概率论与数理统计

概率论与数理统计教研团队[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

2024 年　春

大工至善
大学至真

哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

目　录

随机变量

随机试验的两类试验结果

随机变量

随机试验的两类试验结果

- 数量表示

随机变量

随机试验的两类试验结果

- **数量表示**
  - 掷一颗骰子，观察其出现的点数.

随机变量

随机试验的两类试验结果

- 数量表示
  - 掷一颗骰子, 观察其出现的点数.
  - 某地铁站一天的售票数.

随机变量

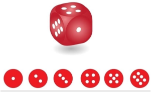
随机试验的两类试验结果

- 数量表示
  - 掷一颗骰子, 观察其出现的点数.
  - 某地铁站一天的售票数.
  - . . .

随机变量

随机试验的两类试验结果

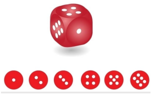
- 数量表示
    - 掷一颗骰子，观察其出现的点数.
    - 某地铁站一天的售票数.
    - ···
- 非数量表示



随机变量

随机试验的两类试验结果

- **数量表示**
  - 掷一颗骰子, 观察其出现的点数.
  - 某地铁站一天的售票数.
  - · · ·
- **非数量表示**
  - 抛一枚硬币, 观察其出现正面 H、反面 T 的情况.

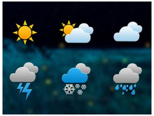


随机变量

随机试验的两类试验结果

- 数量表示
  - 掷一颗骰子, 观察其出现的点数.
  - 某地铁站一天的售票数.
  - · · ·
- 非数量表示
  - 抛一枚硬币, 观察其出现正面 H、反面 T 的情况.
  - 下个周一的天气情况.

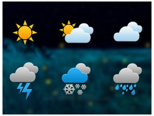




随机变量

随机试验的两类试验结果

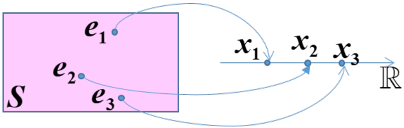
- **数量表示**
  - 掷一颗骰子, 观察其出现的点数.
  - 某地铁站一天的售票数.
  - · · ·
- **非数量表示**
  - 抛一枚硬币, 观察其出现正面 H、反面 T 的情况.
  - 下个周一的天气情况.
  - · · ·



随机变量的定义

定义 1

设随机试验 E 的样本空间为 $S = \{e\}$, 定义在 S 上的实值单值函数 $X = X(e), Y = Y(e), Z = Z(e)$ 等, 称为随机变量.



随机变量举例

抛一枚硬币, 观察其出现正面、反面的情况, 样本空间为

$$S = \{\text{正面}, \text{反面}\}$$

随机变量举例

抛一枚硬币, 观察其出现正面、反面的情况, 样本空间为

$$S=\{\text{正面},\text{反面}\}$$

在样本空间 S 上定义函数

随机变量举例

抛一枚硬币, 观察其出现正面、反面的情况, 样本空间为

$$S = \{\text{正面}, \text{反面}\}$$

在样本空间 S 上定义函数

$$X = \begin{cases} 1, & \text{正面}, \\ 0, & \text{反面}. \end{cases}$$

随机变量举例

抛一枚硬币, 观察其出现正面、反面的情况, 样本空间为

$$S = \{\text{正面}, \text{反面}\}$$

在样本空间 S 上定义函数

$$X = \begin{cases} 1, & \text{正面}, \\ 0, & \text{反面}. \end{cases}$$

关于随机变量的等式或者是不等式可以表示随机事件. 例如 $\{X = 1\}$ 或者 $\{0.5 < X < 5\}$ 都表示事件 $A = \{\text{正面}\}$.

随机变量举例

抛一枚硬币, 观察其出现正面、反面的情况, 样本空间为

$$S = \{\text{正面}, \text{反面}\}$$

在样本空间 S 上定义函数

$$X = \begin{cases} 1, & \text{正面}, \\ 0, & \text{反面}. \end{cases}$$

关于随机变量的等式或者是不等式可以表示随机事件. 例如 $\{X = 1\}$ 或者 $\{0.5 < X < 5\}$ 都表示事件 $A = \{\text{正面}\}$.

随机事件以一定的概率发生, 于是随机变量也是以一定的概率取值. 例如 $P(A) = \frac{1}{2}$, 于是有

$$P\{X = 1\} = P\{0.5 < X < 5\} = \frac{1}{2}.$$

随机变量的两个特点

（1）**随机变量是一个单值函数，这使得随机变量取不同实值对应的随机事件互不相容；**

随机变量的两个特点

(1) 随机变量是一个单值函数, 这使得随机变量取不同实值对应的随机事件互不相容;

(2) 事件可以用随机变量的取值来表达, 因此随机变量的取值伴随着一个概率.

离散型随机变量及其分布律

离散型随机变量的定义

定义 2

如果随机变量 X 的所有可能取值是有限个或可列无限多个, 则称 X 为离散型随机变量

离散型随机变量的定义

定义 2
如果随机变量 X 的所有可能取值是有限个或可列无限多个, 则称 X 为离散型随机变量

例如

- **某地铁站后天的售票数量 X;**

离散型随机变量的定义

定义 2
如果随机变量 X 的所有可能取值是有限个或可列无限多个, 则称 X 为离散型随机变量

例如

- **某地铁站后天的售票数量 X;**
- **某班级下周一缺课的学生数 Y;**

离散型随机变量的定义

定义 2
如果随机变量 X 的所有可能取值是有限个或可列无限多个, 则称 X 为离散型随机变量

例如

- 某地铁站后天的售票数量 X;
- 某班级下周一缺课的学生数 Y;
- 我市 110 报警指挥中心明天一昼夜收到的报警和求助数 Z

定义 3
设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_k(k=1,2,\cdots)$, 且 X 取各个可能值的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\cdots$$

则称上式为离散型随机变量 X 的分布律或概率分布.

离散型随机变量的定义

定义 3

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_k(k=1,2,\cdots)$, 且 X 取各个可能值的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

则称上式为离散型随机变量 X 的分布律或概率分布.

X 的分布律也可用表格表示

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

离散型随机变量的定义

定义 3

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_k(k=1,2,\cdots)$, 且 X 取各个可能值的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\cdots$$

则称上式为离散型随机变量 X 的分布律或概率分布.

X 的分布律也可用表格表示

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

由概率的定义, p_k 满足

(1) $p_k \geq 0;$

离散型随机变量的定义

定义 3
设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_k(k=1,2,\cdots)$, 且 X 取各个可能值的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

则称上式为离散型随机变量 X 的分布律或概率分布.

X 的分布律也可用表格表示

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

由概率的定义, p_k 满足

(1) $p_k \geq 0$;

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

例 1

一个盒子中共有 10 个球, 其中有 3 个白球 7 个黑球. 现从中任取 4 个球, 则 “取得的白球数 X ” 是一个离散型随机变量, 求 X 的分布律.

例 1

一个盒子中共有 10 个球, 其中有 3 个白球 7 个黑球. 现从中任取 4 个球, 则 “取得的白球数 X ” 是一个离散型随机变量, 求 X 的分布律.

解：随机变量 X **的所有取值为** $0, 1, 2, 3,$

例 1

一个盒子中共有 10 个球, 其中有 3 个白球 7 个黑球. 现从中任取 4 个球, 则 “取得的白球数 X ” 是一个离散型随机变量, 求 X 的分布律.

解：随机变量 X 的所有取值为 $0, 1, 2, 3$，则 X 取各个值得概率分别为

$$P\{X=0\}=\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{6}, \qquad P\{X=1\}=\frac{C_3^1 C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{1}{2}$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_3^2 C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{10}, \quad P\{X=3\}=\frac{C_3^3 C_7^1}{C_{10}^4}=\frac{1}{30}$$

例 1

一个盒子中共有 10 个球, 其中有 3 个白球 7 个黑球. 现从中任取 4 个球, 则 "取得的白球数 X" 是一个离散型随机变量, 求 X 的分布律.

解： 随机变量 X 的所有取值为 $0,1,2,3$，则 X 取各个值得概率分别为

$$P\{X=0\}=\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{6},\qquad P\{X=1\}=\frac{C_3^1C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{1}{2}$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_3^2C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{10},\quad P\{X=3\}=\frac{C_3^3C_7^1}{C_{10}^4}=\frac{1}{30}$$

X 的分布律也可表示为

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

例 2

已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X \geq 2\} = \frac{3}{4}$, 试确定参数 θ.

例 2

已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X \geq 2\} = \frac{3}{4}$, 试确定参数 θ.

解：由随机变量的取值情况, 可知

例 2

已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X \geq 2\} = \frac{3}{4}$, 试确定参数 θ.

解：由随机变量的取值情况, 可知

$$P\{X \geq 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$$

例 2

已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X \geq 2\} = \frac{3}{4}$, 试确定参数 θ.

解：由随机变量的取值情况, 可知

$$P\{X \geq 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 2\theta(1-\theta) + (1-\theta)^2$$

例 2

已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X \geq 2\} = \frac{3}{4}$**, 试确定参数** θ**.**

解：由随机变量的取值情况, 可知

$$P\{X \geq 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 2\theta(1-\theta) + (1-\theta)^2$$

解得 $\theta = \pm\frac{1}{2}$,

例 2

已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X \geq 2\} = \frac{3}{4}$, 试确定参数 θ.

解：由随机变量的取值情况, 可知

$$P\{X \geq 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 2\theta(1-\theta) + (1-\theta)^2$$

解得 $\theta = \pm\frac{1}{2}$, 又因为 $P\{X = 2\} = 2\theta(1-\theta) \geq 0$,

例 2

已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X \geq 2\} = \frac{3}{4}$, **试确定参数** θ.

解：由随机变量的取值情况, 可知

$$P\{X \geq 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 2\theta(1-\theta) + (1-\theta)^2$$

解得 $\theta = \pm\frac{1}{2}$, **又因为** $P\{X = 2\} = 2\theta(1-\theta) \geq 0$, **故** $\theta = \frac{1}{2}$.

(0-1) 分布

定义 4
设随机变量 X 只能取 0 与 1 两个值, 它的分布律为

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1; 0<p<1$$

即

$$P\{X=0\}=1-p, P\{X=1\}=p.$$

则称 X 服从参数为 p 的 (0-1) 分布, 记为随机变量 $X \sim b(1,p)$.

(0-1) 分布

定义 4
设随机变量 X 只能取 0 与 1 两个值, 它的分布律为

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1;0<p<1$$

即

$$P\{X=0\}=1-p,\ P\{X=1\}=p.$$

则称 X 服从参数为 p 的 $(0\text{-}1)$ 分布, 记为随机变量 $X\sim b(1,p)$.

(0-1) 分布的分布律表格形式

X	0	1
p_k	$1-p$	p

例如

某人练习投篮, 设随机变量 X 表示一次投篮命中与否, 设

$$X=\begin{cases}1, & \text{命中},\\ 0, & \text{未命中}.\end{cases}$$

已知该人投篮的命中率为 0.7, 则 X 服从 (0-1) 分布, 分布律为

X	0	1
p_k	0.3	0.7

记为 $X\sim b(1,0.7)$.

例如

某人练习投篮, 设随机变量 X 表示一次投篮命中与否, 设

$$X=\begin{cases}1, & \text{命中},\\ 0, & \text{未命中}.\end{cases}$$

已知该人投篮的命中率为 0.7, 则 X 服从 (0-1) 分布, 分布律为

X	0	1
p_k	0.3	0.7

记为 $X \sim b(1, 0.7)$.

当样本空间只有两个样点时, 可定义服从 (0-1) 分布的随机变量.

伯努利试验

将随机试验 E 重复进行 n 次, 若各次试验的结果互不影响, 即每次试验结果出现的概率都不依赖于其他各次试验的结果, 则称这 n 次试验是相互独立的.

伯努利试验

将随机试验 E 重复进行 n 次, 若各次试验的结果互不影响, 即每次试验结果出现的概率都不依赖于其他各次试验的结果, 则称这 n 次试验是相互独立的.

定义 5

设随机试验 E 只有两个可能的结果, 记为 A 及 $\overline{A}$, 并且

$$P(A)=p,\ P\left(\overline{A}\right)=1-p=q,\ (0<p<1)$$

将随机试验 E 独立地重复进行 n 次, 称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验.

例如

(1) **抛一枚硬币观察出现正面还是反面. 独立重复抛硬币 n 次.**

例如

(1) 抛一枚硬币观察出现正面还是反面. 独立重复抛硬币 n 次.

(2) 检验栽种的一棵树苗是否成活, 独立重复检验 n 棵树苗是否成活.

二项分布

若随机变量 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 则 X 的所有可能取值为 $0, 1, \cdots, n$, 因此 n 次试验中事件 A 发生 k 次, 即 $\{X = k\}$ 的概率为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \cdots, n; 0 < p < 1.$$

二项分布

若随机变量 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 则 X 的所有可能取值为 $0,1,\cdots,n$, 因此 n 次试验中事件 A 发生 k 次, 即 $\{X=k\}$ 的概率为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n;\ 0<p<1.$$

满足

二项分布

若随机变量 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 则 X 的所有可能取值为 $0, 1, \cdots, n$, 因此 n 次试验中事件 A 发生 k 次, 即 $\{X = k\}$ 的概率为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \cdots, n; 0 < p < 1.$$

满足

(1) $P\{X = k\} \geq 0, k = 0, 1, \cdots, n; 0 < p < 1.$

二项分布

若随机变量 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 则 X 的所有可能取值为 $0, 1, \cdots, n$, 因此 n 次试验中事件 A 发生 k 次, 即 $\{X = k\}$ 的概率为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \cdots, n;\ 0 < p < 1.$$

满足

(1) $P\{X = k\} \geq 0,\ k = 0, 1, \cdots, n;\ 0 < p < 1.$

(2)

$$\sum_{k=0}^{n} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

定义 6

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n;\ 0<p<1.$$

称 X 服从参数为 n,p 的二项分布, 记为 $X\sim b(n,p)$.

二项分布的定义

定义 6

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n;\ 0<p<1.$$

称 X 服从参数为 n,p 的二项分布, 记为 $X\sim b(n,p)$.

特别地, 当 $n=1$ 时, 二项分布化为 (0-1) 分布

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1;\ 0<p<1.$$

例 3

一定条件下, 若进行某种试验成功的概率为 0.7, 各次试验相互独立. 试计算在进行了 10 次该试验中恰有 8 次成功和有不少于 8 次成功的概率.

例 3

一定条件下, 若进行某种试验成功的概率为 0.7, 各次试验相互独立. 试计算在进行了 10 次该试验中恰有 8 次成功和有不少于 8 次成功的概率.

解: 设 X **表示 10 次试验中成功的次数, 则** $X \sim b(10, 0.7)$.

例 3

一定条件下, 若进行某种试验成功的概率为 0.7, 各次试验相互独立. 试计算在进行了 10 次该试验中恰有 8 次成功和有不少于 8 次成功的概率.

解：设 X **表示 10 次试验中成功的次数, 则** $X \sim b(10, 0.7)$.

恰有 8 次成功的概率 $P\{X = 8\} = C_{10}^{8}(0.7)^{8}(0.3)^{2} \approx 0.233$

例 3

一定条件下, 若进行某种试验成功的概率为 0.7, 各次试验相互独立. 试计算在进行了 10 次该试验中恰有 8 次成功和有不少于 8 次成功的概率.

解：设 X 表示 10 次试验中成功的次数, 则 $X \sim b(10, 0.7)$.

恰有 8 次成功的概率 $P\{X=8\} = C_{10}^{8}(0.7)^8(0.3)^2 \approx 0.233$

不少于 8 次成功的概率为

$$\begin{aligned} P\{X \geq 8\} &= P\{X=8\} + P\{X=9\} + P\{X=10\} \\ &= C_{10}^{8}(0.7)^8(0.3)^2 + C_{10}^{9}(0.7)^9(0.3) + C_{10}^{10}(0.7)^{10} \\ &\approx 0.382 \end{aligned}$$

二项分布的性质

对于固定的 n, p, 随机变量 $X \sim b(n, p)$, 当 k 增加时, 概率 $P\{X = k\}$ 先是随之增加, 直到达到最大值, 然后单调减少, 即

二项分布的性质

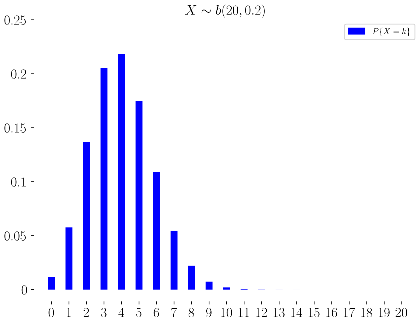
对于固定的 n, p, 随机变量 $X \sim b(n, p)$, 当 k 增加时, 概率 $P\{X = k\}$ 先是随之增加, 直到达到最大值, 然后单调减少, 即

(1) **当 $k < (n+1)p$ 时,$P\{X = k\}$ 递增;**
(2) **当 $k > (n+1)p$ 时,$P\{X = k\}$ 递减.**

二项分布的性质

对于固定的 n, p, 随机变量 $X \sim b(n,p)$, 当 k 增加时, 概率 $P\{X=k\}$ 先是随之增加, 直到达到最大值, 然后单调减少, 即

(1) **当 $k < (n+1)p$ 时,$P\{X=k\}$ 递增;**
(2) **当 $k > (n+1)p$ 时,$P\{X=k\}$ 递减.**



例 4

一盒灯泡有 100 只, 其中包含 5 只次品.

(1) **有放回地从盒中抽取 3 次, 每次抽取一只灯泡, 那么在 3 次抽取的灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?**

(2) **无放回地从盒中抽取 3 只灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?**

例 4

一盒灯泡有 100 只, 其中包含 5 只次品.

(1) **有放回地从盒中抽取 3 次, 每次抽取一只灯泡, 那么在 3 次抽取的灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?**

(2) **无放回地从盒中抽取 3 只灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?**

解: (1) 有放回抽取　3 重伯努利试验. 设随机变量 X 表示 3 次抽取中取到的次品数, 则 $X \sim b(3,p)$, 其中 $p = 0.05$ 为任取一只为次品的概率.

例 4

一盒灯泡有 100 只, 其中包含 5 只次品.

(1) **有放回地从盒中抽取 3 次, 每次抽取一只灯泡, 那么在 3 次抽取的灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?**

(2) **无放回地从盒中抽取 3 只灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?**

解: (1) 有放回抽取　3 重伯努利试验. 设随机变量 X 表示 3 次抽取中取到的次品数, 则 $X \sim b(3,p)$, 其中 $p=0.05$ 为任取一只为次品的概率.

故在 3 次抽取的灯泡中恰有 2 只是次品的概率

$$P\{X=2\}=C_3^2(0.05)^2(1-0.05)=0.007125$$

例 4

一盒灯泡有 100 只, 其中包含 5 只次品.

(1) 有放回地从盒中抽取 3 次, 每次抽取一只灯泡, 那么在 3 次抽取的灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?

(2) 无放回地从盒中抽取 3 只灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?

(2) 无放回抽取　前次抽取结果影响后续抽取, 不是伯努利试验.

例 4

一盒灯泡有 100 只, 其中包含 5 只次品.

(1) 有放回地从盒中抽取 3 次, 每次抽取一只灯泡, 那么在 3 次抽取的灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?

(2) 无放回地从盒中抽取 3 只灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?

(2) 无放回抽取　前次抽取结果影响后续抽取, 不是伯努利试验.

设随机变量 X 表示 3 次抽取中取到的次品数, 由古典概型计算可得在 3 次抽取的灯泡中恰有 2 只是次品的概率为

例 4

一盒灯泡有 100 只, 其中包含 5 只次品.

(1) **有放回地从盒中抽取 3 次, 每次抽取一只灯泡, 那么在 3 次抽取的灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?**

(2) **无放回地从盒中抽取 3 只灯泡中恰有 2 只是次品的概率是多少?**

(2) 无放回抽取　前次抽取结果影响后续抽取, 不是伯努利试验.

设随机变量 X 表示 3 次抽取中取到的次品数, 由古典概型计算可得在 3 次抽取的灯泡中恰有 2 只是次品的概率为

$$P\{X=2\}=\frac{C_{95}^{1}C_{5}^{2}}{C_{100}^{3}}\approx 0.00588$$

超几何分布

一批产品共 N 件, 其中 M 件是次品, 从中无放回地随机抽取 n 件产品进行检验. 以 X 表示抽取的 n 件产品中次品的件数.

超几何分布

一批产品共 N 件, 其中 M 件是次品, 从中无放回地随机抽取 n 件产品进行检验. 以 X 表示抽取的 n 件产品中次品的件数.

X 的所有可能取值为 $0, 1, \cdots, \min\{n, M\}$,

超几何分布

一批产品共 N 件, 其中 M 件是次品, 从中无放回地随机抽取 n 件产品进行检验. 以 X 表示抽取的 n 件产品中次品的件数.

X 的所有可能取值为 $0, 1, \cdots, \min\{n, M\}$，随机变量 X 取各个可能值的概率为

$$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \; k = 0, 1, \cdots, r.$$

其中 $r = \min\{n, M\}$, 且 $M \le N, n \le N$. 称随机变量 X 服从参数为 n, N, M 的超几何分布.

定义 7

设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots;\ \lambda>0.$$

称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X\sim P(\lambda)$ 或 $X\sim \pi(\lambda)$.

定义 7

设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots;\ \lambda>0.$$

称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X\sim P(\lambda)$ 或 $X\sim \pi(\lambda)$.

容易验证:

(1) $P\{X=k\}\geq 0, k=0,1,\cdots;$

泊松分布

定义 7
设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots;\ \lambda>0.$$

称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X\sim P(\lambda)$ 或 $X\sim \pi(\lambda)$.

容易验证:

(1) $P\{X=k\}\geq 0, k=0,1,\cdots;$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P\{X=k\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=1.$

泊松分布是一种常见的离散分布, 它常与单位时间 (或单位面积、单位产品等) 上的计数过程相联系, 例如

- 在一天内, 来到某商场的顾客数

泊松分布是一种常见的离散分布, 它常与单位时间 (或单位面积、单位产品等) 上的计数过程相联系, 例如

- 在一天内, 来到某商场的顾客数
- 在一个时间间隔内, 某种放射物质放射出的 α 粒子数

泊松分布是一种常见的离散分布，它常与单位时间 (或单位面积、单位产品等) 上的计数过程相联系，例如

- 在一天内，来到某商场的顾客数
- 在一个时间间隔内，某种放射物质放射出的 α 粒子数
- 一个铸件上的砂眼数

泊松分布是一种常见的离散分布, 它常与单位时间 (或单位面积、单位产品等) 上的计数过程相联系, 例如

- 在一天内, 来到某商场的顾客数
- 在一个时间间隔内, 某种放射物质放射出的 α 粒子数
- 一个铸件上的砂眼数
- 一段时间内, 机器出现的故障数

泊松分布是一种常见的离散分布, 它常与单位时间 (或单位面积、单位产品等) 上的计数过程相联系, 例如

- 在一天内, 来到某商场的顾客数
- 在一个时间间隔内, 某种放射物质放射出的 α 粒子数
- 一个铸件上的砂眼数
- 一段时间内, 机器出现的故障数
- 显微镜下单位分区内的细菌分布数

例 5

一电话交换台每分钟收到的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布, 求:

(1) **每分钟呼唤次数大于 10 的概率?**

(2) **每分钟恰有 8 次呼唤的概率?**

解：设呼唤次数为随机变量 X, 则 $X \sim P(4)$.

例 5

一电话交换台每分钟收到的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布, 求:

(1) 每分钟呼唤次数大于 10 的概率?

(2) 每分钟恰有 8 次呼唤的概率?

解：设呼唤次数为随机变量 X, 则 $X \sim P(4)$.

(1) 每分钟呼唤次数大于 10 的概率

例 5

一电话交换台每分钟收到的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布, 求:

(1) **每分钟呼唤次数大于 10 的概率?**

(2) **每分钟恰有 8 次呼唤的概率?**

解：设呼唤次数为随机变量 X, **则** $X \sim P(4)$.

(1) 每分钟呼唤次数大于 10 的概率

$$P\{X > 10\} = 1 - P\{X \leq 10\} = 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{4^k e^{-4}}{k!}$$

例 5

一电话交换台每分钟收到的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布, 求:

(1) **每分钟呼唤次数大于 10 的概率?**

(2) **每分钟恰有 8 次呼唤的概率?**

解: 设呼唤次数为随机变量 X, **则** $X \sim P(4)$.

(1) 每分钟呼唤次数大于 10 的概率

$$P\{X > 10\} = 1 - P\{X \leq 10\} = 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{4^k e^{-4}}{k!}$$

查泊松分布函数表 (附表 3), 可得到 $P\{X > 10\} = 0.0028$.

表: 泊松分布函数 $P\{X \le x\} = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

x \ λ	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
⋮			⋮		
7			0.9489		
8			0.9786		
10			0.9972		
⋮			⋮		

(2) $P\{X=8\}=P\{X\leq 8\}-P\{X\leq 7\}$

(2) $P\{X=8\}=P\{X\leq 8\}-P\{X\leq 7\}$

表: 泊松分布函数 $P\{X\leq x\}=\sum_{k=0}^{x}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

x \ λ	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
⋮			⋮		
7			0.9489		
8			0.9786		
10			0.9972		
⋮			⋮		

(2) $P\{X=8\}=P\{X\le 8\}-P\{X\le 7\}\ =0.0297$

表: 泊松分布函数 $P\{X\le x\}=\sum_{k=0}^{x}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

x \ λ	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
⋮			⋮		
7			0.9489		
8			0.9786		
10			0.9972		
⋮			⋮		

泊松定理

定理 8

如果存在常数 $\lambda > 0$, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $np_n \to \lambda$, 则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

泊松定理

定理 8
如果存在常数 $\lambda > 0$, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $np_n \to \lambda$, 则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

当 n 很大, p 很小, 而乘积 $\lambda = np$ 大小适中时, 利用泊松定理近似计算二项分布, 即

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

实际使用时, 一般 $n \geq 50, p \leq 0.1$ 就有比较好的近似.

k	二项分布 $P\{X=k\}$				泊松分布 $P\{X=k\}$
	$n=10$, $p=0.1$	$n=20$, $p=0.05$	$n=50$, $p=0.02$	$n=100$, $p=0.01$	$np=\lambda=1$
0	0.349	0.358	0.364	0.366	0.368
1	0.387	0.377	0.371	0.370	0.368
2	0.194	0.189	0.186	0.185	0.184
3	0.057	0.060	0.061	0.061	0.061
4	0.011	0.013	0.015	0.015	0.015
>4	0.002	0.003	0.003	0.003	0.004

例 6

根据以往数据, 某大型综合医院在一天内每 200 名就医患者中有 1 名是心脏病患者, 设各位患者的病情相互独立, 则该医院一天内在 1000 名患者中至少有 3 名是心脏病患者的概率有多大?

例 6

根据以往数据, 某大型综合医院在一天内每 200 名就医患者中有 1 名是心脏病患者, 设各位患者的病情相互独立, 则该医院一天内在 1000 名患者中至少有 3 名是心脏病患者的概率有多大?

解: 设随机变量 X 表示该医院一天内 1000 名患者中的心脏病患者数, 则 $X \sim b(1000, \frac{1}{200})$.

例 6

根据以往数据，某大型综合医院在一天内每 200 名就医患者中有 1 名是心脏病患者，设各位患者的病情相互独立，则该医院一天内在 1000 名患者中至少有 3 名是心脏病患者的概率有多大?

解：设随机变量 X **表示该医院一天内 1000 名患者中的心脏病患者数，则** $X \sim b(1000, \frac{1}{200})$.

$$
\begin{aligned}
P\{X \geq 3\} &= 1 - \sum_{k=0}^{2} P\{X = k\} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{2} C_{1000}^{k} \left(\frac{1}{200}\right)^{k} \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{1000-k}
\end{aligned}
$$

利用泊松定理近似计算, 取 $\lambda = np = 1000 \times \frac{1}{200} = 5$, **则**

利用泊松定理近似计算, 取 $\lambda = np = 1000 \times \frac{1}{200} = 5$, 则

$$
\begin{aligned}
P\{X \geq 3\} &= 1 - \sum_{k=0}^{2} P\{X = k\} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{2} C_{1000}^{k} \left(\frac{1}{200}\right)^{k} \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{1000-k} \\
&\approx 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{5^{k} e^{-5}}{k!}
\end{aligned}
$$

利用泊松定理近似计算, 取 $\lambda = np = 1000 \times \frac{1}{200} = 5$, 则

$$P\{X \geq 3\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} P\{X = k\}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{2} C_{1000}^{k} \left(\frac{1}{200}\right)^{k} \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{1000-k}$$

$$\approx 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{5^k e^{-5}}{k!}$$

查泊松分布表可得,

$$P\{X \geq 3\} \approx 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{5^k e^{-5}}{k!} = 1 - 0.1247 = 0.8753$$

例 7

某单位进行面试考核, 假设每个应聘者是否被录用是相互独立的. 根据以往数据, 每个应聘者被录用的概率为 0.02. 现对应聘者进行面试, 设随机变量 X 表示在第一个应聘者被录用时, 已经被面试的人数, 求 X 的分布律.

例 7

某单位进行面试考核, 假设每个应聘者是否被录用是相互独立的. 根据以往数据, 每个应聘者被录用的概率为 0.02. 现对应聘者进行面试, 设随机变量 X 表示在第一个应聘者被录用时, 已经被面试的人数, 求 X 的分布律.

解：设事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 表示第 i 个应聘者被录用, 由题设可知
$P(A_i)=0.02, i=1,2,\cdots$

例 7

某单位进行面试考核, 假设每个应聘者是否被录用是相互独立的. 根据以往数据, 每个应聘者被录用的概率为 0.02. 现对应聘者进行面试, 设随机变量 X 表示在第一个应聘者被录用时, 已经被面试的人数, 求 X 的分布律.

解: 设事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 表示第 i 个应聘者被录用, 由题设可知

$P(A_i)=0.02, i=1,2,\cdots$

故当 $k=1,2,\cdots$ 时, 有

例 7

某单位进行面试考核, 假设每个应聘者是否被录用是相互独立的. 根据以往数据, 每个应聘者被录用的概率为 0.02. 现对应聘者进行面试, 设随机变量 X 表示在第一个应聘者被录用时, 已经被面试的人数, 求 X 的分布律.

解: 设事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 表示第 i 个应聘者被录用, 由题设可知
$P(A_i)=0.02, i=1,2,\cdots$

故当 $k=1,2,\cdots$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
P\{X=k\} &= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k) \\
&= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{k-1}})P(A_k) \\
&= (1-p)^{k-1}p = 0.98^{k-1}\times 0.02
\end{aligned}
$$

定义 9

设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots;\ 0<p<1.$$

称 X 服从参数为 p 的几何分布, 记为 $X\sim G(p)$.

几何分布

定义 9

设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots;\ 0<p<1.$$

称 X 服从参数为 p 的几何分布, 记为 $X\sim G(p)$.

容易验证:

(1) $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\geq 0, k=1,2,\cdots;$

定义 9

设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots;\ 0<p<1.$$

称 X 服从参数为 p 的几何分布, 记为 $X\sim G(p)$.

容易验证:

(1) $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\geq 0, k=1,2,\cdots;$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p=\frac{p}{1-(1-p)}=1.$

几何分布

定义 9
设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots;\ 0<p<1.$$

称 X 服从参数为 p 的几何分布, 记为 $X\sim G(p)$.

容易验证:

(1) $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\geq 0, k=1,2,\cdots;$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p=\frac{p}{1-(1-p)}=1.$

在伯努利试验中, 设 $P(A)=p$, 记 X 为事件 A 首次发生时的试验次数, 则 X 服从参数为 p 的几何分布.

随机变量的分布函数

分布函数的定义

定义 10

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，称函数

$$F(x) = P\{X \le x\}, -\infty < x < +\infty$$

为随机变量 x 的分布函数.

分布函数的定义

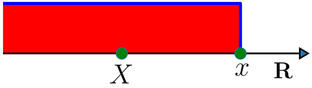
定义 10

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，称函数

$$F(x) = P\{X \le x\}, -\infty < x < +\infty$$

为随机变量 x 的分布函数.

注 1　分布函数 $F(x)$ 的函数值表示随机变量 X 在 x 以及 x 左侧的所有可能取值的概率累加和.



分布函数的定义

定义 10
设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，称函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}, -\infty < x < +\infty$$

为随机变量 x 的分布函数.

注 2 设 X 为离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$$

分布函数的定义

定义 10
设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，称函数

$$F(x)=P\{X\leq x\}, -\infty<x<+\infty$$

为随机变量 x 的分布函数.

注 2 **设 X 为离散型随机变量，其分布律为**

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$$

X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leq x\}=\sum_{x_k\leq x}p_k, -\infty<x<+\infty$$

分布函数的性质

分布函数的性质

（1）**有界性** $0 \le F(x) \le 1$, 且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0, F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1;$$

分布函数的性质

(1) **有界性** $0 \le F(x) \le 1$, 且

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1;$$

(2) **单调性** $F(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调不减函数, 即对于任意的 $x_1 < x_2$, 有

$$F(x_1) \le F(x_2);$$

分布函数的性质

(1) **有界性** $0 \le F(x) \le 1$, 且

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$$

(2) **单调性** $F(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调不减函数, 即对于任意的 $x_1 < x_2$, 有

$$F(x_1) \le F(x_2);$$

(3) **右连续** $F(x)$ 是 x 的右连续函数, 即对于任意的 x_0, 有

$$\lim_{x \to x_0^+} = F(x_0).$$

分布函数的性质

(1) **有界性** $0 \le F(x) \le 1$, 且

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1;$$

(2) **单调性** $F(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调不减函数, 即对于任意的 $x_1 < x_2$, 有

$$F(x_1) \le F(x_2);$$

(3) **右连续** $F(x)$ 是 x 的右连续函数, 即对于任意的 x_0, 有

$$\lim_{x \to x_0^+} = F(x_0).$$

三条基本性质是判断某个函数能否成为分布函数的充要条件!

利用分布函数以及函数在一点处的左极限, 可求解任意随机事件发生的概率.

- $P\{X < b\} = \lim\limits_{x \to b^-} F(x) = F(b-0);$

利用分布函数以及函数在一点处的左极限，可求解任意随机事件发生的概率.

- $P\{X < b\} = \lim\limits_{x \to b^-} F(x) = F(b-0);$
- $P\{X = b\} = F(b) - F(b-0);$

利用分布函数以及函数在一点处的左极限, 可求解任意随机事件发生的概率.

- $P\{X < b\} = \lim\limits_{x \to b^-} F(x) = F(b-0);$
- $P\{X = b\} = F(b) - F(b-0);$
- $P\{X > b\} = 1 - F(b);$

利用分布函数以及函数在一点处的左极限, 可求解任意随机事件发生的概率.

- $P\{X < b\} = \lim_{x \to b^-} F(x) = F(b-0);$
- $P\{X = b\} = F(b) - F(b-0);$
- $P\{X > b\} = 1 - F(b);$
- $P\{X \geq b\} = 1 - F(b-0);$

利用分布函数以及函数在一点处的左极限, 可求解任意随机事件发生的概率.

- $P\{X < b\} = \lim\limits_{x \to b^-} F(x) = F(b-0)$;
- $P\{X = b\} = F(b) - F(b-0)$;
- $P\{X > b\} = 1 - F(b)$;
- $P\{X \geq b\} = 1 - F(b-0)$;
- $P\{a < X < b\} = F(b-0) - F(a)$;

利用分布函数以及函数在一点处的左极限, 可求解任意随机事件发生的概率.

- $P\{X < b\} = \lim\limits_{x \to b^-} F(x) = F(b-0)$;
- $P\{X = b\} = F(b) - F(b-0)$;
- $P\{X > b\} = 1 - F(b)$;
- $P\{X \geq b\} = 1 - F(b-0)$;
- $P\{a < X < b\} = F(b-0) - F(a)$;
- $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$;

利用分布函数以及函数在一点处的左极限, 可求解任意随机事件发生的概率.

- $P\{X < b\} = \lim\limits_{x \to b^-} F(x) = F(b-0);$
- $P\{X = b\} = F(b) - F(b-0);$
- $P\{X > b\} = 1 - F(b);$
- $P\{X \geq b\} = 1 - F(b-0);$
- $P\{a < X < b\} = F(b-0) - F(a);$
- $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a);$
- $P\{a \leq X < b\} = F(b-0) - F(a-0);$

利用分布函数以及函数在一点处的左极限, 可求解任意随机事件发生的概率.

- $P\{X < b\} = \lim\limits_{x \to b^-} F(x) = F(b-0)$;
- $P\{X = b\} = F(b) - F(b-0)$;
- $P\{X > b\} = 1 - F(b)$;
- $P\{X \geq b\} = 1 - F(b-0)$;
- $P\{a < X < b\} = F(b-0) - F(a)$;
- $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$;
- $P\{a \leq X < b\} = F(b-0) - F(a-0)$;
- $P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a-0)$.

例 1

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = A + B\arctan x$, 试确定系数 A 与 B.

例 1

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$, 试确定系数 A 与 B.

解：由分布函数有界性 $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$, 有

$$\begin{cases} A-\dfrac{\pi}{2}B=0 \\ A+\dfrac{\pi}{2}B=1 \end{cases}$$

例 1

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$, 试确定系数 A 与 B.

解：由分布函数有界性 $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$, 有

$$\begin{cases} A-\dfrac{\pi}{2}B=0 \\ A+\dfrac{\pi}{2}B=1 \end{cases}$$

解得

$$A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{\pi}.$$

例 2

设随机变量 $X \sim b(2,\frac{1}{2})$，求 X 的分布函数 $F(x)$，并计算 $P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\right\}$,$P\{0 \le X \le 2\}$.

例 2

设随机变量 $X \sim b(2, \frac{1}{2})$，**求** X **的分布函数** $F(x)$，**并计算** $P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\right\}$,$P\{0 \leq X \leq 2\}$.

解：由随机变量 $X \sim b(2, \frac{1}{2})$, **可知分布律为**

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

例 2

设随机变量 $X \sim b(2, \frac{1}{2})$，求 X 的分布函数 $F(x)$，并计算 $P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\right\}$,$P\{0 \leq X \leq 2\}$.

解：由随机变量 $X \sim b(2, \frac{1}{2})$, 可知分布律为

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此可知, 当 $x < 0$ 时, $F(x) = 0$;

例 2

设随机变量 $X \sim b(2,\frac{1}{2})$，**求** X **的分布函数** $F(x)$，**并计算** $P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\right\}$,$P\{0 \le X \le 2\}$.

解：由随机变量 $X \sim b(2,\frac{1}{2})$, **可知分布律为**

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此可知, 当 $x < 0$ **时,** $F(x) = 0$;
当 $0 \le x < 1$ **时,** $F(x) = P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$;

例 2

设随机变量 $X \sim b(2,\frac{1}{2})$，求 X 的分布函数 $F(x)$，并计算 $P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\right\}$,$P\{0 \leq X \leq 2\}$.

解：由随机变量 $X \sim b(2,\frac{1}{2})$, 可知分布律为

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此可知, 当 $x < 0$ 时, $F(x) = 0$;

当 $0 \leq x < 1$ 时, $F(x) = P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$;

当 $1 \leq x < 2$ 时, $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{3}{4}$;

例 2

设随机变量 $X \sim b(2, \frac{1}{2})$**，求** X **的分布函数** $F(x)$**，并计算** $P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\right\}$,$P\{0 \le X \le 2\}$.

解：由随机变量 $X \sim b(2, \frac{1}{2})$**, 可知分布律为**

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

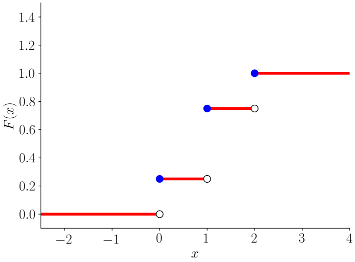
由此可知, 当 $x < 0$ **时,** $F(x) = 0$;
当 $0 \le x < 1$ **时,** $F(x) = P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$;
当 $1 \le x < 2$ **时,** $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{3}{4}$;
当 $x \ge 2$ **时,** $F(x) = 1$.

故分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

故分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$



分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

由分布函数可计算随机变量落在某个区间的概率, 即

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

由分布函数可计算随机变量落在某个区间的概率, 即

$$P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

由分布函数可计算随机变量落在某个区间的概率, 即

$$P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$P\left\{\frac{3}{2}<X\le\frac{5}{2}\right\}=F\left(\frac{5}{2}\right)-F\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1,\\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

由分布函数可计算随机变量落在某个区间的概率, 即

$$P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$P\left\{\frac{3}{2}<X\le\frac{5}{2}\right\}=F\left(\frac{5}{2}\right)-F\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$P\{0\le X\le 2\}=F(2)-F(0-0)=1$$

由随机变量 X 的分布律

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

也可计算随机变量落在某个区间的概率.

由随机变量 X 的分布律

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

也可计算随机变量落在某个区间的概率.

$$P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$$

由随机变量 X 的分布律

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

也可计算随机变量落在某个区间的概率.

$$P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$$

$$P\left\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\right\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{4}$$

由随机变量 X 的分布律

X	0	1	2
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

也可计算随机变量落在某个区间的概率.

$$P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$$

$$P\left\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\right\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{0 \le X \le 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 1$$

例 3

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ A-e^{-x}, & x\ge 1.\end{cases}$$

求常数 A, 概率 $P\{X=0\}, P\{X=\frac{1}{3}\}, P\{X=1\}$.

例 3

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ A-e^{-x}, & x\ge 1.\end{cases}$$

求常数 A, 概率 $P\{X=0\}, P\{X=\frac{1}{3}\}, P\{X=1\}$.

解：由分布函数性质 $F(+\infty)=1$ 可知

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\left(A-e^{-x}\right)=A=1.$$

因此随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leq x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geq 1.\end{cases}$$

因此随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1.\end{cases}$$

由分布函数可计算概率 $P\{X=0\}, P\{X=\frac{1}{3}\}, P\{X=1\}$.

因此随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1.\end{cases}$$

由分布函数可计算概率 $P\{X=0\}, P\{X=\frac{1}{3}\}, P\{X=1\}$.

$$P\{X=0\}=F(0)-F(0-0)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

因此随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1.\end{cases}$$

由分布函数可计算概率 $P\{X=0\}, P\{X=\frac{1}{3}\}, P\{X=1\}$.

$$P\{X=0\}=F(0)-F(0-0)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

$$P\left\{X=\frac{1}{3}\right\}=F\left(\frac{1}{3}\right)-F\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

因此随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1.\end{cases}$$

由分布函数可计算概率 $P\{X=0\}, P\{X=\frac{1}{3}\}, P\{X=1\}$.

$$P\{X=0\}=F(0)-F(0-0)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

$$P\left\{X=\frac{1}{3}\right\}=F\left(\frac{1}{3}\right)-F\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}$$

连续型随机变量及概率密度

连续型随机变量的定义

定义 11

设 X 的分布函数为 $F(x)$, 若存在非负可积函数 $f(x)$, 使得对于任意实数 x, 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

则称 X 为连续型随机变量, 称 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数, 简称概率密度或密度函数.

连续型随机变量的定义

定义 11
设 X 的分布函数为 $F(x)$, 若存在非负可积函数 $f(x)$, 使得对于任意实数 x, 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

则称 X 为连续型随机变量, 称 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数, 简称概率密度或密度函数.

注: 连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是连续函数, 即对于任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, $F(x)$ 在 x_0 处有

$$\lim_{x \to x_0^-} F(x) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) = \lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

连续型随机变量的定义

定义 11
设 X 的分布函数为 $F(x)$, 若存在非负可积函数 $f(x)$, 使得对于任意实数 x, 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

则称 X 为连续型随机变量, 称 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数, 简称概率密度或密度函数.

于是若 X 是连续型随机变量, 对于任意的 $x_0\in\mathbb{R}$, 有

$$P\{X=x_0\}=F(x_0)-F(x_0-0)=0$$

连续型随机变量的定义

定义 11

设 X 的分布函数为 $F(x)$, 若存在非负可积函数 $f(x)$, 使得对于任意实数 x, 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

则称 X 为连续型随机变量, 称 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数, 简称概率密度或密度函数.

另外, 有如下结论

$$A\text{是不可能事件} \Rightarrow P(A) = 0; P(A) = 0 \nRightarrow A\text{是不可能事件}.$$

概率密度 $f(x)$ 的性质

(1) **非负性** $f(x) \geq 0$;

概率密度 $f(x)$ 的性质

(1) **非负性** $f(x) \geq 0$;

(2) **正则性** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$;

概率密度 $f(x)$ 的性质

(1) **非负性** $f(x) \geq 0$;

(2) **正则性** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$;

性质 (1) 和 (2) 是函数 $f(x)$ 为概率密度的充要条件.

概率密度 $f(x)$ 的性质

(1) **非负性** $f(x) \geq 0$;

(2) **正则性** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$;

性质 (1) 和 (2) 是函数 $f(x)$ 为概率密度的充要条件.

(3) **对于任意实数 $x_1 < x_2$, 有**

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

概率密度 $f(x)$ 的性质

(1) **非负性** $f(x) \geq 0$;

(2) **正则性** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$;

性质 (1) 和 (2) 是函数 $f(x)$ 为概率密度的充要条件.

(3) **对于任意实数 $x_1 < x_2$, 有**

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

由于连续型随机变量 X 仅取一点的概率为零, 从而

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X < x_2\} &= P\{x_1 \leq X < x_2\} \\ &= P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 \leq X \leq x_2\} \end{aligned}$$

概率密度 $f(x)$ 的性质

(1) **非负性** $f(x) \geq 0$;

(2) **正则性** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$;

性质 (1) 和 (2) 是函数 $f(x)$ 为概率密度的充要条件.

(3) **对于任意实数 $x_1 < x_2$, 有**

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

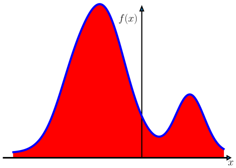
由于连续型随机变量 X 仅取一点的概率为零, 从而

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X < x_2\} &= P\{x_1 \leq X < x_2\} \\ &= P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 \leq X \leq x_2\} \end{aligned}$$

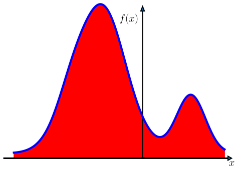
(4) **若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则 $F'(x) = f(x)$.**

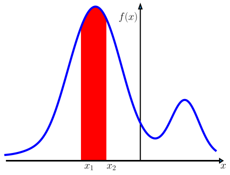
设 X 为连续型随机变量, 概率 $P\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为区间 (x_1, x_2) 上曲边梯形的面积.

设 X 为连续型随机变量, 概率 $P\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为区间 (x_1, x_2) 上曲边梯形的面积.

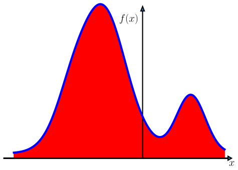


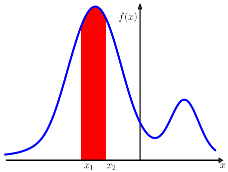
设 X 为连续型随机变量, 概率 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为区间 (x_1, x_2) 上曲边梯形的面积.





设 X 为连续型随机变量, 概率 $P\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为区间 (x_1, x_2) 上曲边梯形的面积.





注: 概率与概率密度之关系犹如质量与密度的关系.

概率密度 $f(x)$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的函数值 $f(x_0)$ 不是概率, 而是随机变量 X 在 x_0 处概率分布的密集程度, 从而

$$P\{x_0 < X \le x_0 + \mathrm{d}x\} \approx f(x_0)\mathrm{d}x$$

其中 $\mathrm{d}x$ 表示微元.

例 1

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3, \\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) **确定常数 k;**

(2) **求 X 的分布函数 $F(x)$;**

(3) **求 $P\{1<X\le \frac{7}{2}\}$.**

例 1

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 k;

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

(3) 求 $P\{1<X\le \frac{7}{2}\}$.

解：(1) 由概率密度的正则性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$, 得

$$\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} kx\mathrm{d}x+\int_{3}^{4}\left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{4}^{+\infty} 0\mathrm{d}x=1$$

例 1

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) **确定常数 k;**
(2) **求 X 的分布函数 $F(x)$;**
(3) **求 $P\{1<X\le \frac{7}{2}\}$.**

解：(1) 由概率密度的正则性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$, 得

$$\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} kx\mathrm{d}x+\int_{3}^{4}\left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{4}^{+\infty} 0\mathrm{d}x=1$$

解得 $k=\frac{1}{6}$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

当 $x<0$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}x=0$;

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

当 $x<0$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}x=0$;

当 $0\le x<3$ 时,

$$\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\frac{x}{6}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{12}$$

(2) X 的分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

当 $x<0$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}x=0$;

当 $0\le x<3$ 时,

$$\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\frac{x}{6}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{12}$$

当 $3\le x<4$ 时,

$$\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\frac{x}{6}\mathrm{d}x+\int_{3}^{x}\left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=-3+2x-\frac{x^2}{4}$$

X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x \geq 4$ 时,

$$\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\frac{x}{6}\mathrm{d}x+\int_{3}^{4}\left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{4}^{x}0\mathrm{d}x=1$$

X 的分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

当 $x\ge 4$ 时,

$$\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\frac{x}{6}\mathrm{d}x+\int_{3}^{4}\left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{4}^{x}0\mathrm{d}x=1$$

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{12}, & 0\le x<3,\\ -3+2x-\frac{x^2}{4}, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

(3)　因为 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{12}, & 0\le x<3,\\ -3+2x-\frac{x^2}{4}, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

(3) 因为 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{12}, & 0\le x<3,\\ -3+2x-\frac{x^2}{4}, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

所以

$$P\{1<X\le \frac{7}{2}\}=F\left(\frac{7}{2}\right)-F(1)=\frac{41}{48}$$

(3)　或者因为 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) 或者因为 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}P\{1<X\le \frac{7}{2}\}&=\int_1^{\frac{7}{2}} f(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_1^3 \frac{x}{6}\mathrm{d}x+\int_3^{\frac{7}{2}}\left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{41}{48}\end{aligned}$$

例 2

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

观察事件 $\{X \le \frac{1}{2}\}$ 是否发生, 独立重复进行 3 次, 用 Y 表示事件 $\{X \le \frac{1}{2}\}$ 发生的次数, 求 $P\{Y=2\}$.

例 2

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

观察事件 $\{X\leq\frac{1}{2}\}$ 是否发生, 独立重复进行 3 次, 用 Y 表示事件 $\{X\leq\frac{1}{2}\}$ 发生的次数, 求 $P\{Y=2\}$.

解：在一次观察中, 事件 $\{X\leq\frac{1}{2}\}$ 发生的概率为

$$P\left\{X\leq\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}3x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$$

例 2

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

观察事件 $\{X\le \frac{1}{2}\}$ 是否发生, 独立重复进行 3 次, 用 Y 表示事件 $\{X\le \frac{1}{2}\}$ 发生的次数, 求 $P\{Y=2\}$.

所以随机变量 $Y\sim b(3,\frac{1}{8})$, 故

$$P\{Y=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(1-\frac{1}{8}\right)^1=\frac{21}{512}.$$

均匀分布

定义 12

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布, 记为 $X\sim \mathrm{U}(a,b)$.

均匀分布

定义 12
若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布, 记为 $X\sim \mathrm{U}(a,b)$.

容易验证 $f(x)$ 满足:

均匀分布

定义 12
若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布, 记为 $X \sim \mathrm{U}(a,b)$.

容易验证 $f(x)$ 满足:

(1) $f(x) \geq 0, \; x \in (-\infty, +\infty)$;

均匀分布

定义 12
若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布, 记为 $X\sim \mathrm{U}(a,b)$.

容易验证 $f(x)$ 满足:

(1) $f(x)\geq 0$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=1.$

均匀分布的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

均匀分布的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$

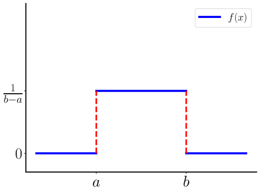


图: 概率密度

均匀分布的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$

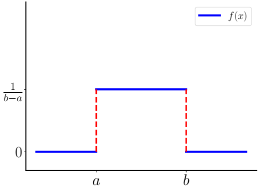


图: 概率密度

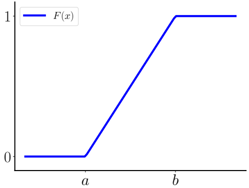


图: 分布函数

注： 随机变量 $X \sim \mathrm{U}(a,b)$, 则任意的 $(c, c+l) \subset (a,b)$, 有

$$P\{c < X \leq c+l\} = \int_{c}^{c+l} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x = \frac{l}{b-a}$$

随机变量在区间 (a,b) 上服从均匀分布, 落在任一子区间内的概率只与子区间的长度有关, 而与子区间的位置无关. 即随机变量落在任意等长度的子区间内的可能性是相同的.

例 3

在区间 $(0, 5)$ 上随机取一数 X.

(1) 写出 X 的概率密度函数和分布函数;

(2) 数 X 的取值不小于 2 的概率为多少?

例 3

在区间 $(0,5)$ 上随机取一数 X.

(1) 写出 X 的概率密度函数和分布函数;

(2) 数 X 的取值不小于 2 的概率为多少?

解：(1) 随机变量 X 在区间 $(0,5)$ 上服从均匀分布, 故其概率密度和分布函数为

例 3

在区间 $(0,5)$ 上随机取一数 X.

(1) 写出 X 的概率密度函数和分布函数;

(2) 数 X 的取值不小于 2 的概率为多少?

解: (1) 随机变量 X 在区间 $(0,5)$ 上服从均匀分布, 故其概率密度和分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0<x<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3

在区间 $(0,5)$ 上随机取一数 X.

(1) 写出 X 的概率密度函数和分布函数;

(2) 数 X 的取值不小于 2 的概率为多少?

解：(1) 随机变量 X 在区间 $(0,5)$ 上服从均匀分布, 故其概率密度和分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0<x<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x}{5}, & 0<x<5,\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$$

(2) 利用概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0<x<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

可求得随机变量 X 的取值不小于 2 概率, 即

(2) 利用概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0<x<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

可求得随机变量 X 的取值不小于 2 概率, 即

$$P\{X\geq 2\}=\int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{2}^{5}\frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$$

(2) 利用概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0<x<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

可求得随机变量 X 的取值不小于 2 概率, 即

$$P\{X\geq 2\}=\int_{2}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{2}^{5}\frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$$

或者, 利用分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ \frac{x}{5}, & 0<x<5,\\ 1, & x\geq 5.\end{cases}$$

也可求得随机变量 X 的取值不小于 2 概率, 即

(2) 利用概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0<x<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

可求得随机变量 X 的取值不小于 2 概率, 即

$$P\{X\geq 2\}=\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_2^5\frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$$

或者, 利用分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ \frac{x}{5}, & 0<x<5,\\ 1, & x\geq 5.\end{cases}$$

也可求得随机变量 X 的取值不小于 2 概率, 即

$$P\{X\geq 2\}=1-P\{X\leq 2\}=1-F(2)=\frac{3}{5}$$

定义 13

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数, 则称随机变量 X 服从参数 λ 的指数分布, 记为 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$.

定义 13
若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数，则称随机变量 X 服从参数 λ 的指数分布，记为 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$.

容易验证 $f(x)$ 满足:

定义 13
若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数, 则称随机变量 X 服从参数 λ 的指数分布, 记为 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$.

容易验证 $f(x)$ 满足:

(1) $f(x) \geq 0,\ x \in (-\infty,+\infty)$;

指数分布

定义 13
若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数, 则称随机变量 X 服从参数 λ 的指数分布, 记为 $X\sim \mathrm{E}(\lambda)$.

容易验证 $f(x)$ 满足:

(1) $f(x)\geq 0,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1.$

指数分布的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

指数分布的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

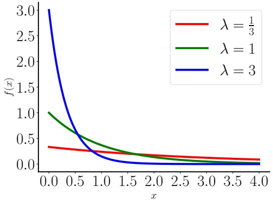


图: 概率密度

指数分布的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

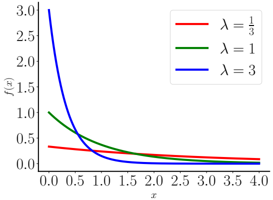


图: 概率密度

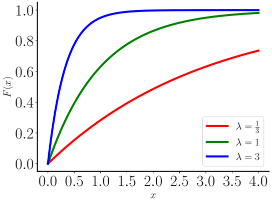


图: 分布函数

定理 14

若随机变量 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$，则对于任意 $s>0, t>0$ 有

$$P\{X>s+t | X>s\}=P\{X>t\}$$

指数分布的无记忆性

定理 14

若随机变量 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$, 则对于任意 $s > 0, t > 0$ 有

$$P\{X > s + t | X > s\} = P\{X > t\}$$

证明：因为随机变量 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$, 所以有

$$P\{X > s\} = \int_{s}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = e^{-\lambda s}$$

指数分布的无记忆性

定理 14

若随机变量 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$, **则对于任意** $s>0, t>0$ **有**

$$P\{X>s+t|X>s\}=P\{X>t\}$$

证明：因为随机变量 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$, **所以有**

$$P\{X>s\}=\int_{s}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d} x=e^{-\lambda s}$$

又因为 $\{X>s+t\} \subseteq\{X>s\}$,

指数分布的无记忆性

定理 14

若随机变量 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$, 则对于任意 $s>0, t>0$ 有

$$P\{X>s+t|X>s\}=P\{X>t\}$$

证明：因为随机变量 $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$, 所以有

$$P\{X>s\}=\int_{s}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d} x=e^{-\lambda s}$$

又因为 $\{X>s+t\} \subseteq\{X>s\}$，于是由条件概率

$$P\{X>s+t|X>s\}=\frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}=e^{-\lambda t}=P\{X>t\}.$$

例 4

设顾客在银行窗口接受服务的时间 (单位: 分) 服从参数为 $\frac{1}{10}$ 的指数分布. 如果某人刚好在你前面到窗口接受服务, 求你将等待

(1) **不超过 10 分钟的概率;**

(2) **10 分钟到 20 分钟之间的概率.**

例 4

设顾客在银行窗口接受服务的时间 (单位: 分) 服从参数为 $\frac{1}{10}$ 的指数分布. 如果某人刚好在你前面到窗口接受服务, 求你将等待

(1) 不超过 10 分钟的概率;

(2) 10 分钟到 20 分钟之间的概率.

解：设 X 表示顾客在银行窗口接受服务的时间, 则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 4

设顾客在银行窗口接受服务的时间 (单位: 分) 服从参数为 $\frac{1}{10}$ 的指数分布. 如果某人刚好在你前面到窗口接受服务, 求你将等待

(1) 不超过 10 分钟的概率;

(2) 10 分钟到 20 分钟之间的概率.

解：设 X 表示顾客在银行窗口接受服务的时间, 则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) $P\{X\leq 10\}=\int_{-\infty}^{10}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{10}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}\mathrm{d}x=1-e^{-1};$

例 4

设顾客在银行窗口接受服务的时间 (单位: 分) 服从参数为 $\frac{1}{10}$ 的指数分布. 如果某人刚好在你前面到窗口接受服务, 求你将等待

(1) 不超过 10 分钟的概率;

(2) 10 分钟到 20 分钟之间的概率.

解：设 X 表示顾客在银行窗口接受服务的时间, 则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) $P\{X\le 10\}=\int_{-\infty}^{10} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{10}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}\mathrm{d}x=1-e^{-1}$;

(2) $P\{10\le X\le 20\}=\int_{10}^{20}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}\mathrm{d}x=e^{-1}-e^{-2}$.

正态分布

定义 15

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 μ,σ 均为常数, 且 $\sigma>0$, 则称随机变量 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布, 记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

正态分布

定义 15
若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 μ,σ 均为常数, 且 $\sigma>0$, 则称随机变量 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布, 记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

容易验证 $f(x)$ 满足:

正态分布

定义 15
若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 μ,σ 均为常数, 且 $\sigma>0$, 则称随机变量 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布, 记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

容易验证 $f(x)$ 满足:

(1) $f(x)\geq 0,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

正态分布

定义 15
若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 μ,σ 均为常数, 且 $\sigma>0$, 则称随机变量 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布, 记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

容易验证 $f(x)$ 满足:

(1) $f(x)\geq 0,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

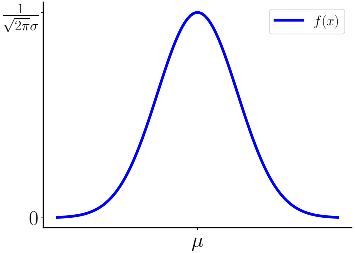
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=1.$

正态分布的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t,\ -\infty<x<+\infty$$

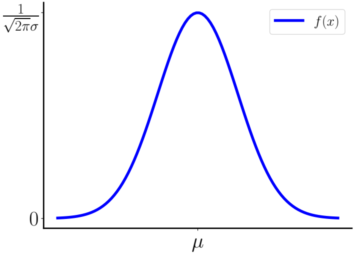
正态分布的分布函数为

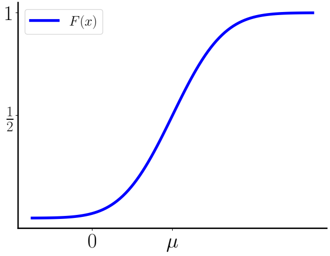
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t,\ -\infty<x<+\infty$$



正态分布的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-u)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t,\ -\infty<x<+\infty$$





正态分布的概率密度 $f(x)$ 还具有如下性质

正态分布的概率密度 $f(x)$ 还具有如下性质

(1) **概率密度 $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称, 即对于任意正数 h 有**

$$P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\};$$

正态分布的概率密度 $f(x)$ 还具有如下性质

(1) **概率密度 $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称, 即对于任意正数 h 有**

$$P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\};$$

(2) **当 $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取到最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, 且 x 离 μ 越远, $f(x)$ 的值越小;**

正态分布的概率密度 $f(x)$ 还具有如下性质

(1) 概率密度 $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称, 即对于任意正数 h 有

$$P\{\mu-h<X\le\mu\}=P\{\mu<X\le\mu+h\};$$

(2) 当 $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取到最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, 且 x 离 μ 越远, $f(x)$ 的值越小;

(3) 在 $x=\mu\pm\sigma$ 处, 曲线 $f(x)$ 有拐点;

正态分布的概率密度 $f(x)$ 还具有如下性质

(1) 概率密度 $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称, 即对于任意正数 h 有

$$P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\};$$

(2) 当 $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取到最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, 且 x 离 μ 越远, $f(x)$ 的值越小;

(3) 在 $x=\mu\pm\sigma$ 处, 曲线 $f(x)$ 有拐点;

(4) $f(x)$ 在直角坐标系内的图形呈钟行, 并且以 x 轴为渐近线;

正态分布的概率密度 $f(x)$ 还具有如下性质

(1) 概率密度 $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称, 即对于任意正数 h 有

$$P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\};$$

(2) 当 $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取到最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, 且 x 离 μ 越远, $f(x)$ 的值越小;

(3) 在 $x=\mu\pm\sigma$ 处, 曲线 $f(x)$ 有拐点;

(4) $f(x)$ 在直角坐标系内的图形呈钟行, 并且以 x 轴为渐近线;

(5) 当参数 σ 固定, 改变 μ 的值, $f(x)$ 的图形沿 x 轴平移, 形状不发生改变, 因此也称 μ 为正态分布的位置参数.

正态分布的概率密度 $f(x)$ 还具有如下性质

(1) 概率密度 $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称, 即对于任意正数 h 有

$$P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\};$$

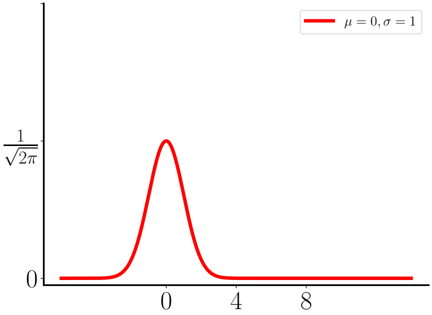
(2) 当 $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取到最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, 且 x 离 μ 越远, $f(x)$ 的值越小;

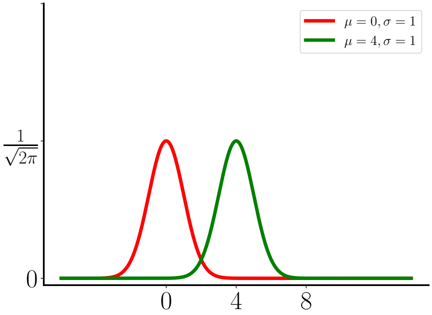
(3) 在 $x=\mu\pm\sigma$ 处, 曲线 $f(x)$ 有拐点;

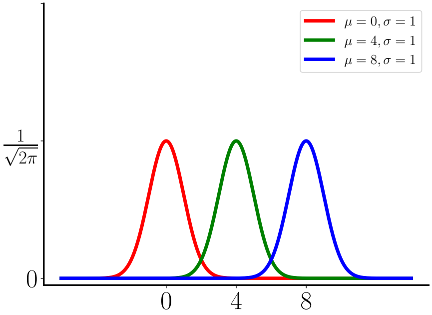
(4) $f(x)$ 在直角坐标系内的图形呈钟行, 并且以 x 轴为渐近线;

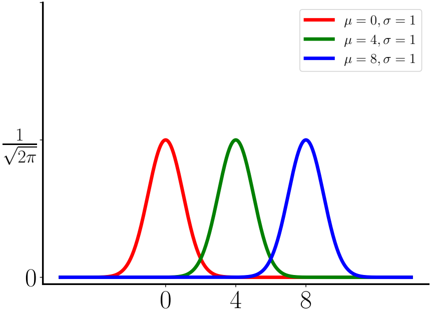
(5) 当参数 σ 固定, 改变 μ 的值, $f(x)$ 的图形沿 x 轴平移, 形状不发生改变, 因此也称 μ 为正态分布的位置参数.

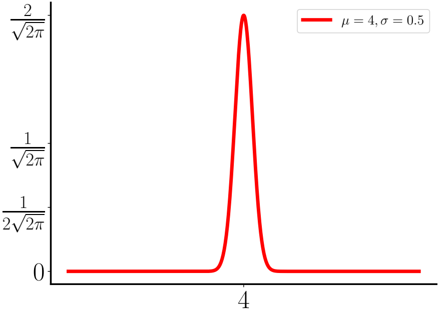
(6) 当参数 μ 固定, 改变 σ 的值, $f(x)$ 的图形位置不变, 形状发生改变. σ 越小, 曲线呈高而瘦; σ 越大, 曲线呈矮而胖, 因此也称 σ 为正态分布的形状参数.

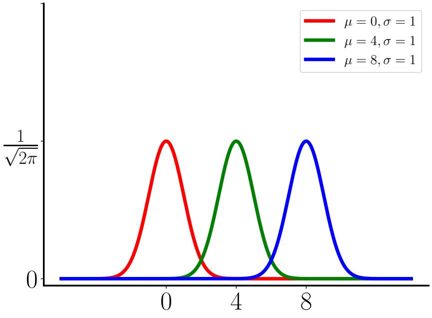

$\mu = 0, \sigma = 1$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
0
0
4
8

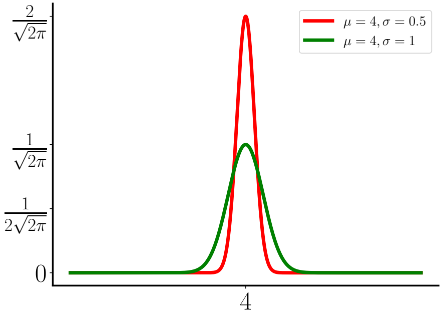

$\mu = 0, \sigma = 1$
$\mu = 4, \sigma = 1$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
0
0
4
8

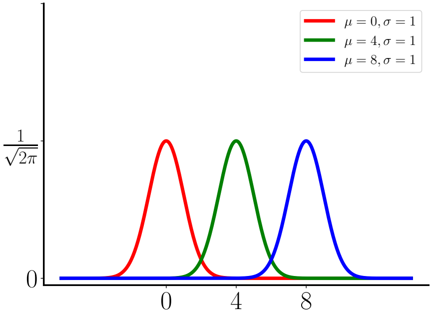

$\mu = 0, \sigma = 1$
$\mu = 4, \sigma = 1$
$\mu = 8, \sigma = 1$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
0
0
4
8

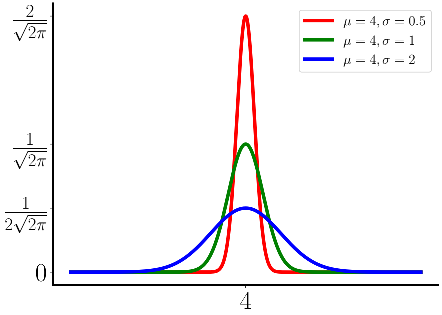

$\mu = 0, \sigma = 1$
$\mu = 4, \sigma = 1$
$\mu = 8, \sigma = 1$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
0
0
4
8


$\mu = 4, \sigma = 0.5$
$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$
0
4


$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
0
0
4
8
$\mu = 0, \sigma = 1$
$\mu = 4, \sigma = 1$
$\mu = 8, \sigma = 1$


$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$
0
4
$\mu = 4, \sigma = 0.5$
$\mu = 4, \sigma = 1$


$\mu = 0, \sigma = 1$
$\mu = 4, \sigma = 1$
$\mu = 8, \sigma = 1$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
0
0
4
8


$\mu = 4, \sigma = 0.5$
$\mu = 4, \sigma = 1$
$\mu = 4, \sigma = 2$
$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$
0
4

标准正态分布

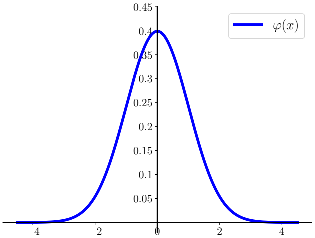
当 $\mu = 0, \sigma = 1$ **时, 称正态分布为标准正态分布, 记作** $N(0,1)$**.**

标准正态分布

当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，称正态分布为标准正态分布，记作 $N(0,1)$. 标准正态分布的概率密度和分布函数分别用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示，

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

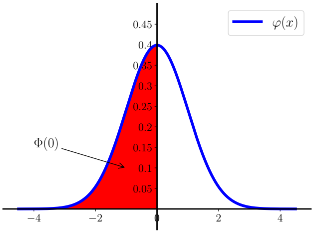
$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,\ -\infty<x<+\infty.$$

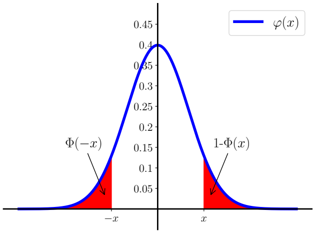


标准正态分布基本性质

$$\Phi(0)=\frac{1}{2};$$

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x).$$





对于标准正态分布, 人们编制了 $\Phi(x)$ 的函数表, 可供查用. 若随机变量 $X \sim N(0,1)$, 则 $P\{X \leq 1.17\} = 0.8790$

对于标准正态分布, 人们编制了 $\Phi(x)$ 的函数表, 可供查用. 若随机变量 $X \sim N(0,1)$, 则 $P\{X \leq 1.17\} = 0.8790$

表: 标准正态分布表 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$

x	0.00	0.01	$\cdots$	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	$\cdots$	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	$\cdots$	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	$\cdots$	0.6064	0.6103	0.6141
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.1	0.8643	0.8665	$\cdots$	0.8790	0.8810	0.8830
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.5	0.9332	0.9345	$\vdots$	0.9418	0.9429	0.9441
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 如何计算 $P\{a < X \leq b\}$

$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \quad ???$$

若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 如何计算 $P\{a < X \leq b\}$

$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \quad ???$$

定理 16

若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

证明：设 X 与 Y 的分布函数分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$.

证明：设 X 与 Y 的分布函数分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$.
由分布函数的定义知

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$$

证明：设 X 与 Y 的分布函数分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$.
由分布函数的定义知

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\
&= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq y\right\}
\end{aligned}
$$

证明：设 X 与 Y 的分布函数分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$.
由分布函数的定义知

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} \\
&= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le y\right\} \\
&= P\{X \le \mu + \sigma y\}
\end{aligned}
$$

因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 所以有

$$
F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x
$$

证明：设 X 与 Y 的分布函数分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$.
由分布函数的定义知

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq y\right\} \\ &= P\{X \leq \mu+\sigma y\}\end{aligned}$$

因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 所以有

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$, 则有

证明：设 X 与 Y 的分布函数分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$.
由分布函数的定义知

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\
&= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq y\right\} \\
&= P\{X \leq \mu + \sigma y\}
\end{aligned}
$$

因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 所以有

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$, 则有

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

证明：设 X 与 Y 的分布函数分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$.
由分布函数的定义知

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} \\
&= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le y\right\} \\
&= P\{X \le \mu + \sigma y\}
\end{aligned}
$$

因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 所以有

$$
F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x
$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$, 则有

$$
F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t
$$

因此，$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. $\square$

注： **利用定理, 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则有**

注： **利用定理, 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则有**

- **$P\{X \le x\}$ 的计算**

$$P\{X \le x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

注： 利用定理, 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则有

- $P\{X \le x\}$ 的计算

$$P\{X \le x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- $P\{x_1 < X \le x_2\}$ 的计算

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\left\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right\}$$
$$= \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

正态分布是概率论中十分重要的分布，主要表现在：

正态分布是概率论中十分重要的分布, 主要表现在:

(1) 自然界和人类社会中许多现象可以看做是正态分布. 例如, 人的身高、体重; 一种标记为每袋 5 千克的面粉的实际质量; 零件测量的误差; 某省高考的数学成绩等, 都近似服从正态分布.

正态分布是概率论中十分重要的分布, 主要表现在:

(1) **自然界和人类社会中许多现象可以看做是正态分布. 例如, 人的身高、体重; 一种标记为每袋 5 千克的面粉的实际质量; 零件测量的误差; 某省高考的数学成绩等, 都近似服从正态分布.**

(2) **正态分布在理论研究中具有重要地位, 本课程后面的中心极限定理有比较直观的描述.**

正态分布是概率论中十分重要的分布, 主要表现在:

(1) **自然界和人类社会中许多现象可以看做是正态分布. 例如, 人的身高、体重; 一种标记为每袋 5 千克的面粉的实际质量; 零件测量的误差; 某省高考的数学成绩等, 都近似服从正态分布.**

(2) **正态分布在理论研究中具有重要地位, 本课程后面的中心极限定理有比较直观的描述.**

(3) **数理统计中的一些重要分布, 均可由正态分布衍生出来, 例如 t 分布、χ^2 分布、F 分布等.**

例 5

设随机变量 $X \sim N(3,9)$, **求**

(1) $P\{2 < X \leq 5\}, P\{|X-3| > 6\}$;

(2) **确定常数** a, **使得** $P\{X > a\} = P\{X \leq a\}$.

解：(1)

例 5

设随机变量 $X \sim N(3,9)$, **求**

(1) $P\{2 < X \leq 5\}, P\{|X-3| > 6\}$;

(2) **确定常数** a, **使得** $P\{X > a\} = P\{X \leq a\}$.

解：(1)

$$P\{2 < X \leq 5\} = P\left\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} \leq \frac{5-3}{3}\right\}$$

例 5

设随机变量 $X \sim N(3,9)$**, 求**

(1) $P\{2 < X \le 5\}, P\{|X-3| > 6\}$;

(2) **确定常数** a**, 使得** $P\{X > a\} = P\{X \le a\}$.

解：(1)

$$P\{2 < X \le 5\} = P\left\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} \le \frac{5-3}{3}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

例 5

设随机变量 $X \sim N(3,9)$, 求

(1) $P\{2 < X \le 5\}, P\{|X-3| > 6\}$;

(2) **确定常数 a, 使得 $P\{X > a\} = P\{X \le a\}$.**

解：(1)

$$P\{2 < X \le 5\} = P\left\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} \le \frac{5-3}{3}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

例 5

设随机变量 $X \sim N(3,9)$, 求

(1) $P\{2 < X \leq 5\}, P\{|X-3| > 6\}$;

(2) 确定常数 a, 使得 $P\{X > a\} = P\{X \leq a\}$.

解：(1)

$$P\{2 < X \leq 5\} = P\left\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} \leq \frac{5-3}{3}\right\}$$
$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$
$$= 0.3779$$

随机变量 $X \sim N(3,9)$, 求 $P\{|X-3|>6\}$

随机变量 $X \sim N(3,9)$, 求 $P\{|X-3|>6\}$

$$P\{|X-3|>6\} = 1 - P\{|X-3| \leq 6\}$$

随机变量 $X \sim N(3,9)$, 求 $P\{|X-3|>6\}$

$$\begin{aligned} P\{|X-3|>6\} &= 1-P\{|X-3|\le 6\} \\ &= 1-P\{-3\le X\le 9\} \end{aligned}$$

随机变量 $X \sim N(3,9)$, **求** $P\{|X-3|>6\}$

$$\begin{aligned} P\{|X-3|>6\} &= 1-P\{|X-3|\le 6\} \\ &= 1-P\{-3\le X\le 9\} \\ &= 1-P\left\{\frac{-3-3}{3}\le \frac{X-3}{3}\le \frac{9-3}{3}\right\} \end{aligned}$$

随机变量 $X \sim N(3,9)$, **求** $P\{|X-3|>6\}$

$$\begin{aligned}
P\{|X-3|>6\} &= 1-P\{|X-3|\le 6\} \\
&= 1-P\{-3\le X\le 9\} \\
&= 1-P\left\{\frac{-3-3}{3}\le\frac{X-3}{3}\le\frac{9-3}{3}\right\} \\
&= 1-\Phi(2)+\Phi(-2)
\end{aligned}$$

随机变量 $X \sim N(3,9)$, 求 $P\{|X-3|>6\}$

$$
\begin{aligned}
P\{|X-3|>6\} &= 1-P\{|X-3|\le 6\} \\
&= 1-P\{-3\le X\le 9\} \\
&= 1-P\left\{\frac{-3-3}{3}\le\frac{X-3}{3}\le\frac{9-3}{3}\right\} \\
&= 1-\Phi(2)+\Phi(-2) \\
&= 2-2\Phi(2)
\end{aligned}
$$

随机变量 $X \sim N(3,9)$, **求** $P\{|X-3|>6\}$

$$
\begin{aligned}
P\{|X-3|>6\} &= 1-P\{|X-3|\le 6\} \\
&= 1-P\{-3\le X\le 9\} \\
&= 1-P\left\{\frac{-3-3}{3}\le\frac{X-3}{3}\le\frac{9-3}{3}\right\} \\
&= 1-\Phi(2)+\Phi(-2) \\
&= 2-2\Phi(2) \\
&= 0.0456
\end{aligned}
$$

(2)　确定常数 a**, 使得** $P\{X > a\} = P\{X \le a\}$**.**

(2) 确定常数 a, 使得 $P\{X > a\} = P\{X \leq a\}$.

由 $P\{X > a\} = P\{X \leq a\}$, 得到

$$1 - P\{X \leq a\} = P\{X \leq a\}$$

(2) 确定常数 a, 使得 $P\{X > a\} = P\{X \leq a\}$.

由 $P\{X > a\} = P\{X \leq a\}$, 得到

$$1 - P\{X \leq a\} = P\{X \leq a\}$$

于是有

$$P\{X \leq a\} = \frac{1}{2}$$

(2) 确定常数 a, 使得 $P\{X > a\} = P\{X \le a\}$.

由 $P\{X > a\} = P\{X \le a\}$, 得到

$$1 - P\{X \le a\} = P\{X \le a\}$$

于是有

$$P\{X \le a\} = \frac{1}{2}$$

另外

$$P\{X \le a\} = P\left\{\frac{X-3}{3} \le \frac{a-3}{3}\right\} = \Phi\left(\frac{a-3}{3}\right)$$

(2) 确定常数 a, 使得 $P\{X > a\} = P\{X \leq a\}$.

由 $P\{X > a\} = P\{X \leq a\}$, 得到

$$1 - P\{X \leq a\} = P\{X \leq a\}$$

于是有

$$P\{X \leq a\} = \frac{1}{2}$$

另外

$$P\{X \leq a\} = P\left\{\frac{X-3}{3} \leq \frac{a-3}{3}\right\} = \Phi\left(\frac{a-3}{3}\right)$$

从而

$$\Phi\left(\frac{a-3}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{a-3}{3}\right) = 0, a = 3.$$

标准正态分布的分位点

定义 17

设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 给定 $0 < \alpha < 1$, 若实数 b 满足

$$P\{X > b\} = \alpha$$

则称数 b 为标准正态分布的上 α 分位点, 记作 z_α; 若实数 c 满足

$$P\{|X| > c\} = \alpha$$

则称数 c 为标准正态分布的双侧 α 分位点, 记作 $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

标准正态分布的上 α 分位点如图所示

标准正态分布的上 α 分位点如图所示

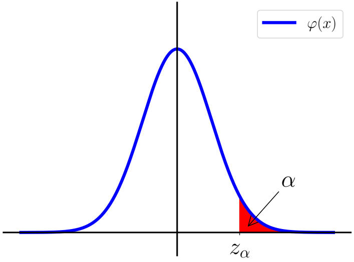


图: $P\{X > z_\alpha\} = \alpha$

标准正态分布的上 α 分位点如图所示

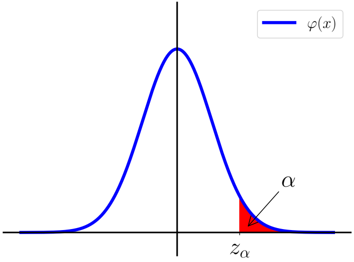


图: $P\{X > z_\alpha\} = \alpha$

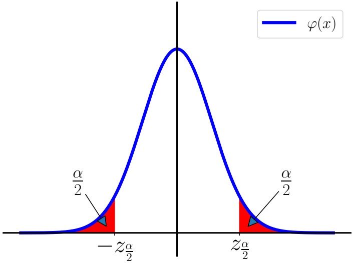


图: $P\left\{|X| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \alpha$

例 6

设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 求 $z_{0.05}$ 和 $z_{\frac{0.05}{2}}$.

例 6

设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 求 $z_{0.05}$ 和 $z_{\frac{0.05}{2}}$.

解：由标准正态分布上分位点定义可知,

$$P\{X > z_{0.05}\} = 0.05$$

例 6

设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 求 $z_{0.05}$ 和 $z_{\frac{0.05}{2}}$.

解：由标准正态分布上分位点定义可知,

$$P\{X > z_{0.05}\} = 0.05$$

又因为

$$P\{X > z_{0.05}\} = 1 - P\{X \leq z_{0.05}\}$$

例 6

设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 求 $z_{0.05}$ 和 $z_{\frac{0.05}{2}}$.

解：由标准正态分布上分位点定义可知,

$$P\{X > z_{0.05}\} = 0.05$$

又因为

$$P\{X > z_{0.05}\} = 1 - P\{X \le z_{0.05}\}$$

从而得到

$$P\{X \le z_{0.05}\} = \Phi(z_{0.05}) = 0.95$$

例 6

设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 求 $z_{0.05}$ 和 $z_{\frac{0.05}{2}}$.

解：由标准正态分布上分位点定义可知,

$$P\{X > z_{0.05}\} = 0.05$$

又因为

$$P\{X > z_{0.05}\} = 1 - P\{X \leq z_{0.05}\}$$

从而得到

$$P\{X \leq z_{0.05}\} = \Phi(z_{0.05}) = 0.95$$

查表得到

$$z_{0.05} = 1.645.$$

标准正态分布双侧分位点定义可知,

$$P\left\{|X| > z_{\frac{0.05}{2}}\right\} = 0.05$$

标准正态分布双侧分位点定义可知,

$$P\left\{|X| > z_{\frac{0.05}{2}}\right\} = 0.05$$

又因为

$$P\left\{|X| > z_{\frac{0.05}{2}}\right\} = 1 - P\left\{|X| \le z_{\frac{0.05}{2}}\right\}$$

标准正态分布双侧分位点定义可知，

$$P\left\{|X|>z_{\frac{0.05}{2}}\right\}=0.05$$

又因为

$$P\left\{|X|>z_{\frac{0.05}{2}}\right\}=1-P\left\{|X|\leq z_{\frac{0.05}{2}}\right\}$$

从而得到

$$P\left\{|X|\leq z_{\frac{0.05}{2}}\right\}=2\Phi\left(z_{\frac{0.05}{2}}\right)-1=0.95$$

标准正态分布双侧分位点定义可知,

$$P\left\{|X|>z_{\frac{0.05}{2}}\right\}=0.05$$

又因为

$$P\left\{|X|>z_{\frac{0.05}{2}}\right\}=1-P\left\{|X|\leq z_{\frac{0.05}{2}}\right\}$$

从而得到

$$P\left\{|X|\leq z_{\frac{0.05}{2}}\right\}=2\Phi\left(z_{\frac{0.05}{2}}\right)-1=0.95$$

即

$$\Phi\left(z_{\frac{0.05}{2}}\right)=0.975$$

标准正态分布双侧分位点定义可知,

$$P\left\{|X|>z_{\frac{0.05}{2}}\right\}=0.05$$

又因为

$$P\left\{|X|>z_{\frac{0.05}{2}}\right\}=1-P\left\{|X|\leq z_{\frac{0.05}{2}}\right\}$$

从而得到

$$P\left\{|X|\leq z_{\frac{0.05}{2}}\right\}=2\Phi\left(z_{\frac{0.05}{2}}\right)-1=0.95$$

即

$$\Phi\left(z_{\frac{0.05}{2}}\right)=0.975$$

查表得到

$$z_{\frac{0.05}{2}}=1.96.$$

随机变量函数的分布

在实际问题中, 经常会遇到求一个随机变量函数的分布问题; 又或者有些随机变量的分布难于直接得到, 但是与它们有函数关系的另一些随机变量的分布却是容易知道的, 例如

$$X \sim N(\mu, \sigma) \qquad \Rightarrow \qquad Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

此时 Y 是 X 的一个函数.

本节, 我们将讨论如何由已知的随机变量 X 的概率分布去求得它的函数 $Y = g(X)$ 的概率分布.

例 1

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求随机变量 $Y=2X^2+1$ 的分布律.

离散型随机变量函数的分布

例 1

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求随机变量 $Y = 2X^2 + 1$ 的分布律.

解： Y **的所有可能取值为** $1, 3, 9, \frac{27}{2}$

例 1

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求随机变量 $Y=2X^2+1$ 的分布律.

解： Y **的所有可能取值为** $1, 3, 9, \frac{27}{2}$

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}=\frac{1}{10}$$

例 1

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求随机变量 $Y=2X^2+1$ 的分布律.

解： Y 的所有可能取值为 $1,3,9,\frac{27}{2}$

$$P\{Y=3\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{3}{10}$$

例 1

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求随机变量 $Y=2X^2+1$ 的分布律.

解： Y **的所有可能取值为** $1,3,9,\frac{27}{2}$

$$P\{Y=9\}=P\{X=2\}=\frac{3}{10}$$

例 1

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求随机变量 $Y = 2X^2 + 1$ 的分布律.

解： Y 的所有可能取值为 $1, 3, 9, \frac{27}{2}$

$$P\left\{Y = \frac{27}{2}\right\} = P\left\{X = \frac{5}{2}\right\} = \frac{3}{10}$$

例 1

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求随机变量 $Y=2X^2+1$ 的分布律.

解： Y **的所有可能取值为** $1,3,9,\frac{27}{2}$

Y	1	3	9	$\frac{27}{2}$
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

求离散型随机变量函数的分布律的一般步骤

一般地，若 X 是一个离散型随机变量，可能的取值为 $x_1, x_2, \cdots$，那么 $Y = g(X)$ 也是离散型随机变量，计算 Y 的分布律的一般步骤为：

求离散型随机变量函数的分布律的一般步骤

一般地，若 X 是一个离散型随机变量，可能的取值为 $x_1, x_2, \cdots$，那么 $Y = g(X)$ 也是离散型随机变量，计算 Y 的分布律的一般步骤为：

1. 计算出 Y 的所有可能取值 $y_1, y_2, \cdots$;

求离散型随机变量函数的分布律的一般步骤

一般地，若 X 是一个离散型随机变量，可能的取值为 $x_1, x_2, \cdots$，那么 $Y = g(X)$ 也是离散型随机变量，计算 Y 的分布律的一般步骤为：

1. **计算出 Y 的所有可能取值 $y_1, y_2, \cdots$；**
2. **计算出 Y 取每个值的概率.**

例 2

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=3X+2$ 的概率密度.

例 2

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求随机变量 $Y = 3X + 2$ 的概率密度.

解：先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，由分布函数定义知

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{3X + 2 \le y\} = P\left\{X \le \frac{y-2}{3}\right\}$$

所以 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-2}{3}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

所以 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-2}{3}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

于是 $Y = 3X + 2$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F_Y'(y) &= \left(\int_{-\infty}^{\frac{y-2}{3}} f_X(x)\mathrm{d}x\right)' \\ &= f_X\left(\frac{y-2}{3}\right)\left(\frac{y-2}{3}\right)' \\ &= \begin{cases} \dfrac{y-2}{18}, & 2 < y < 8, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

求连续型随机变量的函数的概率分布的一般步骤

一般地，若 X 是一个连续型随机变量，那么 $Y = g(X)$ 也是连续型随机变量，计算 Y 的概率密度的一般步骤为：

求连续型随机变量的函数的概率分布的一般步骤

一般地，若 X 是一个连续型随机变量，那么 $Y = g(X)$ 也是连续型随机变量，计算 Y 的概率密度的一般步骤为：

1. **求随机变量 $Y = g(X)$ 的分布函数. 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$，则**

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) \mathrm{d}x$$

求连续型随机变量的函数的概率分布的一般步骤

一般地，若 X 是一个连续型随机变量，那么 $Y = g(X)$ 也是连续型随机变量，计算 Y 的概率密度的一般步骤为：

1. **求随机变量 $Y = g(X)$ 的分布函数. 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$，则**

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x)\leq y} f_X(x)\mathrm{d}x$$

2. **由 Y 的分布函数计算出概率密度，即**

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$

定理 18

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$，假设函数 $g(x)$ 处处可导，且 $g'(x) > 0$(或 $g'(x) < 0$)，则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}, \beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

例 3

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

求随机变量 $Y = e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

例 3

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

求随机变量 $Y = e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解： 函数 $y = e^x$ 为单调函数，

$$\alpha = \min\{e^{-\infty}, e^{+\infty}\} = 0, \beta = \max\{e^{-\infty}, e^{+\infty}\} = +\infty$$

反函数 $x = \ln y$. 于是随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & y \geq 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 4

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明 $Y = aX + b, a \neq 0$ 也服从正态分布.

例 4

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明 $Y = aX + b, a \neq 0$ 也服从正态分布.

证明： 由 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu^2)}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < +\infty.$$

例 4

设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，证明 $Y = aX + b, a \neq 0$ 也服从正态分布.

证明： 由 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu^2)}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < +\infty.$$

$y = ax + b$ 为单调函数，其反函数为 $x = \frac{y-b}{a}$，则 Y 的概率密度为

例 4

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明 $Y = aX + b, a \neq 0$ 也服从正态分布.

证明： 由 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu^2)}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < +\infty.$$

$y = ax + b$ 为单调函数，其反函数为 $x = \frac{y-b}{a}$，则 Y 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(h(y))\,|h'(y)| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} \exp\left\{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}\right\}, -\infty < y < +\infty. \end{aligned}$$

例 4

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明 $Y = aX + b, a \neq 0$ 也服从正态分布.

证明： 由 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu^2)}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < +\infty.$$

$y = ax + b$ 为单调函数，其反函数为 $x = \frac{y-b}{a}$，则 Y 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(h(y))\,|h'(y)| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} \exp\left\{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}\right\}, -\infty < y < +\infty. \end{aligned}$$

即 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

定理 19
设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$，假设函数 $g(x)$ 是分段单调的，即在不相重叠的区间 $I_1, I_2, \cdots$ 上严格单调，各子区间上的反函数 $h_1(y), h_2(y), \cdots$ 及其导数 $h_1'(y), h_2'(y), \cdots$ 均为连续函数，则 $Y = g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum\limits_i f_X\left(h_i(y)\right)\left|h_i'(y)\right|, & y \in \text{各} h_i(y) \text{的定义域}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 5

设连续型随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$，求 $Y = X^2$ 的概率密度.

例 5

设连续型随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$，求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解： 函数 $y = x^2$ 是分段单调的，各自区间上的反函数为：

当 $x \in I_1 = (-\infty, 0)$ 时，$x = h_1(y) = -\sqrt{y}$;

当 $x \in I_2 = (0, +\infty)$ 时，$x = h_2(y) = \sqrt{y}$

反函数的定义域均为 $y \geq 0$.

例 5

设连续型随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$，求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解： 函数 $y = x^2$ 是分段单调的，各自区间上的反函数为：

当 $x \in I_1 = (-\infty, 0)$ 时，$x = h_1(y) = -\sqrt{y}$;

当 $x \in I_2 = (0, +\infty)$ 时，$x = h_2(y) = \sqrt{y}$

反函数的定义域均为 $y \geq 0$.

当 $y > 0$ 时有，$f_Y(y) = f_X\left(-\sqrt{y}\right)\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + f_X\left(\sqrt{y}\right)\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$

例 5

设连续型随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$，求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解： 函数 $y = x^2$ 是分段单调的，各自区间上的反函数为：

当 $x \in I_1 = (-\infty, 0)$ 时，$x = h_1(y) = -\sqrt{y}$;

当 $x \in I_2 = (0, +\infty)$ 时，$x = h_2(y) = \sqrt{y}$

反函数的定义域均为 $y \geq 0$.

当 $y > 0$ 时有，$f_Y(y) = f_X(-\sqrt{y}) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right|$

即 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right), & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

例 5

设连续型随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$，求 $Y = X^2$ 的概率密度.

例 5

设连续型随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$，求 $Y = X^2$ 的概率密度.

另解 (分布函数法)： 求 Y 的分布函数，由于 $Y = X^2 \geq 0$，
当 $y \leq 0$ 时，有 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$;

例 5

设连续型随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$，求 $Y = X^2$ 的概率密度.

另解 (分布函数法)： 求 Y 的分布函数，由于 $Y = X^2 \geq 0$，
当 $y \leq 0$ 时，有 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$;
当 $y > 0$ 时，有

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

例 5

设连续型随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$，求 $Y = X^2$ 的概率密度.

另解 (分布函数法)： 求 Y 的分布函数，由于 $Y = X^2 \geq 0$,
当 $y \leq 0$ 时，有 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$;
当 $y > 0$ 时，有

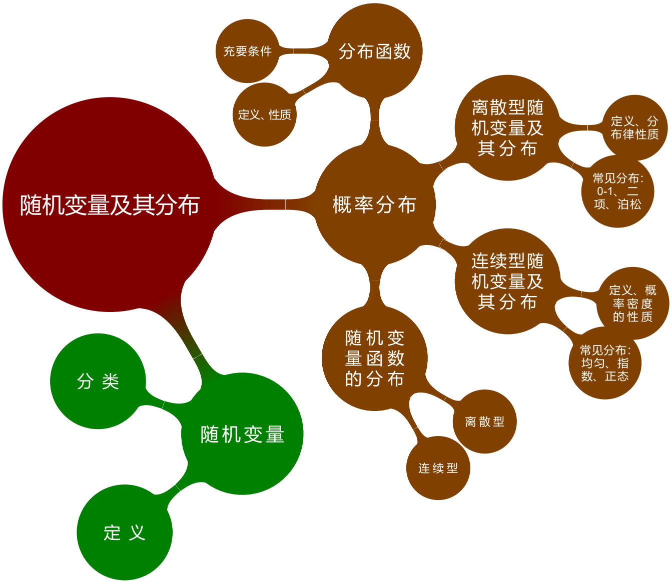
$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right), & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

随机变量及其分布习题课

知识点总结



随机变量及其分布
随机变量
分 类
定 义
概率分布
分布函数
充要条件
定义、性质
离散型随机变量及其分布
定义、分布律性质
常见分布：0-1、二项、泊松
连续型随机变量及其分布
定义、概率密度的性质
常见分布：均匀、指数、正态
随机变量函数的分布
离散型
连续型

例 1

盒子中有 5 个球，分别标有整数号码 3 至 7，现从盒子中随机取出 3 个球，问所取出的球的号码最大值的分布律.

例 1

盒子中有 5 个球，分别标有整数号码 3 至 7，现从盒子中随机取出 3 个球，问所取出的球的号码最大值的分布律.

解：设随机变量 X 表示取出的 3 个球中号码最大的值，所有可能取值为 $5, 6, 7$,

例 1

盒子中有 5 个球，分别标有整数号码 3 至 7，现从盒子中随机取出 3 个球，问所取出的球的号码最大值的分布律.

解：设随机变量 X 表示取出的 3 个球中号码最大的值，所有可能取值为 $5,6,7$，则 X 取各个值得概率分别为

$$P\{X=5\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10},P\{X=6\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10},P\{X=7\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5},$$

例 1

盒子中有 5 个球，分别标有整数号码 3 至 7，现从盒子中随机取出 3 个球，问所取出的球的号码最大值的分布律.

解：设随机变量 X 表示取出的 3 个球中号码最大的值，所有可能取值为 $5, 6, 7$，则 X 取各个值得概率分别为

$$P\{X=5\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}, P\{X=6\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}, P\{X=7\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5},$$

X 的分布律也可表示为

X	5	6	7
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{3}$

例 2

大量数据分析表明：预定餐厅座位而不来就餐的顾客比例为 5%. 假设餐厅有 95 个座位，但预定了 100 位顾客，假设 100 位顾客互相不认识. 在预定时间内，预定了座位的顾客来到餐厅却没有座位的概率约是多少?

例 2

大量数据分析表明：预定餐厅座位而不来就餐的顾客比例为 5%. 假设餐厅有 95 个座位，但预定了 100 位顾客，假设 100 位顾客互相不认识. 在预定时间内，预定了座位的顾客来到餐厅却没有座位的概率约是多少?

解：设 X 表示 100 位预定座位的顾客不来就餐的人数，则 $X \sim b(100, 0.05)$，所求概率为

$$P\{X \leq 4\} = \sum_{k=0}^{4} C_{100}^{k} 0.05^{k} \times 0.95^{100-k}$$

例 2

大量数据分析表明：预定餐厅座位而不来就餐的顾客比例为 5%. 假设餐厅有 95 个座位，但预定了 100 位顾客，假设 100 位顾客互相不认识. 在预定时间内，预定了座位的顾客来到餐厅却没有座位的概率约是多少?

解：设 X 表示 100 位预定座位的顾客不来就餐的人数，则 $X \sim b(100, 0.05)$，所求概率为

$$P\{X \leq 4\} = \sum_{k=0}^{4} C_{100}^{k} 0.05^{k} \times 0.95^{100-k}$$

计算很复杂，下面运用泊松逼近定理近似计算，因为 $\lambda = np = 5$，所以有

例 2

大量数据分析表明：预定餐厅座位而不来就餐的顾客比例为 5%. 假设餐厅有 95 个座位，但预定了 100 位顾客，假设 100 位顾客互相不认识. 在预定时间内，预定了座位的顾客来到餐厅却没有座位的概率约是多少?

解：设 X 表示 100 位预定座位的顾客不来就餐的人数，则 $X \sim b(100, 0.05)$，所求概率为

$$P\{X \leq 4\} = \sum_{k=0}^{4} C_{100}^{k} 0.05^{k} \times 0.95^{100-k}$$

计算很复杂，下面运用泊松逼近定理近似计算，因为 $\lambda = np = 5$，所以有

$$P\{X \leq 4\} = \sum_{k=0}^{4} C_{100}^{k} 0.05^{k} \times 0.95^{100-k} \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{5^{k} e^{-5}}{k!} = 0.4405$$

例 3

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x+0.3, & 0\le x<0.5,\\ 1, & x\ge 0.5.\end{cases}$$

求概率 $P\{X\le 0.4\}, P\{X=0.5\}, P\{X=1\}, P\{0<X\le 1\}$

例 3
设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x+0.3, & 0\le x<0.5,\\ 1, & x\ge 0.5.\end{cases}$$

求概率 $P\{X\le 0.4\}, P\{X=0.5\}, P\{X=1\}, P\{0<X\le 1\}$

解：由分布函数直接计算

$$P\{X\le 0.4\}=F(0.4)=0.7; P\{X=0.5\}=F(0.5)-F(0.5-0)=0.2$$

$$P\{X=1\}=0.7F(1)-F(1-0)=0; P\{0<X\le 1\}=F(1)-F(0)=0.7$$

例 4

设随机变量 $K \sim U(0,5)$**，求方程** $4x^2+4Kx+K+2=0$ **有实根的概率.**

例 4

设随机变量 $K \sim U(0,5)$，求方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的概率.

解：方程有实根的充要条件为：$\Delta \geq 0$，由题意 K 的概率密度为

$$f_K(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0<x<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 4

设随机变量 $K \sim U(0,5)$，求方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的概率.

解：方程有实根的充要条件为：$\Delta \geq 0$，由题意 K 的概率密度为

$$f_K(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0<x<5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以方程有实根的概率为

$$\begin{aligned}P\{\Delta \geq 0\} &= P\{16K^2-16(K+2)\geq 0\}\\ &= P\{K^2-K-2\geq 0\}\\ &= P\{K\leq -1\}+P\{K\geq 2\}\\ &= 0+\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

例 5

三个朋友去喝咖啡，玩一个博弈游戏. 他们决定用掷硬币的方式确定谁付账：每人掷一枚硬币，如果有人掷出的结果与其他两人不一样，那么由他付账；如果三个人掷出的结果是一样的，那么就重新掷，一直这样下去，直到确定了由谁来付账. 求（1）进行到第 2 轮确定了由谁来付账的概率.（2）进行了 3 轮还没有确定付账人的概率.

例 5

三个朋友去喝咖啡，玩一个博弈游戏. 他们决定用掷硬币的方式确定谁付账：每人掷一枚硬币，如果有人掷出的结果与其他两人不一样，那么由他付账；如果三个人掷出的结果是一样的，那么就重新掷，一直这样下去，直到确定了由谁来付账. 求（1）进行到第 2 轮确定了由谁来付账的概率.（2）进行了 3 轮还没有确定付账人的概率.

解：设 X 表示掷硬币的轮数，则其所有的可能取值为 $1, 2, \cdots$，三个人掷出的结果一样的概率记为 $1 - p = \frac{1}{4}$，X 服从几何分布，其分布律为

$$P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p, k = 1, 2, \cdots$$

例 5

三个朋友去喝咖啡，玩一个博弈游戏. 他们决定用掷硬币的方式确定谁付账：每人掷一枚硬币，如果有人掷出的结果与其他两人不一样，那么由他付账；如果三个人掷出的结果是一样的，那么就重新掷，一直这样下去，直到确定了由谁来付账. 求（1）进行到第 2 轮确定了由谁来付账的概率.（2）进行了 3 轮还没有确定付账人的概率.

解：设 X 表示掷硬币的轮数，则其所有的可能取值为 $1, 2, \cdots$，三个人掷出的结果一样的概率记为 $1-p=\frac{1}{4}$，X 服从几何分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots$$

（1）进行到第 2 轮确定了由谁来付账的概率为

$$P\{X=2\}=(1-p)p=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$$

例 5

三个朋友去喝咖啡，玩一个博弈游戏. 他们决定用掷硬币的方式确定谁付账：每人掷一枚硬币，如果有人掷出的结果与其他两人不一样，那么由他付账；如果三个人掷出的结果是一样的，那么就重新掷，一直这样下去，直到确定了由谁来付账. 求（1）进行到第 2 轮确定了由谁来付账的概率.（2）进行了 3 轮还没有确定付账人的概率.

解：设 X 表示掷硬币的轮数，则其所有的可能取值为 $1, 2, \cdots$，三个人掷出的结果一样的概率记为 $1-p=\frac{1}{4}$，X 服从几何分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots$$

（2）进行了 3 轮还没有确定付账人的概率为

$$P\{X>3\}=1-P\{X=1\}-P\{X=2\}-P\{X=3\}=\frac{1}{64}$$

例 6

设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别是 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则 (　　)

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度;

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度;

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数;

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

例 6

设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别是 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则（ D ）

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度;

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度;

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数;

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

例 7

设随机变量 $X \sim N(\mu, 4^2)$，$Y \sim N(\mu, 5^2)$，记 $P\{X \leq \mu - 4\} = p_1$，$P\{Y \geq \mu - 5\} = p_2$，则下列选项正确的是 (　　)

(A) 对于任意实数 μ，均有 $p_1 = p_2$；

(B) 对于任意实数 μ，均有 $p_1 < p_2$；

(C) 对于任意实数 μ，均有 $p_1 > p_2$；

(D) 对于某些实数 μ，才有 $p_1 = p_2$.

例 7

设随机变量 $X \sim N(\mu, 4^2)$，$Y \sim N(\mu, 5^2)$，记 $P\{X \leq \mu - 4\} = p_1$，$P\{Y \geq \mu - 5\} = p_2$，则下列选项正确的是 (　A　)

(A) 对于任意实数 μ，均有 $p_1 = p_2$；

(B) 对于任意实数 μ，均有 $p_1 < p_2$；

(C) 对于任意实数 μ，均有 $p_1 > p_2$；

(D) 对于某些实数 μ，才有 $p_1 = p_2$.

例 8

假设某大型设备在任何时间间隔 t 小时内，发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布. 求（1）相继两次故障之间的时间间隔为 T 小时的概率分布；（2）在设备已经无故障运行 8 小时的情况下，再无故障运行 4 小时的概率.

例 8

假设某大型设备在任何时间间隔 t 小时内，发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布. 求（1）相继两次故障之间的时间间隔为 T 小时的概率分布；（2）在设备已经无故障运行 8 小时的情况下，再无故障运行 4 小时的概率.

解：(1) 由题意可知，在时间间隔 t 小时内，发生故障的次数 $N(t)$ 的分布律为

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, k=0,1,\cdots$$

例 8

假设某大型设备在任何时间间隔 t 小时内，发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布. 求（1）相继两次故障之间的时间间隔为 T 小时的概率分布；（2）在设备已经无故障运行 8 小时的情况下，再无故障运行 4 小时的概率.

解：(1) 由题意可知，在时间间隔 t 小时内，发生故障的次数 $N(t)$ 的分布律为

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, k=0,1,\cdots$$

设随机变量 T 的分布函数为 $F_T(t)$，由分布函数的定义可知

$$F_T(t)=P\{T\le t\}$$

$$F_T(t) = P\{T \leq t\}$$

T **表示两次无故障的时间间隔，所以**

$$F_T(t) = P\{T \le t\}$$

T 表示两次无故障的时间间隔，所以

当 $t < 0$ 时，有 $F_T(t) = 0$;

$$F_T(t) = P\{T \le t\}$$

T 表示两次无故障的时间间隔，所以

当 $t < 0$ 时，有 $F_T(t) = 0$;

当 $t \ge 0$ 时，事件 $\{T > t\}$ 表示在时间间隔 t 小时内无故障发生，所以有

$$F_T(t) = P\{T \le t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - P\{N(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F_T(t) = P\{T \le t\}$$

T 表示两次无故障的时间间隔，所以

当 $t < 0$ 时，有 $F_T(t) = 0$;

当 $t \ge 0$ 时，事件 $\{T > t\}$ 表示在时间间隔 t 小时内无故障发生，所以有

$$F_T(t) = P\{T \le t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - P\{N(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

因此随机变量 T 的分布函数为

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$F_T(t) = P\{T \le t\}$$

T 表示两次无故障的时间间隔，所以

当 $t < 0$ 时，有 $F_T(t) = 0$;

当 $t \ge 0$ 时，事件 $\{T > t\}$ 表示在时间间隔 t 小时内无故障发生，所以有

$$F_T(t) = P\{T \le t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - P\{N(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

因此随机变量 T 的分布函数为

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

随机变量 T 的概率密度为

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

（2）由指数分布的无记忆性可知

$$
\begin{aligned}
P\{T>12|T>8\} &= P\{T>(8+4)|T>8\} \\
&= P\{T>4\} \\
&= \int_4^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\
&= e^{-4\lambda}
\end{aligned}
$$

例 9

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p_k	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\cdots$

求 $Y=\sin\dfrac{X\pi}{2}$ 的分布律.

例 9

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p_k	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\cdots$

求 $Y=\sin\dfrac{X\pi}{2}$ 的分布律.

解：Y 的所有可能取值为 $-1,0,1$，取相应值的概率为

例 9

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p_k	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\cdots$

求 $Y = \sin\dfrac{X\pi}{2}$ **的分布律.**

解：Y **的所有可能取值为** $-1, 0, 1$，**取相应值的概率为**

$$P\{Y=-1\} = P\{X=3\} + P\{X=7\} + P\{X=11\} + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \cdots = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{2}{15}$$

例 9

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p_k	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\cdots$

求 $Y = \sin\dfrac{X\pi}{2}$ 的分布律.

解：Y 的所有可能取值为 $-1, 0, 1$，取相应值的概率为

$$P\{Y=0\} = P\{X=2\} + P\{X=4\} + P\{X=6\} + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

例 9

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p_k	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\cdots$

求 $Y = \sin\dfrac{X\pi}{2}$ 的分布律.

解：Y 的所有可能取值为 $-1, 0, 1$，取相应值的概率为

$$P\{Y=1\} = 1 - P\{Y=-1\} - P\{Y=0\} = \frac{8}{15}$$

例 9

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p_k	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\cdots$

求 $Y = \sin \dfrac{X\pi}{2}$ 的分布律.

解：Y 的所有可能取值为 $-1, 0, 1$，取相应值的概率为

因此 Y 的分布律为

X	-1	0	1
p_k	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

例 10

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{Ax}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1) 常数 A；(2) 分布函数 $F(x)$；(3) 概率 $P\{2 < X < 4\}$；(4) 随机变量 $Y = \sin X$ 的概率密度.

例 10

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{Ax}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1) 常数 A；(2) 分布函数 $F(x)$；(3) 概率 $P\{2 < X < 4\}$；(4) 随机变量 $Y = \sin X$ 的概率密度.

解：(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$，**有** $\int_0^{\pi} \frac{Ax}{\pi^2}\mathrm{d}x = \frac{A}{2} = 1$，**故** $A = 2$.

所以 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

所以 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) 由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，有

所以 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) 由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，有

当 $x\le 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t=0$

所以 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(2) 由 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，有

当 $x \le 0$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0$

当 $0 < x < \pi$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \dfrac{2t}{\pi^2}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{\pi^2}$

所以 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) 由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，有

当 $x\leq 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$

当 $0<x<\pi$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\dfrac{2t}{\pi^2}\mathrm{d}t=\frac{x^2}{\pi^2}$

当 $x\geq\pi$ 时，$F(x)=1$.

所以 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) 由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，有

当 $x\leq 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t=0$

当 $0<x<\pi$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\dfrac{2t}{\pi^2}\mathrm{d}t=\frac{x^2}{\pi^2}$

当 $x\geq\pi$ 时，$F(x)=1$.

所以分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0, \\ \frac{x^2}{\pi^2}, & 0<x<\pi, \\ 1, & x\geq\pi.\end{cases}$$

(3）由分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x^2}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 1, & x\ge \pi.\end{cases}$$

$$P\{2<X<4\}=F(4)-F(2)=1-\frac{4}{\pi^2}$$

(3) 由分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x^2}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 1, & x\ge \pi.\end{cases}$$

$$P\{2<X<4\}=F(4)-F(2)=1-\frac{4}{\pi^2}$$

(3) 由概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$P\{2<X<4\}=\int_2^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x=1-\frac{4}{\pi^2}$$

(4) 方法一 已知 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，随机变量 $Y=\sin X$. 由于 $y=\sin x$ 是分段单调的，并且当 $x\in(0,\pi)$ 时，概率密度 $f_X(x)>0$，所以只需考虑区间 $(0,\pi)$ 上分段情况.

(4) 方法一 已知 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，随机变量 $Y = \sin X$. 由于 $y = \sin x$ 是分段单调的，并且当 $x \in (0, \pi)$ 时，概率密度 $f_X(x) > 0$，所以只需考虑区间 $(0, \pi)$ 上分段情况.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，反函数为 $x = \arcsin y, 0 < y < 1$;

当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时，反函数为 $x = \pi - \arcsin y, 0 < y < 1$;

(4) 方法一 已知 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，随机变量 $Y=\sin X$. 由于 $y=\sin x$ 是分段单调的，并且当 $x\in(0,\pi)$ 时，概率密度 $f_X(x)>0$，所以只需考虑区间 $(0,\pi)$ 上分段情况.

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，反函数为 $x=\arcsin y, 0<y<1$;

当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，反函数为 $x=\pi-\arcsin y, 0<y<1$;

所以随机变量 $Y=\sin X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\arcsin y)|(\arcsin\,)'|+f_X(\pi-\arcsin y)|(\pi-\arcsin\,)'|, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4) 方法一 已知 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，随机变量 $Y=\sin X$. 由于 $y=\sin x$ 是分段单调的，并且当 $x\in(0,\pi)$ 时，概率密度 $f_X(x)>0$，所以只需考虑区间 $(0,\pi)$ 上分段情况.

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，反函数为 $x=\arcsin y, 0<y<1$;

当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，反函数为 $x=\pi-\arcsin y, 0<y<1$;

所以随机变量 $Y=\sin X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\arcsin y)|(\arcsin)'|+f_X(\pi-\arcsin y)|(\pi-\arcsin)'|, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{2\arcsin y}{\pi^2\sqrt{1-y^2}}+\frac{2(\pi-\arcsin y)}{\pi^2\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4) 方法二 已知 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，随机变量 $Y=\sin X$，Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sin X\le y\}$$

(4) 方法二 已知 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，随机变量 $Y=\sin X$，Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sin X\le y\}$$

当 $y<0$ 时，有 $F_Y(y)=0$；当 $y\ge 1$ 时，有 $F_Y(y)=1$.

(4) 方法二 已知 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，随机变量 $Y=\sin X$，Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sin X\le y\}$$

当 $y<0$ 时，有 $F_Y(y)=0$；当 $y\ge 1$ 时，有 $F_Y(y)=1$.

当 $0\le y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{X\le \arcsin y\}+P\{X\ge \pi-\arcsin y\}$$
$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x$$

(4) 方法二 已知 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，随机变量 $Y=\sin X$，Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sin X\le y\}$$

当 $y<0$ 时，有 $F_Y(y)=0$；当 $y\ge 1$ 时，有 $F_Y(y)=1$.

当 $0\le y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{X\le \arcsin y\}+P\{X\ge \pi-\arcsin y\}$$
$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x$$

所以 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

例 11

设在一段时间内进入某一商店的人数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，每个顾客 (相互独立) 购买某种物品的概率为 p，求进入商店购买此物品的人数的分布律.

例 11

设在一段时间内进入某一商店的人数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，每个顾客 (相互独立) 购买某种物品的概率为 p，求进入商店购买此物品的人数的分布律.

解：由题意可知 X 的分布律为

$$P\{X=n\}=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, n=0,1,\cdots$$

例 11

设在一段时间内进入某一商店的人数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，每个顾客 (相互独立) 购买某种物品的概率为 p，求进入商店购买此物品的人数的分布律.

解：由题意可知 X 的分布律为

$$P\{X=n\}=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, n=0,1,\cdots$$

设随机变量 Y 表示进入商店购买此物品的人数，则当 $X=n$ 时，Y 的所有可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$，且有 $Y\sim b(n,p)$，

例 11

设在一段时间内进入某一商店的人数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，每个顾客 (相互独立) 购买某种物品的概率为 p，求进入商店购买此物品的人数的分布律.

解：由题意可知 X 的分布律为

$$P\{X=n\}=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, n=0,1,\cdots$$

设随机变量 Y 表示进入商店购买此物品的人数，则当 $X=n$ 时，Y 的所有可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$，且有 $Y\sim b(n,p)$，其分布律为

$$P\{Y=k|X=n\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$$

对于给定的 $k(k = 0, 1, \cdots)$，由全概率公式可知

对于给定的 $k(k=0,1,\cdots)$，由全概率公式可知

$$P\{Y=k\}=\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}$$

对于给定的 $k(k=0,1,\cdots)$，由全概率公式可知

$$P\{Y=k\}=\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}$$

由于 $\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

对于给定的 $k(k=0,1,\cdots)$**，由全概率公式可知**

$$P\{Y=k\}=\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}$$

由于 $\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

对于给定的 $k(k=0,1,\cdots)$，由全概率公式可知

$$P\{Y=k\}=\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}$$

由于 $\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}$$

对于给定的 $k(k=0,1,\cdots)$，由全概率公式可知

$$P\{Y=k\}=\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}$$

由于 $\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k} &= \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}\\ &= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}\end{aligned}$$

对于给定的 $k(k=0,1,\cdots)$，由全概率公式可知

$$P\{Y=k\}=\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}$$

由于 $\sum_{n=k}^{+\infty}P\{X=n\}P\{Y=k|X=n\}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}&=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}\\&=\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}\end{aligned}$$

由此可知随机变量 Y 服从参数为 λp 的 Poisson 分布，即 $Y\sim P(\lambda p)$.

例 12

设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作．若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障可获利润 5 万元；发生两次故障可获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内利润的分布律.

例 12

设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作．若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障可获利润 5 万元；发生两次故障可获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内利润的分布律.

解：设 X 表示一周内机器发生故障的次数，Y 表示一周内的利润. 由题意可知 $X \sim b(5, 0.2)$，Y 的所有可能取值为 $-2, 0, 5, 10$，取相应值的概率为

例 12

设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作．若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障可获利润 5 万元；发生两次故障可获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内利润的分布律.

解：设 X 表示一周内机器发生故障的次数，Y 表示一周内的利润. 由题意可知 $X \sim b(5,0.2)$，Y 的所有可能取值为 $-2,0,5,10$，取相应值的概率为

$$P\{Y=0\}=P\{X=2\}=0.2048, P\{Y=5\}=P\{X=1\}=0.4069$$

$$P\{Y=10\}=P\{X=0\}=0.3277, P\{Y=-2\}=P\{X\geq 3\}=0.0579$$

例 12

设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作．若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障可获利润 5 万元；发生两次故障可获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内利润的分布律.

解：设 X 表示一周内机器发生故障的次数，Y 表示一周内的利润. 由题意可知 $X \sim b(5, 0.2)$，Y 的所有可能取值为 $-2, 0, 5, 10$，取相应值的概率为

一周内的分布律为

Y	-2	0	5	10
p_k	0.0579	0.2048	0.4096	0.3277

例 13

设随机变量 X 的绝对值不大于 1，且有 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在区间 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，求：(1) X 的分布函数 $F(x)$；(2) 概率 $P\{X<0\}$.

例 13

设随机变量 X 的绝对值不大于 1，且有 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在区间 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，求：(1) X 的分布函数 $F(x)$；(2) 概率 $P\{X<0\}$.

解：(1) 由题意可知，

$P\{-1<X<1\}=1-P\{X=1\}-P\{X=-1\}=\frac{5}{8}$，并且在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在区间 $(-1,1)$ 上服从均匀分布，所以对于任意的 $-1<x<1$ 有

例 13

设随机变量 X 的绝对值不大于 1，且有 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在区间 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，求：(1) X 的分布函数 $F(x)$；(2) 概率 $P\{X<0\}$.

解：(1) 由题意可知，
$P\{-1<X<1\}=1-P\{X=1\}-P\{X=-1\}=\frac{5}{8}$，并且在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在区间 $(-1,1)$ 上服从均匀分布，所以对于任意的 $-1<x<1$ 有

$$\begin{aligned}P\{-1<X\leq x\}&=P\{-1<X\leq x,-1<X<1\}\\&=P\{-1<X<1\}P\{-1<X\leq x|-1<X<1\}\\&=\frac{5}{8}\times\frac{x+1}{2}=\frac{5(x+1)}{16}\end{aligned}$$

因为随机变量 X 的绝对值不大于 1，且 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，及已经计算得到 $P\{-1<X<x\}=\frac{5(x+1)}{16}$，所以 $F(x)=P\{X\leq x\}$

因为随机变量 X 的绝对值不大于 1，且 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，及已经计算得到 $P\{-1<X<x\}=\frac{5(x+1)}{16}$，所以 $F(x)=P\{X\leq x\}$

当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；

因为随机变量 X 的绝对值不大于 1，且 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，及已经计算得到 $P\{-1<X<x\}=\frac{5(x+1)}{16}$，所以 $F(x)=P\{X\leq x\}$

当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；

当 $-1\leq x<1$ 时，

$$F(x)=P\{X<-1\}+P\{X=-1\}+P\{-1<X\leq x\}=\frac{5x+7}{16}$$

因为随机变量 X 的绝对值不大于 1，且 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，及已经计算得到 $P\{-1<X<x\}=\frac{5(x+1)}{16}$，所以 $F(x)=P\{X\leq x\}$

当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$;

当 $-1\leq x<1$ 时，

$$F(x)=P\{X<-1\}+P\{X=-1\}+P\{-1<X\leq x\}=\frac{5x+7}{16}$$

当 $x\geq 1$ 时，$F(x)=1$.

因为随机变量 X 的绝对值不大于 1，且 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，及已经计算得到 $P\{-1<X<x\}=\frac{5(x+1)}{16}$，所以 $F(x)=P\{X\le x\}$

当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$;

当 $-1\le x<1$ 时，

$$F(x)=P\{X<-1\}+P\{X=-1\}+P\{-1<X\le x\}=\frac{5x+7}{16}$$

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$.

即

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

因为随机变量 X 的绝对值不大于 1，且 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，及已经计算得到 $P\{-1<X<x\}=\frac{5(x+1)}{16}$，所以 $F(x)=P\{X\le x\}$

当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；

当 $-1\le x<1$ 时，

$$F(x)=P\{X<-1\}+P\{X=-1\}+P\{-1<X\le x\}=\frac{5x+7}{16}$$

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$.

即
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

(2) $P\{X<0\}=P\{X\le 0\}=F(0)=\frac{7}{16}$

概率论与数理统计

概率论与数理统计教研团队[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

2024 年　春

大工至善
大学至真

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY