2 = 0.1.$

(3) $P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.2 = 0.8.$

例 8

设 A, B 为两个事件, 若 $P(A)=0.3, P(B)=0.5, P(AB)=0.2$, 求:

(1) $P(A\cup B)$; (2) $P(A-B)$; (3) $P(\overline{AB})$; (4) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解: (1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.5-0.2=0.6.$

(2) $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3-0.2=0.1.$

(3) $P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8.$

(4) $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.6=0.4.$

例 9

A, B, C 为三个事件, 设 $P(A) = P(B) = P(C) = 0.3$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = 0.1$. 求

(1) 事件 A, B, C 至少有一个发生的概率;

(2) 事件 A, B, C 都不发生的概率.

例 9

A, B, C 为三个事件, 设 $P(A)=P(B)=P(C)=0.3$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=0.1$. 求

(1) 事件 A, B, C 至少有一个发生的概率;

(2) 事件 A, B, C 都不发生的概率.

解：(1) 事件 A, B, C 至少有一个发生的概率为

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC) \\ &\quad -P(BC)+P(ABC) \\ &= 0.3+0.3+0.3-0-0.1-0.1+0=0.7 \end{aligned}$$

例 9

A, B, C 为三个事件, 设 $P(A)=P(B)=P(C)=0.3$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=0.1$. 求

(1) 事件 A, B, C 至少有一个发生的概率;

(2) 事件 A, B, C 都不发生的概率.

解: (1) 事件 A, B, C 至少有一个发生的概率为

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC) \\ &\quad -P(BC)+P(ABC) \\ &= 0.3+0.3+0.3-0-0.1-0.1+0=0.7 \end{aligned}$$

(2) 事件 A, B, C 都不发生的概率为

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.7=0.3.$$

例 10(配对问题)

有 n 个人参加一个晚会, 每人亲手写了一张祝福卡, 现将 n 张卡片随机发给参会的 n 个人, 求至少有一个人收到自己写的卡片的概率.

例 10(配对问题)

有 n 个人参加一个晚会, 每人亲手写了一张祝福卡, 现将 n 张卡片随机发给参会的 n 个人, 求至少有一个人收到自己写的卡片的概率.

解：设事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示"第 i 个人收到自己写的卡片"，

例 10(配对问题)

有 n 个人参加一个晚会, 每人亲手写了一张祝福卡, 现将 n 张卡片随机发给参会的 n 个人, 求至少有一个人收到自己写的卡片的概率.

解：设事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示“第 i 个人收到自己写的卡片”，则至少有一个人收到自己写的卡片的事件可表示为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

例 10(配对问题)

有 n 个人参加一个晚会, 每人亲手写了一张祝福卡, 现将 n 张卡片随机发给参会的 n 个人, 求至少有一个人收到自己写的卡片的概率.

解：设事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示“第 i 个人收到自己写的卡片”，则至少有一个人收到自己写的卡片的事件可表示为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

至少有一个人收到自己写的卡片的概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})\right)$$

因为

因为

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \frac{1}{n}$$

因为

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = \cdots = P(A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)}$$

因为

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = \cdots = P(A_{n-1}A_n) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\vdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{n!}$$

因为

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=\frac{1}{n}$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=\cdots=P(A_{n-1}A_n)=\frac{1}{n(n-1)}$$

$$\vdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}$$

所以有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

例 11

(1) 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 求证:

$$P(AB) = P(\bar{A}\bar{B}).$$

(2) 证明对任意两个事件 A, B, 有

$$P(A) + P(B) - 1 \le P(AB) \le P(A \cup B).$$

例 11

(1) 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$, 求证:

$$P(AB)=P(\bar{A}\bar{B}).$$

(2) 证明对任意两个事件 A, B, 有

$$P(A)+P(B)-1 \leq P(AB) \leq P(A\cup B).$$

证明：(1)

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\,\overline{B}) &= P\left(\overline{A\bigcup B}\right) = 1 - P\left(A\bigcup B\right) \\ &= 1 - P(P(A)+P(B)-P(AB)) \\ &= 1 - (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB)) = P(AB) \end{aligned}$$

例 11

(1) 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 求证:

$$P(AB) = P(\bar{A}\bar{B}).$$

(2) 证明对任意两个事件 A, B, 有

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(AB) \leq P(A \cup B).$$

证明：(2) 因为 $AB \subset A \bigcup B$，所以 $P(AB) \leq P(A \bigcup B)$
又有 $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1$，可得

$$P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$$

故有 $P(A) + P(B) - 1 \leq P(AB) \leq P(A \bigcup B)$.

条件概率

条件概率

随机事件 A, B 如果不是互不相容的，在一次试验中可以同时发生，那么事件 B 的发生与否对事件 A 发生的概率是有影响的. 记事件 B 发生的条件下，A 发生的概率为 $P(A|B)$.

随机事件 A, B 如果不是互不相容的, 在一次试验中可以同时发生, 那么事件 B 的发生与否对事件 A 发生的概率是有影响的. 记事件 B 发生的条件下, A 发生的概率为 $P(A|B)$.

例 1

设第一组有 3 个男生、3 个女生, 第二组有 4 个男生、2 个女生. 将这两组同学混在一起后抽出 1 人回答问题, 求此人是男生的概率; 此人是第一组男生的概率; 若已知此人是第一组的同学, 则此人是男生概率.

条件概率

随机事件 A, B 如果不是互不相容的, 在一次试验中可以同时发生, 那么事件 B 的发生与否对事件 A 发生的概率是有影响的. 记事件 B 发生的条件下, A 发生的概率为 $P(A|B)$.

例 1

设第一组有 3 个男生、3 个女生, 第二组有 4 个男生、2 个女生. 将这两组同学混在一起后抽出 1 人回答问题, 求此人是男生的概率; 此人是第一组男生的概率; 若已知此人是第一组的同学, 则此人是男生概率.

解：设 A 表示此人是男生, B 表示此人来自第一组, 于是, AB 表示来自第一组的男生

条件概率

随机事件 A, B 如果不是互不相容的, 在一次试验中可以同时发生, 那么事件 B 的发生与否对事件 A 发生的概率是有影响的. 记事件 B 发生的条件下, A 发生的概率为 $P(A|B)$.

例 1

设第一组有 3 个男生、3 个女生, 第二组有 4 个男生、2 个女生. 将这两组同学混在一起后抽出 1 人回答问题, 求此人是男生的概率; 此人是第一组男生的概率; 若已知此人是第一组的同学, 则此人是男生概率.

解：设 A 表示此人是男生, B 表示此人来自第一组, 于是, AB 表示来自第一组的男生

$$P(A) = \frac{7}{12},$$

条件概率

随机事件 A, B 如果不是互不相容的, 在一次试验中可以同时发生, 那么事件 B 的发生与否对事件 A 发生的概率是有影响的. 记事件 B 发生的条件下, A 发生的概率为 $P(A|B)$.

例 1

设第一组有 3 个男生、3 个女生, 第二组有 4 个男生、2 个女生. 将这两组同学混在一起后抽出 1 人回答问题, 求此人是男生的概率; 此人是第一组男生的概率; 若已知此人是第一组的同学, 则此人是男生概率.

解: 设 A 表示此人是男生, B 表示此人来自第一组, 于是, AB 表示来自第一组的男生

$$P(A) = \frac{7}{12}, P(B) = \frac{6}{12},$$

随机事件 A, B 如果不是互不相容的, 在一次试验中可以同时发生, 那么事件 B 的发生与否对事件 A 发生的概率是有影响的. 记事件 B 发生的条件下, A 发生的概率为 $P(A|B)$.

例 1

设第一组有 3 个男生、3 个女生, 第二组有 4 个男生、2 个女生. 将这两组同学混在一起后抽出 1 人回答问题, 求此人是男生的概率; 此人是第一组男生的概率; 若已知此人是第一组的同学, 则此人是男生概率.

解：设 A 表示此人是男生, B 表示此人来自第一组, 于是, AB 表示来自第一组的男生

$$P(A) = \frac{7}{12}, P(B) = \frac{6}{12}, P(AB) = \frac{3}{12},$$

条件概率

随机事件 A, B 如果不是互不相容的, 在一次试验中可以同时发生, 那么事件 B 的发生与否对事件 A 发生的概率是有影响的. 记事件 B 发生的条件下, A 发生的概率为 $P(A|B)$.

例 1

设第一组有 3 个男生、3 个女生, 第二组有 4 个男生、2 个女生. 将这两组同学混在一起后抽出 1 人回答问题, 求此人是男生的概率; 此人是第一组男生的概率; 若已知此人是第一组的同学, 则此人是男生概率.

解：设 A 表示此人是男生, B 表示此人来自第一组, 于是, AB 表示来自第一组的男生

$$P(A)=\frac{7}{12}, P(B)=\frac{6}{12}, P(AB)=\frac{3}{12}, P(A|B)=\frac{3}{6}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

定义 9 (条件概率)

设 A, B 是两个事件, 且 $P(B) > 0$, 称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下, 事件 A 发生的条件概率.

定义 9 (条件概率)

设 A, B 是两个事件, 且 $P(B) > 0$, 称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下, 事件 A 发生的条件概率.

条件概率是概率, 即若 $P(B) > 0$, 可验证:

(1) $P(A|B) \geq 0$;

(2) $P(S|B) = 1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为两两互不相容事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

例 2

已知 $P(A) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A - B) = 0.2$, **求: (1)** $P(B|A)$; **(2)** $P(A|B)$.

例 2

已知 $P(A)=0.5$,$P(A\cup B)=0.8$,$P(A-B)=0.2$, **求: (1)** $P(B|A)$; **(2)** $P(A|B)$.

解:(1) 由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$, **可知**

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.3$$

因此

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.5}=0.6.$$

例 2
已知 $P(A)=0.5$,$P(A\cup B)=0.8$,$P(A-B)=0.2$, **求: (1)** $P(B|A)$;
(2) $P(A|B)$.

(2) 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, 可知

$$P(B)=P(A\cup B)+P(AB)-P(A)=0.6$$

因此

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.6}=0.5.$$

例 3

在小于 100 的正整数中任取 1 个数, 若取到的数能被 3 整除, 求此数也能被 4 整除的概率.

例 3

在小于 100 的正整数中任取 1 个数, 若取到的数能被 3 整除, 求此数也能被 4 整除的概率.

解: 设事件 A 为" 取到的数能被 3 整除", 事件 B 为" 取到的数能被 4 整除", 则积事件 AB 为" 取到的数能被 12 整除", 由古典概型可得

例 3

在小于 100 的正整数中任取 1 个数, 若取到的数能被 3 整除, 求此数也能被 4 整除的概率.

解: 设事件 A 为" 取到的数能被 3 整除", 事件 B 为" 取到的数能被 4 整除", 则积事件 AB 为" 取到的数能被 12 整除", 由古典概型可得

$$P(A)=\frac{33}{99}=\frac{1}{3}, P(AB)=\frac{8}{99}.$$

例 3

在小于 100 的正整数中任取 1 个数, 若取到的数能被 3 整除, 求此数也能被 4 整除的概率.

解: 设事件 A 为" 取到的数能被 3 整除", 事件 B 为" 取到的数能被 4 整除", 则积事件 AB 为" 取到的数能被 12 整除", 由古典概型可得

$$P(A) = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{8}{99}.$$

因此所求概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{8}{33}.$$

定理 10 (乘法公式)
A, B 是两个事件, 若 $P(A) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

称上式为乘法公式.

乘法公式

定理 10 (乘法公式)
A, B 是两个事件, 若 $P(A) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

称上式为乘法公式.

若 $P(B) > 0$，有 $P(AB) = P(B)P(A|B)$.

乘法公式

定理 10 (乘法公式)
A, B 是两个事件, 若 $P(A) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

称上式为乘法公式.

若 $P(B) > 0$，有 $P(AB) = P(B)P(A|B)$.
若 $P(AB) > 0$，有

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

乘法公式

定理 10 (乘法公式)

A, B 是两个事件, 若 $P(A) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

称上式为乘法公式.

若 $P(B) > 0$，有 $P(AB) = P(B)P(A|B)$.
若 $P(AB) > 0$，有

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

若 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则有

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})$$

例 4

某人用铁锤击打防弹玻璃测试其坚固性, 已知第一锤击破玻璃的概率为 0.2; 若第一锤未击破, 第二锤击破的概率为 0.4; 若前两锤均未击破, 第三锤击破的概率为 0.5. 问此人不超过三锤就能击破玻璃的概率.

例 4

某人用铁锤击打防弹玻璃测试其坚固性, 已知第一锤击破玻璃的概率为 0.2; 若第一锤未击破, 第二锤击破的概率为 0.4; 若前两锤均未击破, 第三锤击破的概率为 0.5. 问此人不超过三锤就能击破玻璃的概率.

解: 方法 1　设事件 $A_k(k=1,2,3)$ 为"第 k 锤击破玻璃", 事件 A 为"不超过三锤击破玻璃", 则

$$A = A_1 \cup (\overline{A_1}\, A_2) \cup (\overline{A_1}\,\overline{A_2}\, A_3)$$

且 $A_1, \overline{A_1}\, A_2, \overline{A_1}\,\overline{A_2}\, A_3$ 互不相容.

例 4

某人用铁锤击打防弹玻璃测试其坚固性, 已知第一锤击破玻璃的概率为 0.2; 若第一锤未击破, 第二锤击破的概率为 0.4; 若前两锤均未击破, 第三锤击破的概率为 0.5. 问此人不超过三锤就能击破玻璃的概率.

解: 方法 1 设事件 $A_k(k=1,2,3)$ 为 “第 k 锤击破玻璃”，事件 A 为 “不超过三锤击破玻璃”，则

$$A = A_1 \cup (\overline{A_1}\, A_2) \cup (\overline{A_1}\,\overline{A_2}\, A_3)$$

且 $A_1, \overline{A_1}\, A_2, \overline{A_1}\,\overline{A_2}\, A_3$ 互不相容.

$$P(A_1) = 0.2,\ P(\overline{A_1} A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) = 0.8 \times 0.4 = 0.32,$$

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\, A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\,|\,\overline{A_1})P(A_3|\,\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = 0.24.$$

例 4

某人用铁锤击打防弹玻璃测试其坚固性，已知第一锤击破玻璃的概率为 0.2；若第一锤未击破，第二锤击破的概率为 0.4；若前两锤均未击破，第三锤击破的概率为 0.5. 问此人不超过三锤就能击破玻璃的概率.

解：方法 1 设事件 $A_k(k=1,2,3)$ 为“第 k 锤击破玻璃”，事件 A 为“不超过三锤击破玻璃”，则

$$A = A_1 \cup (\overline{A_1}\, A_2) \cup (\overline{A_1}\, \overline{A_2}\, A_3)$$

且 $A_1, \overline{A_1}\, A_2, \overline{A_1}\, \overline{A_2}\, A_3$ 互不相容. 因此所求概率为

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(\overline{A_1} A_2) + P(\overline{A_1}\, \overline{A_2}\, A_3) \\ &= 0.2 + 0.32 + 0.24 = 0.76. \end{aligned}$$

例 4

某人用铁锤击打防弹玻璃测试其坚固性, 已知第一锤击破玻璃的概率为 0.2; 若第一锤未击破, 第二锤击破的概率为 0.4; 若前两锤均未击破, 第三锤击破的概率为 0.5. 问此人不超过三锤就能击破玻璃的概率.

解: 方法 2 设事件 $A_k(k=1,2,3)$ 为“第 k 锤击破玻璃”, 事件 A 为“不超过三锤击破玻璃”, 则

$$\overline{A}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$$

从而

$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\mid\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)$$

因此所求概率为 $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0.24=0.76.$

例 5

设有 5 张纸签, 其中 1 张上面写着“中奖”, 其余 4 张写“未中奖”, 现有 5 人依次无放回的随机抽签, 问“先抽签者中奖概率大”的说法是否正确?

例 5

设有 5 张纸签, 其中 1 张上面写着 “中奖”, 其余 4 张写 “未中奖”, 现有 5 人依次无放回的随机抽签, 问 “先抽签者中奖概率大” 的说法是否正确?

解: 设事件 $A_k(k=1,2,\cdots,5)$ 表示 “第 k 人抽到中奖纸签”, 则

$$P(A_1)=\frac{1}{5},\ P(A_2)=P(\overline{A_1}\,A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2|\,\overline{A_1})=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

以此类推, 每人中奖的概率均为 $\frac{1}{5}$, 因此题中说法错误.

例 5

设有 5 张纸签, 其中 1 张上面写着“中奖”, 其余 4 张写“未中奖”, 现有 5 人依次无放回的随机抽签, 问“先抽签者中奖概率大”的说法是否正确?

解: 设事件 $A_k(k=1,2,\cdots,5)$ **表示“第** k **人抽到中奖纸签”, 则**

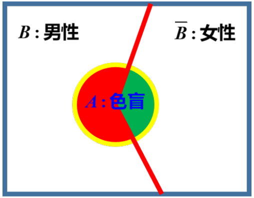
$$P(A_1)=\frac{1}{5},\ P(A_2)=P(\overline{A_1}\,A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2|\,\overline{A_1})=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

以此类推, 每人中奖的概率均为 $\frac{1}{5}$**, 因此题中说法错误.**

若 n **个签中, 有** $m(m<n)$ **个特殊签, 有** $k(k<n)$ **个人依次抽签, 则每人抽到特殊签的概率相同, 均为** $\frac{m}{n}$**. 此结论称为抽签原理.**

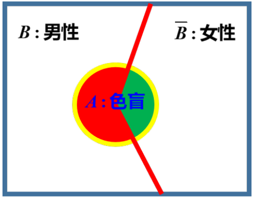
例 6

某城市男、女性人数之比为 $3:2$, 其中 5% 的男性为色盲, 2.5% 的女性为色盲. 现随机地选一人, 求此人是色盲的概率?



例 6

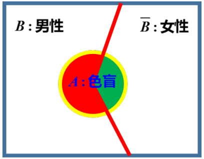
某城市男、女性人数之比为 $3:2$, 其中 5% 的男性为色盲, 2.5% 的女性为色盲. 现随机地选一人, 求此人是色盲的概率?



解：设事件 A 表示“选到的人是色盲”，事件 B 表示“选到的人是男性”，则由事件的关系可知, AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容, 即 $AB\bigcap A\overline{B}=\varnothing$, 且 $A=AB\bigcup A\overline{B}$.

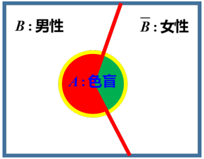
$$A = AB \bigcup A\overline{B},$$

$$AB \bigcap A\overline{B} = \varnothing.$$



$$A = AB \bigcup A\overline{B},$$

$$AB \bigcap A\overline{B} = \varnothing.$$

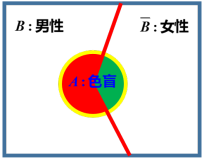


由概率有限可加性,

$$P(A) = P\left(AB \bigcup A\overline{B}\right) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

$$A = AB \bigcup A\overline{B},$$

$$AB \bigcap A\overline{B} = \varnothing.$$



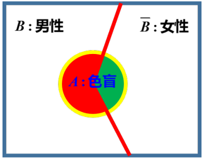
由概率有限可加性,

$$P(A) = P\left(AB \bigcup A\overline{B}\right) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

利用乘法公式,

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$
$$= \frac{3}{5} \times 5\% + \frac{2}{5} \times 2.5\%$$

$$A = AB \bigcup A\overline{B},$$
$$AB \bigcap A\overline{B} = \varnothing.$$



由概率有限可加性,

$$P(A) = P\left(AB \bigcup A\overline{B}\right) = P(AB) + P(A\overline{B})$$

利用乘法公式,

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$
$$= \frac{3}{5} \times 5\% + \frac{2}{5} \times 2.5\%$$

当事件 A 复杂时, 可依据 “恰当情况” 把事件 A 转化为若干个简单事件并的形式, 这种 “恰当情况” 一般通过对样本空间进行划分得到.

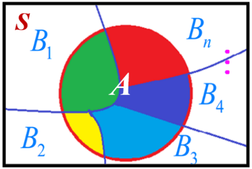
定义 11 (样本空间划分)

设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为一组事件, 若

(1) $B_iB_j = \varnothing, i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n$;

(2) $B_1 \bigcup B_2 \bigcup \cdots \bigcup B_n = S$.

称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.



(i) 在一次试验中, 事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 有且仅有一个发生;

(ii) 样本空间 S 的划分不唯一.

定理 12 (全概率公式)

设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，若 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则对于任意事件 A 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$

定理 12 (全概率公式)

设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 若 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则对于任意事件 A 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$

证明: 因为 $A = AS = A(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = (AB_1) \cup \cdots \cup (AB_n)$, 并且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 以及 $(AB_i)(AB_j) = \varnothing$. 所以有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$

$\square$

例 7

箱里有 7 个红球和 3 个黑球, 任意抽取两次, 抽后不放回, 求第二次抽出的是黑球的概率.

例 7

箱里有 7 个红球和 3 个黑球, 任意抽取两次, 抽后不放回, 求第二次抽出的是黑球的概率.

解：设事件 B 表示“第一次抽出的是黑球”, 则事件 $\overline{B}$ 表示“第一次抽出的是红球”, 事件 A 表示第二次抽出的是黑球.

例 7

箱里有 7 个红球和 3 个黑球, 任意抽取两次, 抽后不放回, 求第二次抽出的是黑球的概率.

解：设事件 B 表示“第一次抽出的是黑球”, 则事件 $\overline{B}$ 表示“第一次抽出的是红球”, 事件 A 表示第二次抽出的是黑球. 显然,

$$P(B)=\frac{3}{10},P(\overline{B})=\frac{7}{10},P(A|B)=\frac{2}{9},P(A|\overline{B})=\frac{3}{9}.$$

例 7

箱里有 7 个红球和 3 个黑球, 任意抽取两次, 抽后不放回, 求第二次抽出的是黑球的概率.

解：设事件 B 表示“第一次抽出的是黑球”，则事件 $\overline{B}$ 表示“第一次抽出的是红球”，事件 A 表示第二次抽出的是黑球. 显然,

$$P(B)=\frac{3}{10},P(\overline{B})=\frac{7}{10},P(A|B)=\frac{2}{9},P(A|\overline{B})=\frac{3}{9}.$$

由全概率公式有

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{3}{10}.$$

定理 13 (贝叶斯公式)

设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，若 $P(A) > 0, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}.$$

称为贝叶斯公式

贝叶斯公式

定理 13 (贝叶斯公式)

设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分, 若 $P(A) > 0, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}.$$

称为贝叶斯公式

注

- $P(B_i)$ 称为先验概率, $P(B_i|A)$ 称为后验概率.

贝叶斯公式

定理 13 (贝叶斯公式)

设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，若 $P(A) > 0, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}.$$

称为贝叶斯公式

注

- $P(B_i)$ 称为先验概率, $P(B_i|A)$ 称为后验概率.
- 贝叶斯公式——度量由原因 B_i 导致 A 发生的可能性大小.

贝叶斯公式

定理 13 (贝叶斯公式)
设 S 为试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，若 $P(A) > 0, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}.$$

称为贝叶斯公式

注

- $P(B_i)$ 称为先验概率, $P(B_i|A)$ 称为后验概率.
- 贝叶斯公式——度量由原因 B_i 导致 A 发生的可能性大小.
- 比较 $P(B_i|A)$ 与 $P(B_j|A)$ 的大小做出决策, 常称为贝叶斯估计.

例 8

羽毛球队有 4 名男队员和 6 名女队员, 乒乓球队有 6 名男队员和 3 名女队员, 网球队男队员和女队员各 5 名, 现以 0.5、0.3 和 0.2 的概率选羽毛球队、乒乓球队和网球队作为国旗护卫队, 并在该队中任选 1 名队员做主升旗手.（1）求主升旗手为男队员的概率;（2）若已知主升旗手为男队员, 求他来自乒乓球队的概率.

例 8

羽毛球队有 4 名男队员和 6 名女队员, 乒乓球队有 6 名男队员和 3 名女队员, 网球队男队员和女队员各 5 名, 现以 0.5、0.3 和 0.2 的概率选羽毛球队、乒乓球队和网球队作为国旗护卫队, 并在该队中任选 1 名队员做主升旗手. (1) 求主升旗手为男队员的概率; (2) 若已知主升旗手为男队员, 求他来自乒乓球队的概率.

解: 设事件 A 表示"主升旗手是男队员", 事件 B_1 表示"羽毛球队作为国旗护卫队", 事件 B_2 表示"乒乓球队作为国旗护卫队", 事件 B_3 表示"网球队作为国旗护卫队".

例 8

羽毛球队有 4 名男队员和 6 名女队员, 乒乓球队有 6 名男队员和 3 名女队员, 网球队男队员和女队员各 5 名, 现以 0.5、0.3 和 0.2 的概率选羽毛球队、乒乓球队和网球队作为国旗护卫队, 并在该队中任选 1 名队员做主升旗手. (1) 求主升旗手为男队员的概率; (2) 若已知主升旗手为男队员, 求他来自乒乓球队的概率.

解：设事件 A 表示“主升旗手是男队员”，事件 B_1 表示“羽毛球队作为国旗护卫队”，事件 B_2 表示“乒乓球队作为国旗护卫队”，事件 B_3 表示“网球队作为国旗护卫队”.

(1) 由全概率公式有,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= 0.5 \times \frac{4}{10} + 0.3 \times \frac{6}{9} + 0.2 \times \frac{5}{10} = 0.5 \end{aligned}$$

例 8

羽毛球队有 4 名男队员和 6 名女队员, 乒乓球队有 6 名男队员和 3 名女队员, 网球队男队员和女队员各 5 名, 现以 0.5、0.3 和 0.2 的概率选羽毛球队、乒乓球队和网球队作为国旗护卫队, 并在该队中任选 1 名队员做主升旗手. (1) 求主升旗手为男队员的概率; (2) 若已知主升旗手为男队员, 求他来自乒乓球队的概率.

解: 设事件 A 表示“主升旗手是男队员”, 事件 B_1 表示“羽毛球队作为国旗护卫队”, 事件 B_2 表示“乒乓球队作为国旗护卫队”, 事件 B_3 表示“网球队作为国旗护卫队”.

(2) 由贝叶斯公式有,

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}$$
$$=0.4$$

事件的独立性

事件独立的定义

定义 14 (两个事件独立)

设 A, B 是两个事件, 若满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A 与事件 B 相互独立, 简称 A 与 B 独立.

定义 15 (三个事件独立)

设 A, B, C 是三个事件, 若满足等式

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C). \end{cases}$$

则称 A, B, C 两两独立, 若还有

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 A, B, C 相互独立.

定义 16 (n 个事件独立)

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件, 对于任意的 $1 \le i < j < k \cdots \le n$ 若满足等式

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \\ \qquad\qquad \vdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n). \end{cases}$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

事件独立的性质

独立的性质

1. 若事件 A 与事件 B 相互独立, 且 $P(A) > 0$, 则

$$P(B|A) = P(B)$$

事件独立的性质

独立的性质

1. 若事件 A 与事件 B 相互独立, 且 $P(A)>0$, 则

$$P(B|A)=P(B)$$

2. 若事件 A 与事件 B 相互独立, 则事件 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与、$\overline{B}$ 均独立.

事件独立的性质

独立的性质

1. **若事件 A 与事件 B 相互独立, 且 $P(A) > 0$, 则**

$$P(B|A) = P(B)$$

2. **若事件 A 与事件 B 相互独立, 则事件 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与、$\overline{B}$ 均独立.**
3. **若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则**

   (1) $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$;

   (2) $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \cdots, \overline{A_n}$ **也相互独立;**

   (3) $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$

证明：以 A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为例, 其他情况类似.

证明：以 A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为例, 其他情况类似.

$$P(A\overline{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

证明：以 A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为例, 其他情况类似.

$$\begin{aligned} P(A\overline{B}) &= P(A - AB) = P(A) - P(AB) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \end{aligned}$$

证明：以 A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为例, 其他情况类似.

$$
\begin{aligned}
P(A\overline{B}) &= P(A - AB) = P(A) - P(AB) \\
&= P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)(1 - P(B))
\end{aligned}
$$

证明：以 A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为例, 其他情况类似.

$$\begin{aligned} P(A\overline{B}) &= P(A - AB) = P(A) - P(AB) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(\overline{B}) \end{aligned}$$

证明：以 A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为例, 其他情况类似.

$$
\begin{aligned}
P(A\overline{B}) &= P(A-AB) = P(A) - P(AB) \\
&= P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)(1-P(B)) \\
&= P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

$$
P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B)
$$

证明：以 A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为例, 其他情况类似.

$$\begin{aligned} P(A\overline{B}) &= P(A-AB) = P(A) - P(AB) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1-P(B)) \\ &= P(A)P(\overline{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\,\overline{B}) &= P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \end{aligned}$$

证明：以 A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为例, 其他情况类似.

$$
\begin{aligned}
P(A\overline{B}) &= P(A-AB) = P(A) - P(AB) \\
&= P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)(1-P(B)) \\
&= P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}\,\overline{B}) &= P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)
\end{aligned}
$$

证明：以 A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为例, 其他情况类似.

$$\begin{aligned} P(A\overline{B}) &= P(A-AB) = P(A) - P(AB) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1-P(B)) \\ &= P(A)P(\overline{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\,\overline{B}) &= P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= (1-P(A))\,(1-P(B)) \end{aligned}$$

证明：以 A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为例, 其他情况类似.

$$
\begin{aligned}
P(A\overline{B}) &= P(A-AB) = P(A) - P(AB) \\
&= P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)(1-P(B)) \\
&= P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}\,\overline{B}) &= P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\
&= (1-P(A))\,(1-P(B)) \\
&= P(\overline{A})P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

$\square$

例 1

某同学买了一台电脑和一部手机, 电脑在 3 年内发生故障的概率为 0.1, 手机在 3 年内发生故障的概率为 0.2, 求

(1) **3 年内电脑和手机都发生故障的概率;**

(2) **3 年内电脑和手机至少有一个发生故障的概率.**

例 1

某同学买了一台电脑和一部手机, 电脑在 3 年内发生故障的概率为 0.1, 手机在 3 年内发生故障的概率为 0.2, 求

(1) 3 年内电脑和手机都发生故障的概率;

(2) 3 年内电脑和手机至少有一个发生故障的概率.

解：设事件 A 表示“3 年内电脑发生故障”, 事件 B 表示“3 年内手机发生故障”. 显然, 事件 A 与 B 相互独立.

例 1

某同学买了一台电脑和一部手机, 电脑在 3 年内发生故障的概率为 0.1, 手机在 3 年内发生故障的概率为 0.2, 求

(1) **3 年内电脑和手机都发生故障的概率;**

(2) **3 年内电脑和手机至少有一个发生故障的概率.**

解：设事件 A 表示“3 年内电脑发生故障”, 事件 B 表示“3 年内手机发生故障”. 显然, 事件 A 与 B 相互独立.

(1)　三年内都发生故障的概率为

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.1 \times 0.2 = 0.02$$

例 1

某同学买了一台电脑和一部手机, 电脑在 3 年内发生故障的概率为 0.1, 手机在 3 年内发生故障的概率为 0.2, 求

(1) 3 年内电脑和手机都发生故障的概率;

(2) 3 年内电脑和手机至少有一个发生故障的概率.

解：设事件 A 表示“3 年内电脑发生故障”, 事件 B 表示“3 年内手机发生故障”. 显然, 事件 A 与 B 相互独立.

(1) 三年内都发生故障的概率为

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.1 \times 0.2 = 0.02$$

(2) 由于事件 A 与 B 相互独立, 所以事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立, 则至少有一个发生故障的概率为

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0.28$$

例 2

设样本空间内, 取得每个样本点是等可能的, 以下各种情况 A, B, C 三事件是否相互独立, 是否两两独立?

(1) 样本空间 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 事件 $A = \{1, 2\}$, 事件 $B = \{1, 3\}$, 事件 $C = \{1, 4\}$.

(2) 样本空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 事件 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 事件 $B = \{1, 2, 5, 6\}$, 事件 $C = \{1, 3, 7, 8\}$.

(3) 样本空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 事件 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 事件 $B = \{1, 2, 5, 6\}$, 事件 $C = \{1, 3, 6, 7\}$.

解：样本空间 $S=\{1,2,3,4\}$**, 事件** $A=\{1,2\}$**, 事件** $B=\{1,3\}$**, 事件** $C=\{1,4\}$**. 利用古典概型, 计算得**

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{1}{4}$$

解：样本空间 $S=\{1,2,3,4\}$, **事件** $A=\{1,2\}$, **事件** $B=\{1,3\}$, **事件** $C=\{1,4\}$. **利用古典概型, 计算得**

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{1}{4}$$

显然

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

解：样本空间 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 事件 $A = \{1, 2\}$, 事件 $B = \{1, 3\}$, 事件 $C = \{1, 4\}$. 利用古典概型, 计算得

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2},\ P(AB) = \frac{1}{4}$$

显然

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

同理经计算可验证, $P(AC) = P(A)P(C)$, $P(BC) = P(B)P(C)$. 因此 A, B, C 三事件两两独立.

解：样本空间 $S=\{1,2,3,4\}$, **事件** $A=\{1,2\}$, **事件** $B=\{1,3\}$, **事件** $C=\{1,4\}$. **利用古典概型, 计算得**

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{1}{4}$$

显然

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

同理经计算可验证, $P(AC)=P(A)P(C)$, $P(BC)=P(B)P(C)$. **因此** A,B,C **三事件两两独立.**

因为

$$P(ABC)=\frac{1}{4},\ P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$$

因此 A,B,C **三事件不是相互独立.**

解：(2) 样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 事件 $A=\{1,2,3,4\}$, 事件 $B=\{1,2,5,6\}$, 事件 $C=\{1,3,7,8\}$. 利用古典概型, 计算得

$$P(BC)=\frac{1}{8},\ P(B)P(C)=\frac{1}{4}$$

解：(2) 样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 事件 $A=\{1,2,3,4\}$, 事件 $B=\{1,2,5,6\}$, 事件 $C=\{1,3,7,8\}$. 利用古典概型, 计算得

$$P(BC)=\frac{1}{8},\ P(B)P(C)=\frac{1}{4}$$

显然

$$P(BC)\neq P(B)P(C)$$

解：(2) 样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, **事件** $A=\{1,2,3,4\}$, **事件** $B=\{1,2,5,6\}$, **事件** $C=\{1,3,7,8\}$. **利用古典概型, 计算得**

$$P(BC)=\frac{1}{8},\ P(B)P(C)=\frac{1}{4}$$

显然

$$P(BC)\neq P(B)P(C)$$

因此 A,B,C **三事件不是两两独立, 更不是相互独立.**

解：(3) 样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 事件 $A=\{1,2,3,4\}$, 事件 $B=\{1,2,5,6\}$, 事件 $C=\{1,3,6,7\}$. 利用古典概型, 计算得

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{1}{4}$$

解：(3) 样本空间 $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 事件 $A = \{1,2,3,4\}$, 事件 $B = \{1,2,5,6\}$, 事件 $C = \{1,3,6,7\}$. 利用古典概型, 计算得

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2},\ P(AB) = \frac{1}{4}$$

显然

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

解：(3) 样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, **事件** $A=\{1,2,3,4\}$, **事件** $B=\{1,2,5,6\}$, **事件** $C=\{1,3,6,7\}$. **利用古典概型, 计算得**

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}, P(AB)=\frac{1}{4}$$

显然

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

同理经计算可验证, $P(AC)=P(A)P(C)$, $P(BC)=P(B)P(C)$. **因此** A,B,C **三事件两两独立.**

解：(3) 样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 事件 $A=\{1,2,3,4\}$, 事件 $B=\{1,2,5,6\}$, 事件 $C=\{1,3,6,7\}$. 利用古典概型, 计算得

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}, P(AB)=\frac{1}{4}$$

显然

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

同理经计算可验证, $P(AC)=P(A)P(C)$, $P(BC)=P(B)P(C)$. 因此 A,B,C 三事件两两独立.

因为

$$P(ABC)=\frac{1}{8}, P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$$

解：(3) 样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 事件 $A=\{1,2,3,4\}$, 事件 $B=\{1,2,5,6\}$, 事件 $C=\{1,3,6,7\}$. 利用古典概型, 计算得

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{1}{4}$$

显然

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

同理经计算可验证, $P(AC)=P(A)P(C)$, $P(BC)=P(B)P(C)$. 因此 A,B,C 三事件两两独立.

因为

$$P(ABC)=\frac{1}{8},\ P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$$

显然

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

因此 A,B,C 三事件相互独立.

例 3

图 1 和图 2 是两个均由 4 个元件 A_1, A_2, A_3, A_4 组成的系统. 假设每个元件正常工作的概率均为 0.9, 且各元件工作是相互独立的, 分别求出这两个系统正常工作的概率.

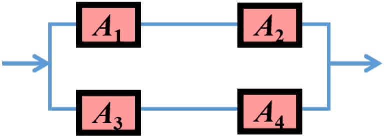


图: 1

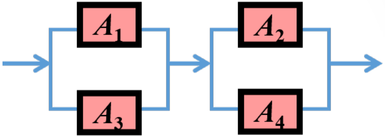


图: 2

例 3

图 1 和图 2 是两个均由 4 个元件 A_1, A_2, A_3, A_4 组成的系统. 假设每个元件正常工作的概率均为 0.9, 且各元件工作是相互独立的, 分别求出这两个系统正常工作的概率.

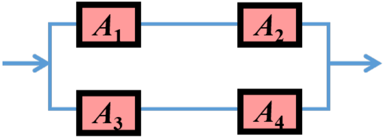


图: 1

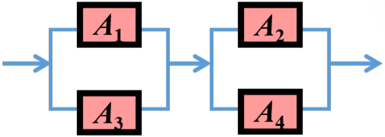


图: 2

解：仍用符号 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示第 i 个元件正常工作, 设事件 A 表示图 1 系统正常工作, 事件 B 表示图 2 系统正常工作.

由图 1 所示系统可知, 事件 $A=A_1A_2\cup A_3A_4$, 系统正常工作的概率为

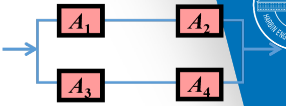


图: 1

由图 1 所示系统可知, 事件 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$, 系统正常工作的概率为

$$P(A) = P(A_1A_2 \cup A_3A_4)$$

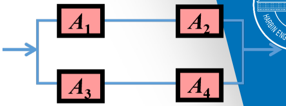


图: 1

由图 1 所示系统可知, 事件 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$, 系统正常工作的概率为

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2 \cup A_3A_4) \\
&= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)
\end{aligned}
$$

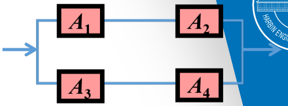


图: 1

由图 1 所示系统可知, 事件 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$, 系统正常工作的概率为

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2 \cup A_3A_4) \\
&= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\
&= 0.9^2 + 0.9^2 - 0.9^4 = 0.9639.
\end{aligned}
$$

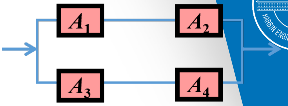


图: 1

由图 1 所示系统可知, 事件 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$, 系统正常工作的概率为

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2 \cup A_3A_4) \\
&= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\
&= 0.9^2 + 0.9^2 - 0.9^4 = 0.9639.
\end{aligned}
$$

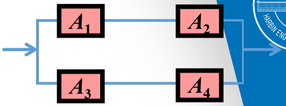


图: 1

由图 2 可知, $B = (A_1 \cup A_3)(A_2 \cup A_4)$, 系统正常工作的概率为

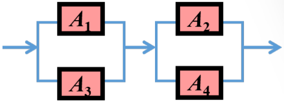


图: 2

由图 1 所示系统可知, 事件 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$, 系统正常工作的概率为

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A_1A_2 \cup A_3A_4) \\ &= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &= 0.9^2 + 0.9^2 - 0.9^4 = 0.9639.\end{aligned}$$

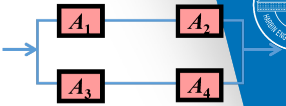


图: 1

由图 2 可知, $B = (A_1 \cup A_3)(A_2 \cup A_4)$, 系统正常工作的概率为

$$P(B) = P\left((A_1 \cup A_3)(A_2 \cup A_4)\right)$$

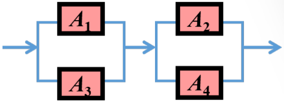


图: 2

由图 1 所示系统可知, 事件 $A=A_1A_2\cup A_3A_4$, 系统正常工作的概率为

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1A_2\cup A_3A_4)\\&=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)\\&=0.9^2+0.9^2-0.9^4=0.9639.\end{aligned}$$

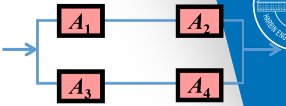


图: 1

由图 2 可知, $B=(A_1\cup A_3)(A_2\cup A_4)$, 系统正常工作的概率为

$$\begin{aligned}P(B)&=P\left((A_1\cup A_3)(A_2\cup A_4)\right)\\&=P(A_1\cup A_3)\times P(A_2\cup A_4)\end{aligned}$$

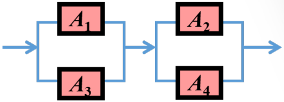


图: 2

由图 1 所示系统可知, 事件 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$, 系统正常工作的概率为

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2 \cup A_3A_4) \\
&= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\
&= 0.9^2 + 0.9^2 - 0.9^4 = 0.9639.
\end{aligned}
$$

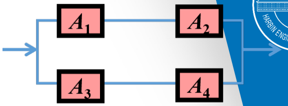


图: 1

由图 2 可知, $B = (A_1 \cup A_3)(A_2 \cup A_4)$, 系统正常工作的概率为

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P\left((A_1 \cup A_3)(A_2 \cup A_4)\right) \\
&= P(A_1 \cup A_3) \times P(A_2 \cup A_4) \\
&= \left(1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_3})\right)^2
\end{aligned}
$$

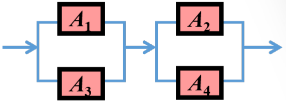


图: 2

由图 1 所示系统可知, 事件 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$, 系统正常工作的概率为

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2 \cup A_3A_4) \\
&= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\
&= 0.9^2 + 0.9^2 - 0.9^4 = 0.9639.
\end{aligned}
$$

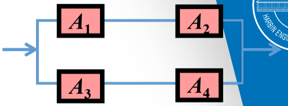


图: 1

由图 2 可知, $B = (A_1 \cup A_3)(A_2 \cup A_4)$, 系统正常工作的概率为

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P\left((A_1 \cup A_3)(A_2 \cup A_4)\right) \\
&= P(A_1 \cup A_3) \times P(A_2 \cup A_4) \\
&= \left(1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_3})\right)^2 \\
&= (1 - 0.01)^2 = 0.9801
\end{aligned}
$$

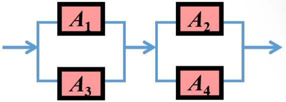


图: 2

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

证明：(方法一) 由 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$,

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

证明：(方法一) 由 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$, **得到**

$$P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|\overline{B}) = P(A|\overline{B})$$

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, 且 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. 证明 A 与 B 相互独立.

证明：(方法一) 由 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$，得到

$$P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|\overline{B}) = P(A|\overline{B})$$

利用条件概率定义有

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

证明：(方法一) 由 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$，**得到**

$$P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|\overline{B}) = P(A|\overline{B})$$

利用条件概率定义有

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

恒等变换, 得

$$P(AB)\left[1 - P(B)\right] = P(B)\left[P(A) - P(AB)\right]$$

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

恒等变换, 得

$$P(AB)\left[1 - P(B)\right] = P(B)\left[P(A) - P(AB)\right]$$

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

恒等变换, 得

$$P(AB)\left[1 - P(B)\right] = P(B)\left[P(A) - P(AB)\right]$$

即

$$P(AB) - P(AB)P(B) = P(A)P(B) - P(B)P(AB)$$

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, 且 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. 证明 A 与 B 相互独立.

恒等变换, 得

$$P(AB)\left[1 - P(B)\right] = P(B)\left[P(A) - P(AB)\right]$$

即

$$P(AB) - P(AB)P(B) = P(A)P(B) - P(B)P(AB)$$

得到

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

所以 A 与 B 相互独立. □

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

证明：(方法二) 因为 $0 < P(A)P(B) < 1$, **所以有** $P(B) > 0$.

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

证明：(方法二) 因为 $0 < P(A)P(B) < 1$, **所以有** $P(B) > 0$.
由 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$, **知** $P(A|B) = P(A|\overline{B})$

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

证明：(方法二) 因为 $0 < P(A)P(B) < 1$, **所以有** $P(B) > 0$.
由 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$, **知** $P(A|B) = P(A|\overline{B})$
对于事件 A **由全概率公式可知**

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

证明：(方法二) 因为 $0 < P(A)P(B) < 1$, **所以有** $P(B) > 0$.
由 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$, **知** $P(A|B) = P(A|\overline{B})$
对于事件 A **由全概率公式可知**

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, **且** $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. **证明** A **与** B **相互独立.**

证明：(方法二) 因为 $0 < P(A)P(B) < 1$, **所以有** $P(B) > 0$.
由 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$, **知** $P(A|B) = P(A|\overline{B})$
对于事件 A **由全概率公式可知**

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) \\ &= P(A|B)\left[P(B) + P(\overline{B})\right] \end{aligned}$$

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, 且 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. 证明 A 与 B 相互独立.

证明：(方法二) 因为 $0 < P(A)P(B) < 1$, 所以有 $P(B) > 0$.
由 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$, 知 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$
对于事件 A 由全概率公式可知

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) \\ &= P(A|B)\left[P(B) + P(\overline{B})\right] \\ &= P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \end{aligned}$$

例 4

设 $0 < P(A)P(B) < 1$, 且 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. 证明 A 与 B 相互独立.

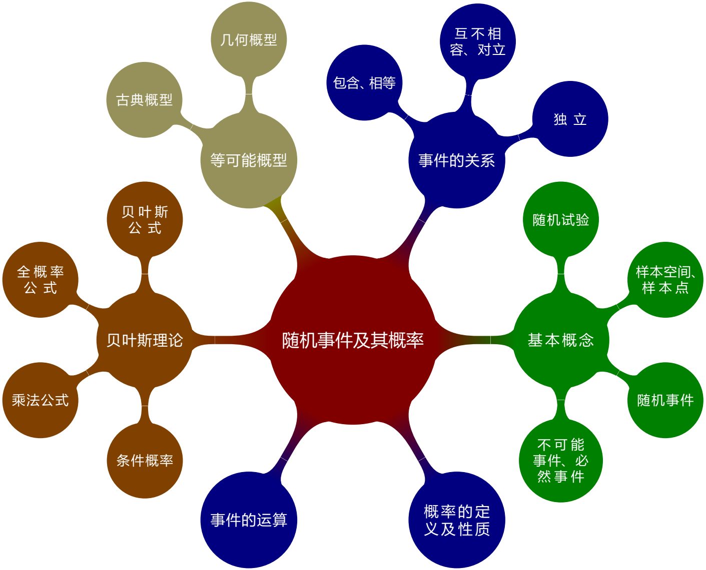
证明：(方法二) 因为 $0 < P(A)P(B) < 1$, **所以有** $P(B) > 0$.
由 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$, **知** $P(A|B) = P(A|\overline{B})$
对于事件 A 由全概率公式可知

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) \\
&= P(A|B)\left[P(B) + P(\overline{B})\right] \\
&= P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}
\end{aligned}
$$

于是得到 $P(AB) = P(A)P(B)$, **因此 A 与 B 相互独立.** $\square$

习题课

知识点总结


随机事件及其概率
等可能概型
几何概型
古典概型
事件的关系
包含、相等
互不相容、对立
独 立
基本概念
随机试验
样本空间、样本点
随机事件
不可能事件、必然事件
概率的定义及性质
事件的运算
贝叶斯理论
贝叶斯公式
全概率公式
乘法公式
条件概率

例 1

设 A、B、C 为三个事件，试用事件的运算关系表示下列事件：

(1) A、B、C 恰有两个发生；

(2) A、B、C 至少有两个发生；

(3) A、B、C 至多有两个发生.

例 1

设 A、B、C 为三个事件，试用事件的运算关系表示下列事件：

(1) A、B、C 恰有两个发生；

(2) A、B、C 至少有两个发生；

(3) A、B、C 至多有两个发生.

解：

(1) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

例 1

设 A、B、C 为三个事件，试用事件的运算关系表示下列事件：

(1) A、B、C **恰有两个发生；**

(2) A、B、C **至少有两个发生；**

(3) A、B、C **至多有两个发生.**

解：

(1) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$

(2) $AB \cup BC \cup AC$

例 1

设 A、B、C 为三个事件，试用事件的运算关系表示下列事件：

(1) A、B、C 恰有两个发生；

(2) A、B、C 至少有两个发生；

(3) A、B、C 至多有两个发生.

解：

(1) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$

(2) $AB\cup BC\cup AC$

(3) $\overline{ABC}$

例 2

设事件 A 表示"甲商品畅销, 乙商品滞销", 则其对立事件 $\overline{A}$ 表示 ______.

(A) 甲商品滞销，乙商品畅销;

(B) 甲乙商品均畅销;

(C) 甲乙商品均滞销;

(D) 甲商品滞销或乙商品畅销.

例 2

设事件 A 表示"甲商品畅销,乙商品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 表示 ______.

(A) 甲商品滞销，乙商品畅销;

(B) 甲乙商品均畅销;

(C) 甲乙商品均滞销;

(D) 甲商品滞销或乙商品畅销.

解：设事件 B 表示甲商品畅销，事件 C 表示乙商品滞销，则 $A = BC$，于是有

$$\overline{A} = \overline{BC} = \overline{B} \bigcup \overline{C}$$

即甲商品滞销或乙商品畅销.

例 2

设事件 A 表示“甲商品畅销，乙商品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 表示 $\underline{\quad D \quad}$.

(A) 甲商品滞销，乙商品畅销;

(B) 甲乙商品均畅销;

(C) 甲乙商品均滞销;

(D) 甲商品滞销或乙商品畅销.

解：设事件 B 表示甲商品畅销，事件 C 表示乙商品滞销，则 $A = BC$，于是有

$$\overline{A} = \overline{BC} = \overline{B} \bigcup \overline{C}$$

即甲商品滞销或乙商品畅销.

例 3

对任意事件 A 和 B，以下选项与 $A \bigcup B = B$ 不等价的是 ______.

(A) $A \subset B$;　　(B) $\overline{B} \subset \overline{A}$;

(C) $\overline{A}B = \varnothing$;　　(D) $A\overline{B} = \varnothing$.

例 3

对任意事件 A 和 B，以下选项与 $A \bigcup B = B$ 不等价的是 ______.

(A) $A \subset B$; (B) $\overline{B} \subset \overline{A}$;

(C) $\overline{A}B = \varnothing$; (D) $A\overline{B} = \varnothing$.

解：由 $A \bigcup B = B$ 可知 $A \subset B$，等价于 $\overline{B} \subset \overline{A}$，等价于 $A\overline{B} = \varnothing$

例 3

对任意事件 A 和 B，以下选项与 $A\bigcup B=B$ 不等价的是 $\underline{\quad C \quad}$.

(A) $A\subset B$;　　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$;

(C) $\overline{A}B=\varnothing$;　　(D) $A\overline{B}=\varnothing$.

解：由 $A\bigcup B=B$ 可知 $A\subset B$，等价于 $\overline{B}\subset\overline{A}$，等价于 $A\overline{B}=\varnothing$

例 4

设事件 A 和 B 同时发生时，事件 C 也发生，则 ______.

(A) $P(C)=P(A\bigcap B)$;

(B) $P(C)\leq P(A)+P(B)-1$;

(C) $P(C)=P(A\bigcup B)$;

(D) $P(C)\geq P(A)+P(B)-1$.

例 4

设事件 A 和 B 同时发生时，事件 C 也发生，则 ______.

(A) $P(C)=P(A\bigcap B)$;

(B) $P(C)\leq P(A)+P(B)-1$;

(C) $P(C)=P(A\bigcup B)$;

(D) $P(C)\geq P(A)+P(B)-1$.

解：由事件 A 和 B 同时发生时，事件 C 也发生可知 $AB\subset C$，则有

$$P(AB)\leq P(C)$$

又因为

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(AB)\geq P(A)+P(B)-1$$

所以有 $P(C)\geq P(A)+P(B)-1$.

例 4

设事件 A 和 B 同时发生时，事件 C 也发生，则 $\underline{\quad D \quad}$.

(A) $P(C)=P(A\bigcap B)$;

(B) $P(C)\le P(A)+P(B)-1$;

(C) $P(C)=P(A\bigcup B)$;

(D) $P(C)\ge P(A)+P(B)-1$.

解：由事件 A 和 B 同时发生时，事件 C 也发生可知 $AB\subset C$，则有

$$P(AB)\le P(C)$$

又因为

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(AB)\ge P(A)+P(B)-1$$

所以有 $P(C)\ge P(A)+P(B)-1$.

例 5

随机事件 A 和 B 同时发生时的概率 $P(AB)=0$，则 ______.

(A) A 与 B 互斥；

(B) AB 是不可能事件；

(C) AB 未必是不可能事件；

(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

例 5

随机事件 A 和 B 同时发生时的概率 $P(AB)=0$，则 ______.

(A) A 与 B 互斥； (B) AB 是不可能事件；

(C) AB 未必是不可能事件； (D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

解：$P(AB)=0 \nRightarrow AB=\varnothing$，故选项（A）、（B）、（D）错误.

例 5

随机事件 A 和 B 同时发生时的概率 $P(AB)=0$，则 $\underline{\quad C \quad}$.

(A) A 与 B 互斥； (B) AB 是不可能事件；

(C) AB 未必是不可能事件； (D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

解：$P(AB)=0 \nRightarrow AB=\varnothing$，故选项（A）、（B）、（D）错误.

例 6

将一枚均匀硬币独立抛掷两次,引入事件 $A_1 =$"第一次出现正面";$A_2 =$"第二次出现正面"; $A_3 =$ "正反面各出现一次"; $A_4 =$ "正面出现两次", 则以下选项正确的是 ______.

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立;

(B) A_2, A_3, A_4 相互独立;

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立;

(D) A_2, A_3, A_4 两两独立.

例 6

将一枚均匀硬币独立抛掷两次，引入事件 $A_1=$“第一次出现正面”；$A_2=$“第二次出现正面”；$A_3=$“正反面各出现一次”；$A_4=$“正面出现两次”，则以下选项正确的是 ______.

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立；　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立；

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立；　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立.

解：由题意可知 $A_1A_2A_3=\varnothing$，$A_2A_3A_4=\varnothing, A_3A_4=\varnothing$，且 $P(A_i)\neq 0 (i=1,2,3,4)$，显然有

$$P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3), P(A_2A_3A_4)\neq P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_3A_4)\neq P(A_3)P(A_4)$$

例 6

将一枚均匀硬币独立抛掷两次,引入事件 A_1 =“第一次出现正面”;A_2 = “第二次出现正面”; A_3 = “正反面各出现一次”; A_4 = “正面出现两次”, 则以下选项正确的是 $\underline{\quad C \quad}$.

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立;

(B) A_2, A_3, A_4 相互独立;

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立;

(D) A_2, A_3, A_4 两两独立.

解:由题意可知 $A_1A_2A_3 = \varnothing$, $A_2A_3A_4 = \varnothing$,$A_3A_4 = \varnothing$, 且 $P(A_i) \neq 0 (i = 1, 2, 3, 4)$, 显然有

$$P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3), P(A_2A_3A_4) \neq P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_3A_4) \neq P(A_3)P(A_4)$$

例 7

对于任意两个随机事件 A 与 B，以下选项正确的是 ______.

(A) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(B) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 有可能独立;

(C) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(D) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定不独立.

例 7

对于任意两个随机事件 A 与 B，以下选项正确的是 ______.

(A) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(B) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 有可能独立;

(C) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(D) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定不独立.

解：设随机试验为：掷骰子观察出现的点数

例 7

对于任意两个随机事件 A 与 B，以下选项正确的是 ______.

(A) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(B) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 有可能独立;

(C) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(D) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定不独立.

解：设随机试验为：掷骰子观察出现的点数

(A) 若 $A =$ "点数小于 5"，$B =$ "点数大于 3"，则 $AB \neq \varnothing$，但是

$$P(AB) = \frac{1}{6} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{3}$$

故 A 与 B 不独立.

例 7

对于任意两个随机事件 A 与 B，以下选项正确的是 ______.

(A) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(B) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 有可能独立;

(C) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(D) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定不独立.

解：设随机试验为：掷骰子观察出现的点数

(C) 若 $A =$ “点数小于 4”，$B =$ “点数大于 3”，则 $AB = \varnothing$，但是

$$P(AB) = 0 \neq P(A)P(B) = \frac{1}{4}$$

故 A 与 B 不独立

例 7

对于任意两个随机事件 A 与 B，以下选项正确的是 ______.

(A) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(B) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 有可能独立;

(C) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(D) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定不独立.

解：设随机试验为：掷骰子观察出现的点数

(D) 若 $A =$ “点数小于 4”，$B =$ “点数大于 7”，则 $AB = \varnothing$，但是

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0$$

故 A 与 B 独立

例 7

对于任意两个随机事件 A 与 B，以下选项正确的是 $\underline{\quad C \quad}$.

(A) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(B) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A 与 B 有可能独立;

(C) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定独立;

(D) 若 $AB = \varnothing$，则 A 与 B 一定不独立.

解：设随机试验为：掷骰子观察出现的点数

(D) 若 $A =$ “点数小于 4”，$B =$ “点数大于 7”，则 $AB = \varnothing$，但是

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0$$

故 A 与 B 独立

例 8

设 A 与 B 是任意的两个随机事件，且 A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则条件概率 $P(AB|\overline{C})=$ ______ .

例 8

设 A 与 B 是任意的两个随机事件，且 A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则条件概率 $P(AB|\overline{C})=$ ______.

解：$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

例 8

设 A 与 B 是任意的两个随机事件，且 A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则条件概率 $P(AB|\overline{C})=$ $\underline{\quad\dfrac{3}{4}\quad}$.

解：$P(AB|\overline{C})=\dfrac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\dfrac{P(AB)-P(ABC)}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$

例 9（随机取数问题）

从 $1,2,\cdots,10$ 共十个数字中任取一个，假定每个数字都以 $\dfrac{1}{10}$ 的概率被取中，取后还原，先后取出 7 个数字，试求下列各事件的概率：

(1) $A_1 =$ “7 个数字全不相同”；

(2) $A_2 =$ “不含 10 与 1”；

(3) $A_3 =$ “10 恰好出现两次”；

(4) $A_4 =$ “至少出现两次 10”．

例 9（随机取数问题）

从 $1,2,\cdots,10$ 共十个数字中任取一个，假定每个数字都以 $\dfrac{1}{10}$ 的概率被取中，取后还原，先后取出 7 个数字，试求下列各事件的概率：

(1) $A_1 =$ “7 个数字全不相同”；

(2) $A_2 =$ “不含 10 与 1”；

(3) $A_3 =$ “10 恰好出现两次”；

(4) $A_4 =$ “至少出现两次 10”．

解：

$$P(A_1) = \frac{A_{10}^7}{10^7}; P(A_2) = \frac{8^7}{10^7}$$

$$P(A_3) = \frac{C_7^2}{10^7}; P(A_4) = 1 - \frac{9^7}{10^7} - \frac{C_7^1 \times 9^6}{10^7}$$

例 10（摸球问题）

袋中装有 α 个白球与 β 个黑球，现采用以下三种方式从中任取 $a+b$ 个球 $(a \le \alpha, b \le \beta)$，求取出的球恰好有 a 个白球，b 个黑球的概率.

(1) **从袋中一次性抽取；**

(2) **无放回抽取，每次取一个球，取后不放回；**

(3) **有放回抽取，每次取一个球，取后放回.**

解：

例 10（摸球问题）

袋中装有 α 个白球与 β 个黑球，现采用以下三种方式从中任取 $a+b$ 个球 $(a \le \alpha, b \le \beta)$，求取出的球恰好有 a 个白球，b 个黑球的概率.

(1) **从袋中一次性抽取；**

(2) **无放回抽取，每次取一个球，取后不放回；**

(3) **有放回抽取，每次取一个球，取后放回.**

解：

(1) 一次性抽取：$P = \dfrac{C_{\alpha}^{a} C_{\beta}^{b}}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}$

例 10（摸球问题）

袋中装有 α 个白球与 β 个黑球，现采用以下三种方式从中任取 $a+b$ 个球 ($a \le \alpha, b \le \beta$)，求取出的球恰好有 a 个白球，b 个黑球的概率.

(1) 从袋中一次性抽取；

(2) 无放回抽取，每次取一个球，取后不放回；

(3) 有放回抽取，每次取一个球，取后放回.

解：

(2) 不放回抽样：$P = \dfrac{C_\alpha^a C_\beta^b (a+b)!}{A_{\alpha+\beta}^{a+b}} = \dfrac{C_\alpha^a C_\beta^b}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}$

例 10（摸球问题）

袋中装有 α 个白球与 β 个黑球，现采用以下三种方式从中任取 $a+b$ 个球 ($a \le \alpha, b \le \beta$)，求取出的球恰好有 a 个白球，b 个黑球的概率.

(1) **从袋中一次性抽取；**

(2) **无放回抽取，每次取一个球，取后不放回；**

(3) **有放回抽取，每次取一个球，取后放回.**

解：

(3) 放回抽样： $P = \dfrac{C_{a+b}^{a}\alpha^{a}\beta^{b}}{(\alpha+\beta)^{(a+b)}} = C_{a+b}^{a}\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{a}\left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{b}$

例 11（摸球问题）

袋中装有 α 个白球与 β 个黑球，现将球一只一只摸出，求第 $k(1 \le k \le \alpha+\beta)$ 次摸出的球为白球的概率.

例 11（摸球问题）

袋中装有 α 个白球与 β 个黑球，现将球一只一只摸出，求第 $k(1 \leq k \leq \alpha+\beta)$ 次摸出的球为白球的概率.

解：设事件 A_k 表示“第 $k(1 \leq k \leq \alpha+\beta)$ 次摸出的是白球”，则

$$P(A_1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, P(A_2) = ?, P(A_3) = ?$$

若计算第 3 次摸出白球的概率时，要考虑前 2 次摸球的各种情形，太过麻烦。

例 11（摸球问题）

袋中装有 α 个白球与 β 个黑球，现将球一只一只摸出，求第 $k(1 \le k \le \alpha+\beta)$ 次摸出的球为白球的概率.

解：设事件 A_k 表示“第 $k(1 \le k \le \alpha+\beta)$ 次摸出的是白球”，则

$$P(A_1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, P(A_2) = ?, P(A_3) = ?$$

若计算第 3 次摸出白球的概率时，要考虑前 2 次摸球的各种情形，太过麻烦。利用古典概型的思想：

$$P(A_k) = \frac{C_\alpha^1(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha+\beta)!} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

例 11（摸球问题）

袋中装有 α 个白球与 β 个黑球，现将球一只一只摸出，求第 $k(1 \le k \le \alpha+\beta)$ 次摸出的球为白球的概率.

解：设事件 A_k 表示“第 $k(1 \le k \le \alpha+\beta)$ 次摸出的是白球”，则

$$P(A_1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, P(A_2) = ?, P(A_3) = ?$$

若计算第 3 次摸出白球的概率时，要考虑前 2 次摸球的各种情形，太过麻烦。利用古典概型的思想：

$$P(A_k) = \frac{C_{\alpha}^{1}(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha+\beta)!} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

分母：将所有的球一只一只摸出，共有 $(\alpha+\beta)!$ 种方法. 分子：先找一只白球在第 k 次摸出，剩余的球一只一只摸出有 $(\alpha+\beta-1)!$ 种方法.

例 12

向 $[0,1]$ 之间随机地投两点，求（1）两点间的距离小于 $\frac{1}{2}$ 的概率；（2）两点坐标的乘积大于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

例 12

向 $[0,1]$ 之间随机地投两点，求（1）两点间的距离小于 $\frac{1}{2}$ 的概率；（2）两点坐标的乘积大于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

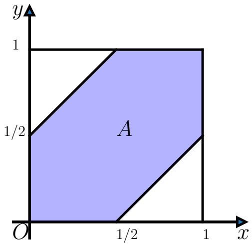
解：（1）设变量 X, Y 分别表示两点的坐标，则有

$$0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1$$

设事件 A 表示 “两点间的距离小于 $\frac{1}{2}$”，则

$$A \Leftrightarrow |X - Y| < \frac{1}{2}$$

故 $P(A) = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \dfrac{3}{4}$



例 12

向 $[0,1]$ 之间随机地投两点，求（1）两点间的距离小于 $\frac{1}{2}$ 的概率；（2）两点坐标的乘积大于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

例 12

向 $[0,1]$ 之间随机地投两点，求（1）两点间的距离小于 $\frac{1}{2}$ 的概率；（2）两点坐标的乘积大于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

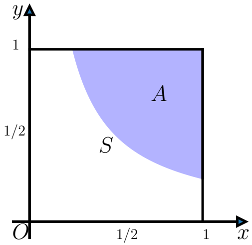
解：（2）设变量 X,Y 分别表示两点的坐标，则有

$$0 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1$$

设事件 B 表示"两点坐标乘积大于 $\frac{1}{4}$"，则

$$B \Leftrightarrow XY > \frac{1}{4}$$

故 $$P(A) = \frac{\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(1-\frac{1}{4x}\right)\mathrm{d}x}{1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$



例 13

设甲、乙、丙向一敌机射击，甲、乙、丙击中敌机的概率分别为 $0.4, 0.5, 0.7$，若只有一人击中飞机坠毁的概率为 0.2；若有两人击中，飞机坠毁的概率为 0.6；若有三人击中，飞机坠毁的概率为 0.9.（1）求飞机坠毁的概率；（2）若已知飞机坠毁，求是两人击中的概率.

例 13

设甲、乙、丙向一敌机射击，甲、乙、丙击中敌机的概率分别为 $0.4, 0.5, 0.7$，若只有一人击中飞机坠毁的概率为 0.2；若有两人击中，飞机坠毁的概率为 0.6；若有三人击中，飞机坠毁的概率为 0.9.（1）求飞机坠毁的概率；（2）若已知飞机坠毁，求是两人击中的概率.

解：设事件 A 表示“飞机坠毁”，$A_i(i=1,2,3)$ 分别表示“甲、乙、丙击中飞机”，$B_i(i=1,2,3)$ 表示“有 i 人击中飞机”.

例 13

设甲、乙、丙向一敌机射击，甲、乙、丙击中敌机的概率分别为 $0.4, 0.5, 0.7$，若只有一人击中飞机坠毁的概率为 0.2；若有两人击中，飞机坠毁的概率为 0.6；若有三人击中，飞机坠毁的概率为 0.9.（1）求飞机坠毁的概率；（2）若已知飞机坠毁，求是两人击中的概率.

解：设事件 A 表示“飞机坠毁”，$A_i(i=1,2,3)$ 分别表示“甲、乙、丙击中飞机”，$B_i(i=1,2,3)$ 表示“有 i 人击中飞机”.

由题意可知

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \bigcup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \bigcup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = 0.36$$

$$P(B_2) = P(A_1A_2\overline{A_3} \bigcup \overline{A_1}A_2A_3 \bigcup A_1\overline{A_2}A_3 \bigcup A_1A_2\overline{A_3}) = 0.41$$

$$P(B_3) = P(A_1A_2A_3) = 0.14$$

例 13

设甲、乙、丙向一敌机射击，甲、乙、丙击中敌机的概率分别为 $0.4, 0.5, 0.7$，若只有一人击中飞机坠毁的概率为 0.2；若有两人击中，飞机坠毁的概率为 0.6；若有三人击中，飞机坠毁的概率为 0.9.（1）求飞机坠毁的概率；（2）若已知飞机坠毁，求是两人击中的概率.

解：设事件 A 表示“飞机坠毁”，$A_i(i=1,2,3)$ 分别表示“甲、乙、丙击中飞机”，$B_i(i=1,2,3)$ 表示“有 i 人击中飞机”.

（1）由全概率公式，有

$$\begin{aligned}P(A) &= P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)\\ &= 0.36\times 0.2+0.41\times 0.6+0.14\times 0.9\\ &= 0.444\end{aligned}$$

例 13

设甲、乙、丙向一敌机射击，甲、乙、丙击中敌机的概率分别为 $0.4, 0.5, 0.7$，若只有一人击中飞机坠毁的概率为 0.2；若有两人击中，飞机坠毁的概率为 0.6；若有三人击中，飞机坠毁的概率为 0.9.（1）求飞机坠毁的概率；（2）若已知飞机坠毁，求是两人击中的概率.

解：设事件 A 表示"飞机坠毁"，$A_i(i=1,2,3)$ 分别表示"甲、乙、丙击中飞机"，$B_i(i=1,2,3)$ 表示"有 i 人击中飞机".

（2）由贝叶斯公式，有

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{0.246}{0.444} \approx 0.554$$

例 14

设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只，各箱含 0,1,2 只残次品的概率分别为 0.8,0.1,0.1，一位顾客预购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客开箱随机查看 4 只，若无残次品则购买，否则不买. 求（1）顾客购买此箱玻璃杯的概率 α；（2）顾客购买的此箱玻璃杯中，确实无残次品的概率 β.

例 14

设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只，各箱含 0,1,2 只残次品的概率分别为 0.8,0.1,0.1，一位顾客预购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客开箱随机查看 4 只，若无残次品则购买，否则不买. 求（1）顾客购买此箱玻璃杯的概率 α；（2）顾客购买的此箱玻璃杯中，确实无残次品的概率 β.

解：设 A 表示“顾客购买此箱玻璃杯”，B_i 表示“此箱玻璃杯中含有 $i(i=0,1,2)$ 个残次品”.

例 14

设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只，各箱含 0,1,2 只残次品的概率分别为 0.8,0.1,0.1，一位顾客预购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客开箱随机查看 4 只，若无残次品则购买，否则不买. 求（1）顾客购买此箱玻璃杯的概率 α；（2）顾客购买的此箱玻璃杯中，确实无残次品的概率 β.

解： 设 A 表示"顾客购买此箱玻璃杯"，B_i 表示"此箱玻璃杯中含有 $i(i=0,1,2)$ 个残次品".

(1) 由全概率公式，有

$$\alpha = P(A) = P(B_0)P(A|B_0) + P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$= 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} + 0.1 \times \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} \approx 0.94$$

例 14

设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只，各箱含 0,1,2 只残次品的概率分别为 0.8,0.1,0.1，一位顾客预购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客开箱随机查看 4 只，若无残次品则购买，否则不买. 求（1）顾客购买此箱玻璃杯的概率 α；（2）顾客购买的此箱玻璃杯中，确实无残次品的概率 β.

解：设 A 表示“顾客购买此箱玻璃杯”，B_i 表示“此箱玻璃杯中含有 $i(i=0,1,2)$ 个残次品”.

(2）由贝叶斯公式，有

$$\beta = P(B_0|A) = \frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)} = \frac{0.8}{0.94} \approx 0.85$$

概率论与数理统计

概率论与数理统计教研团队[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

2024 年　春

大工至善
大学至真

哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY