概率论与数理统计

概率论与数理统计教研团队[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

2024 年 春

大工至善
大学至真

哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

目 录

二维随机变量

多维随机变量的必要性

多维随机变量的必要性

- **船舶运动姿态——六个自由度**

多维随机变量的必要性

- 船舶运动姿态——六个自由度
- 北斗卫星导航系统定位——卫星位置信息 (X, Y, Z) 和时刻信息 T

多维随机变量的必要性

- 船舶运动姿态——六个自由度
- 北斗卫星导航系统定位——卫星位置信息 (X, Y, Z) 和时刻信息 T
- 企业经济效益——劳动生产率、资金产值率、资金利润等

多维随机变量的必要性

- 船舶运动姿态——六个自由度
- 北斗卫星导航系统定位——卫星位置信息 (X, Y, Z) 和时刻信息 T
- 企业经济效益——劳动生产率、资金产值率、资金利润等

定义 1

设 $S = \{e\}$ **为试验** E **的样本空间，** $X = X(e), Y = Y(e)$ **是定义在样本空间** S **上的两个随机变量，称向量**

$$(X = X(e), Y = Y(e))$$

为二维随机变量或二维随机向量，简记为 (X, Y).

定义 2

设 (X, Y) 为二维随机变量，对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$，二元函数

$$F(x, y) = P\{\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}\} = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数，或随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

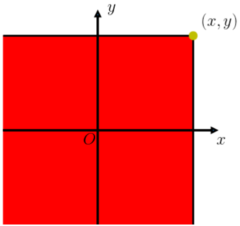
二维随机变量的分布函数

定义 2

设 (X,Y) 为二维随机变量，对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，二元函数

$$F(x,y)=P\{\{X\le x\}\cap\{Y\le y\}\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，或随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.



$F(x,y)$ 几何意义：随机变量 (X,Y) 的取值在点 (x,y) 左下方无穷矩形区域内的概率。

分布函数 $F(x,y)$ 的性质

(1) 有界性　对于任意的实数 x,y, 有 $0 \le F(x,y) \le 1$, 且

$$F(-\infty,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1,$$

$$F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0.$$

分布函数 $F(x,y)$ 的性质

(1) **有界性** 对于任意的实数 x,y, 有 $0 \le F(x,y) \le 1$, 且

$$F(-\infty,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1,$$

$$F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0.$$

(2) **单调性** $F(x,y)$ 是关于变量 x 和变量 y 的单调不减函数, 即, 对于任意的 y, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$F(x_1,y) \le F(x_2,y);$$

对于任意的 x, 当 $y_1 < y_2$ 时, 有

$$F(x,y_1) \le F(x,y_2).$$

分布函数 $F(x, y)$ 的性质

(3) **右连续** $F(x, y)$ 关于变量 x 右连续, 关于变量 y 右连续, 即, 对于任意的 x_0, 有

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x, y) = F(x_0, y);$$

对于任意的 y_0, 有

$$\lim_{y \to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0).$$

分布函数 $F(x,y)$ 的性质

(3) **右连续**　$F(x,y)$ 关于变量 x 右连续, 关于变量 y 右连续, 即, 对于任意的 x_0, 有

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x,y) = F(x_0,y);$$

对于任意的 y_0, 有

$$\lim_{y \to y_0^+} F(x,y) = F(x,y_0).$$

(4) **非负性**　对于任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 有

$$F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) \geq 0.$$

分布函数 $F(x,y)$ 的性质

(3) **右连续** $F(x,y)$ 关于变量 x 右连续, 关于变量 y 右连续, 即, 对于任意的 x_0, 有

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x,y) = F(x_0,y);$$

对于任意的 y_0, 有

$$\lim_{y\to y_0^+} F(x,y) = F(x,y_0).$$

(4) **非负性** 对于任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 有

$$F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) \geq 0.$$

评注：性质 (1) - (4) 为二维随机变量分布函数的充要条件。

定义 3

如果二维随机变量 (X, Y) 可能取值为有限的或可数无穷多，则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.

二维离散型随机变量

定义 3

如果二维随机变量 (X,Y) 可能取值为有限的或可数无穷多，则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量.

定义 4

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的所有取值为 $(x_i,y_j), i,j=1,2,\cdots$，称

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$$

为二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布或分布律，或随机变量 X 和 Y 的联合分布律.

二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律也可用表格形式表示

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律也可用表格形式表示

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$ **满足性质**

(1) $p_{ij} \geq 0$;

二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律也可用表格形式表示

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$ 满足性质

(1) $p_{ij} \geq 0;$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1.$

二维离散型随机变量的分布函数

已知二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$$

二维离散型随机变量的分布函数

已知二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$$

则二维离散型随机变量的分布函数为

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$

例 1

设盒子中有 7 张卡片，其中 2 张一等奖，2 张二等奖，3 张三等奖，现从中任取 4 张，以随机变量 X 表示取到一等奖的张数，随机变量 Y 表示取到三等奖的张数，

(1) 求 (X,Y) 的分布律；

(2) 求 $F(1,1)$.

例 1

设盒子中有 7 张卡片，其中 2 张一等奖，2 张二等奖，3 张三等奖，现从中任取 4 张，以随机变量 X 表示取到一等奖的张数，随机变量 Y 表示取到三等奖的张数，

(1) **求 (X,Y) 的分布律；**

(2) **求 $F(1,1)$.**

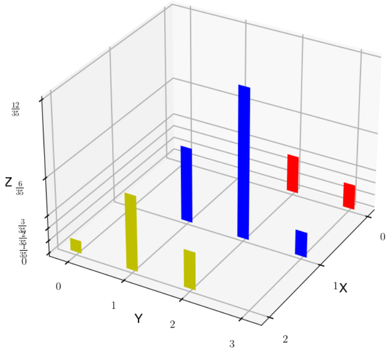
解：(1) X 的所有可能取值为 $0,1,2$，Y 的所有可能取值为 $0,1,2,3$，分别计算每个事件的概率，如

$$P\{X=0,Y=0\}=0, \qquad P\{X=0,Y=1\}=0,$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{3}{35}, \quad P\{X=1,Y=2\}=\frac{12}{35},\cdots$$

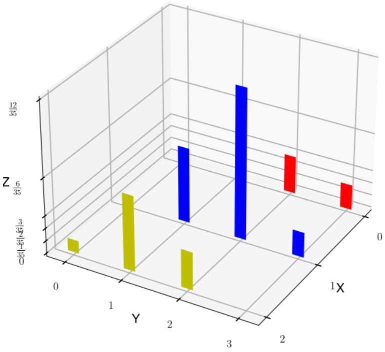
因此 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$
2	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$
3	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	0



因此 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$
2	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$
3	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	0



(2) $F(1,1)=P\{X\le 1, Y\le 1\}=\sum\limits_{i\le 1}\sum\limits_{j\le 1}p_{ij}=\frac{6}{35}.$

二维连续型随机变量

定义 5

设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，若存在非负函数 $f(x,y)$，使得对于任意实数 x,y，有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称 (X,Y) 为二维连续型随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度或密度函数，也称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

概率密度 $f(x, y)$ 的性质

概率密度 $f(x,y)$ 的性质

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x,y) \geq 0$;

概率密度 $f(x,y)$ 的性质

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x,y) \geq 0;$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty) = 1;$

概率密度 $f(x, y)$ 的性质

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x, y) \geq 0;$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = F(+\infty, +\infty) = 1;$

(3) $f(x, y)$ 的连续点处, 有

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y);$$

概率密度 $f(x,y)$ 的性质

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x,y) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty) = 1$;

(3) $f(x,y)$ 的连续点处, 有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y);$$

(4) 设 G 为任意平面区域, 则

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

概率密度 $f(x,y)$ 的性质

(1) $\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x,y)\geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty)=1$;

(3) $f(x,y)$ 的连续点处, 有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y);$$

(4) 设 G 为任意平面区域, 则

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

性质 (1)、(2) 为二元函数 $f(x,y)$ 是概率密度的充要条件.

例 2

设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1) 常数 k；(2) 分布函数 $F(x,y)$；(3) 概率 $P\{Y \leq X\}$.

例 2

设二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1) 常数 k；(2) 分布函数 $F(x,y)$；(3) 概率 $P\{Y\le X\}$.

解：(1) 由概率密度性质可知

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ke^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{k}{12}=1$$

例 2

设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

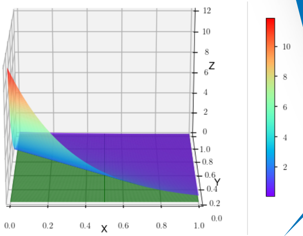
$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1) 常数 k；(2) 分布函数 $F(x,y)$；(3) 概率 $P\{Y \leq X\}$.

解：(1) 由概率密度性质可知

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ke^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{k}{12} = 1$$

因此 $k = 12.$



(2) 由分布函数定义

$$F(x,y)=P\{X\leq x,Y\leq y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可知

(2) 由分布函数定义

$$F(x,y)=P\{X\leq x,Y\leq y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可知

$$F(x,y)=\begin{cases}\int_0^y \mathrm{d}y\int_0^x 12e^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 由分布函数定义

$$F(x,y)=P\{X\leq x,Y\leq y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可知

$$F(x,y)=\begin{cases}\int_0^y \mathrm{d}y\int_0^x 12e^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

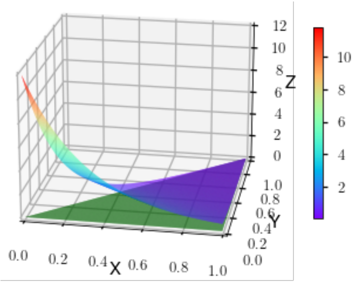
$$=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

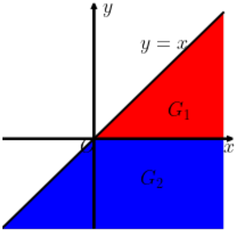
(3) $P\{Y \le X\}$

$$P\{Y \le X\} = \iint\limits_{G_1+G_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_0^x 12e^{-(3x+4y)}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{4}{7}$$





边缘分布

定义 6

设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$, 称

$$F_X(x)=P\{X\le x\} \text{ 和 } F_Y(y)=P\{Y\le y\}$$

为随机变量 (X,Y) 关于随机变量 X 和随机变量 Y 的边缘分布函数.

二维随机变量的边缘分布函数

定义 6

设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$, 称

$$F_X(x)=P\{X\le x\} \text{和} F_Y(y)=P\{Y\le y\}$$

为随机变量 (X,Y) 关于随机变量 X 和随机变量 Y 的边缘分布函数.

边缘分布函数 $F_X(x), F_Y(y)$ 与分布函数 $F(x,y)$ 有如下关系:

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<+\infty\}=F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<+\infty, Y\le y\}=F(+\infty,y)$$

二维离散型随机变量的边缘分布函数

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$$

二维离散型随机变量的边缘分布函数

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$$

随机变量 X,Y 的边缘分布函数为

二维离散型随机变量的边缘分布函数

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$$

随机变量 X,Y 的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=P\{X\le x,Y<+\infty\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=P\{X<+\infty,Y\le y\}=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}$$

定义 7

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$, 称

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij}=p_{i\cdot}, i=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij}=p_{\cdot j}, j=1,2,\cdots$$

为随机变量 (X,Y) 关于随机变量 X 和随机变量 Y 的边缘分布律.

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球},\\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球},\\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

求随机变量 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律.

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球},\\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球},\\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

求随机变量 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0			
1			
$p_{i\cdot}$			

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球}, \\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases}, Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球}, \\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

求随机变量 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$		
1			
$p_{i\cdot}$			

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X,Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球},\\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球},\\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

求随机变量 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	
1			
$p_{i\cdot}$			

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X = \begin{cases} 1, & \text{第一次取出白球}, \\ 0, & \text{第一次取出红球}. \end{cases}, Y = \begin{cases} 1, & \text{第二次取出白球}, \\ 0, & \text{第二次取出红球}. \end{cases}$$

求随机变量 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$	
1	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$		
$p_{i\cdot}$			

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球},\\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球},\\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

求随机变量 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$	
$p_{i\cdot}$			

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球},\\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases},\ Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球},\\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

求随机变量 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$	
$p_{i\cdot}$			

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球},\\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球},\\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

求随机变量 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\cdot}$			

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球},\\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases},\ Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球},\\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

求随机变量 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{5}$		

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球},\\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases},\ Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球},\\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

求随机变量 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X = \begin{cases} 1, & \text{第一次取出白球}, \\ 0, & \text{第一次取出红球}. \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{第二次取出白球}, \\ 0, & \text{第二次取出红球}. \end{cases}$$

求随机变量 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

例 2

设随机变量 (X, Y) 的分布律分别为

$Y \backslash X$	0	1
0	0.1	0.4
1	0.4	0.1

$Y \backslash X$	0	1
0	0.2	0.3
1	0.3	0.2

求它们的边缘分布律.

例 2

设随机变量 (X,Y) 的分布律分别为

$Y \backslash X$	0	1
0	0.1	0.4
1	0.4	0.1

$Y \backslash X$	0	1
0	0.2	0.3
1	0.3	0.2

求它们的边缘分布律.

解：由 (X,Y) 的联合分布律确定 X 和 Y 的边缘分布律均为

X	0	1
p_k	0.5	0.5

Y	0	1
p_k	0.5	0.5

例 2

设随机变量 (X,Y) 的分布律分别为

$Y \backslash X$	0	1
0	0.1	0.4
1	0.4	0.1

$Y \backslash X$	0	1
0	0.2	0.3
1	0.3	0.2

求它们的边缘分布律.

解：由 (X,Y) 的联合分布律确定 X 和 Y 的边缘分布律均为

X	0	1
p_k	0.5	0.5

Y	0	1
p_k	0.5	0.5

是否能由边缘分布律确定联合分布律，如果可以，条件是什么?

二维连续型随机变量的边缘概率密度

由边缘分布函数及连续型随机变量的定义，可定义二维连续型随机变量的边缘概率密度.

二维连续型随机变量的边缘概率密度

由边缘分布函数及连续型随机变量的定义，可定义二维连续型随机变量的边缘概率密度.

定义 8
设 (X,Y) 为二维连续型随机变量，概率密度为 $f(x,y)$，称随机变量 X,Y 的概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ 为 (X,Y) 的边缘概率密度，且有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y;$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例 3

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x, 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

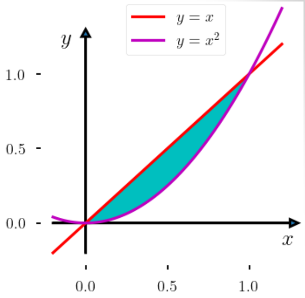
求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

例 3

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x, 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

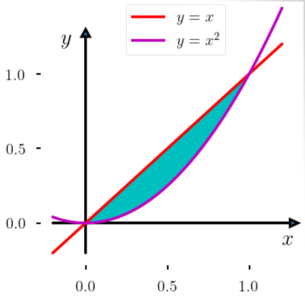


例 3

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x, 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.



解：由边缘概率密度的定义 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$，计算可得

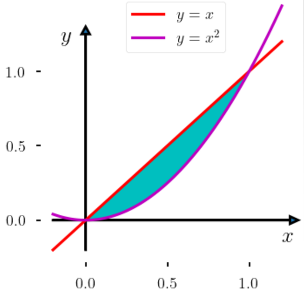
$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6\mathrm{d}y=6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x, 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.



解：由边缘概率密度的定义 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$，计算可得

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6\mathrm{d}y=6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6\mathrm{d}x=6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

二维正态分布

定义 9
如果二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$, **其中** $\mu_1, \mu_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ **均为常数, 则称** (X, Y) **服从参数为** $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ **的二维正态分布, 记作**

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

例 4

设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，即 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求 X 和 Y 的边缘分布.

例 4

设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布，即 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，求 X 和 Y 的边缘分布.

解：(X, Y) **的概率密度为：**

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中 $-\infty < x, y < +\infty, \mu_1, \mu_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ **均为常数.**

例 4

设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，即 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求 X 和 Y 的边缘分布.

解：(X,Y) 的概率密度为：

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中 $-\infty < x,y < +\infty, \mu_1,\mu_2,\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ 均为常数.

因为 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$，先处理 $f(x,y)$ 的指数部分.

改写 $f(x,y)$ 的指数部分

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

为

改写 $f(x,y)$ 的指数部分

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

为

$$-\frac{1}{2}\left[\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}.$$

改写 $f(x,y)$ 的指数部分

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

为

$$-\frac{1}{2}\left[\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}.$$

再对其积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\}\mathrm{d}y$$

作变换 (注意把 x 看作常量)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\} \mathrm{d}y$$

令

$$t = \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\} \mathrm{d}y$$

令

$$t = \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}},$$

则

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\} \mathrm{d}y$$

令

$$t = \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{y-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}},$$

则

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

注意到上式中的积分恰好等于 $\sqrt{2\pi}$，所以有

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

由此可知 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

其为一维正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的密度函数，即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$.

由此可知 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

其为一维正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的密度函数，即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$.

同理可知 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

由此可知 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

其为一维正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的密度函数，即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$.

同理可知 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

由此可见

- 二维正态分布的边缘分布均为一维正态分布.

由此可知 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

其为一维正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的密度函数，即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$.

同理可知 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

由此可见

- 二维正态分布的边缘分布均为一维正态分布.
- 二维正态分布的边缘分布中不含参数 ρ ，从而当 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ 固定不变而 ρ 变化时，X 和 Y 的分布不变，(X,Y) 的联合分布发生变化.

由此可知 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

其为一维正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的密度函数，即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$.

同理可知 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

由此可见

- 二维正态分布的边缘分布均为一维正态分布.
- 二维正态分布的边缘分布中不含参数 ρ ，从而当 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ 固定不变而 ρ 变化时，X 和 Y 的分布不变，(X,Y) 的联合分布发生变化.
- 由联合分布可以确定边缘分布，由边缘分布分一般不能确定联合分布.

条件分布

二维离散型随机变量的条件分布

定义 10
设 (X, Y) 为二维离散型随机变量, 对于给定的 y_j, 若 $P\{Y = y_j\} > 0$, 称

$$P\{X = x_i|Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i = 1, 2, \cdots$$

为 $Y = y_j$ 的条件下, 随机变量 X 的条件分布律.

条件分布律表格形式

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
$P\{X = x_i\|Y = y_j\}$	$\frac{p_{1j}}{p_{\cdot j}}$	$\frac{p_{2j}}{p_{\cdot j}}$	$\cdots$	$\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$	$\cdots$

二维离散型随机变量的条件分布

同理，对于给定的 x_i，若 $P\{X=x_i\}>0$, 称

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},j=1,2,\cdots$$

为 $X=x_i$ 的条件下, 随机变量 Y 的条件分布律.

条件分布律表格形式

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
$P\{Y=y_j\|X=x_i\}$	$\frac{p_{i1}}{p_{i\cdot}}$	$\frac{p_{i2}}{p_{i\cdot}}$	$\cdots$	$\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$	$\cdots$

条件分布律 $P\{X = x_i | Y = y_j\}$ 满足性质

条件分布律 $P\{X = x_i | Y = y_j\}$ 满足性质

(1) $P\{X = x_i | Y = y_j\} \geq 0$;

条件分布律 $P\{X=x_i|Y=y_j\}$ 满足性质

(1) $P\{X=x_i|Y=y_j\} \geq 0;$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} P\{X=x_i|Y=y_j\} = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = 1.$

条件分布律 $P\{X=x_i|Y=y_j\}$ 满足性质

(1) $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geq 0;$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} P\{X=x_i|Y=y_j\}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=1.$

条件分布律 $P\{Y=y_j|X=x_i\}$ 满足性质

条件分布律 $P\{X=x_i|Y=y_j\}$ 满足性质

(1) $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geq 0$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} P\{X=x_i|Y=y_j\}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=1.$

条件分布律 $P\{Y=y_j|X=x_i\}$ 满足性质

(1) $P\{Y=y_j|X=x_i\}\geq 0$;

条件分布律 $P\{X=x_i|Y=y_j\}$ 满足性质

(1) $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geq 0$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} P\{X=x_i|Y=y_j\}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=1.$

条件分布律 $P\{Y=y_j|X=x_i\}$ 满足性质

(1) $P\{Y=y_j|X=x_i\}\geq 0$;

(2) $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} P\{Y=y_j|X=x_i\}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}=1.$

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球},\\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球},\\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

(1) 求 $X=0$ 条件下，Y 的条件分布律；

(2) 求 $Y=0$ 条件下，X 的条件分布律.

例 1

设袋中装有 2 个白球，3 个红球，现从袋中无放回地随机抽取两次，定义随机变量 X, Y 如下

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取出白球},\\ 0, & \text{第一次取出红球}.\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取出白球},\\ 0, & \text{第二次取出红球}.\end{cases}$$

(1) 求 $X=0$ 条件下，Y 的条件分布律;

(2) 求 $Y=0$ 条件下，X 的条件分布律.

解：(1) 在 $X=0$ 条件下，袋中还剩 2 个白球和 2 个红球，则有

$$P\{Y=0|X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=1|X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{X=0\}}=\frac{1}{2}.$$

故在 $X=0$ 条件下，Y 的条件分布律为

Y	0	1
$P\{Y=y_j\|X=0\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P\{Y=1|X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{X=0\}}=\frac{1}{2}.$$

故在 $X=0$ 条件下，Y 的条件分布律为

Y	0	1
$P\{Y=y_j\|X=0\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(2) 在 $Y=0$ 条件下，

$$P\{X=0|Y=0\}=\frac{P\{X=0,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=1|Y=0\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{1}{2}.$$

故在 $Y=0$ 条件下，X 的条件分布律为

X	0	1
$P\{X=x_i\|Y=0\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

例 2

某人练习投篮，设其每次投篮的命中率均为 $p(0<p<1)$，投篮练习直至命中 2 次为止，以 X 表示首次命中所进行的投篮次数，以 Y 表示一共进行的投篮次数，求二维随机变量 (X,Y) 的分布律和条件分布律.

例 2

某人练习投篮，设其每次投篮的命中率均为 $p(0 < p < 1)$，投篮练习直至命中 2 次为止，以 X 表示首次命中所进行的投篮次数，以 Y 表示一共进行的投篮次数，求二维随机变量 (X, Y) 的分布律和条件分布律.

解：(方法一) (X, Y) 的联合分布律为

$$P\{X = m, Y = n\} = p^2(1-p)^{n-2}, n = 2, 3, \cdots, m = 1, \cdots, n-1.$$

例 2

某人练习投篮，设其每次投篮的命中率均为 $p(0<p<1)$，投篮练习直至命中 2 次为止，以 X 表示首次命中所进行的投篮次数，以 Y 表示一共进行的投篮次数，求二维随机变量 (X,Y) 的分布律和条件分布律.

解：(方法一) (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots,m=1,\cdots,n-1.$$

X 的边缘分布律为

$$\begin{aligned}P\{X=m\}&=\sum_{n=m+1}^{+\infty}P\{X=m,Y=n\}\\&=\sum_{n=m+1}^{+\infty}p^2(1-p)^{n-2}=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\cdots\end{aligned}$$

(X, Y) 的联合分布律为

$$P\{X=m, Y=n\}=p^{2}(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots, m=1,\cdots, n-1.$$

Y 的边缘分布律为

$$\begin{aligned} P\{Y=n\} &=\sum_{m=1}^{n-1} P\{X=m, Y=n\} \\ &=\sum_{m=1}^{n-1} p^{2}(1-p)^{n-2} \\ &=(n-1) p^{2}(1-p)^{n-2}, n=2,3, \cdots \end{aligned}$$

对于给定的 $n(n=2,3,\cdots)$，在 $Y=n$ 的条件下，X 的条件分布律为：

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

$$=\frac{1}{n-1}, m=1,2,\cdots,n-1.$$

对于给定的 $n(n=2,3,\cdots)$，在 $Y=n$ 的条件下，X 的条件分布律为：

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$
$$=\frac{1}{n-1}, m=1,2,\cdots,n-1.$$

对于给定的 $m(m=1,2,\cdots)$，在 $X=m$ 的条件下，Y 的条件分布律为：

$$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}$$
$$=p(1-p)^{n-m-1}, n=m+1,m+2,\cdots$$

解：(方法二, 等可能概型)　对于给定的 $n(n=2,3,\cdots)$，在 $Y=n$ 的条件下，X 的所有可能取值为 $1,2,\cdots,n-1$，且等取每个值的可能性相同，则 X 的条件分布律为：

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{1}{n-1},m=1,2,\cdots,n-1.$$

解：(方法二, 等可能概型)　**对于给定的** $n(n=2,3,\cdots)$，**在** $Y=n$ **的条件下，** X **的所有可能取值为** $1,2,\cdots,n-1$，**且等取每个值的可能性相同，则** X **的条件分布律为：**

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{1}{n-1},m=1,2,\cdots,n-1.$$

对于给定的 $m(m=1,2,\cdots)$，**在** $X=m$ **的条件下，** Y **的所有可能取值为** $m+1,m+2,\cdots$，**且等取每个值的可能性相同，则** Y **的条件分布律为：**

$$P\{Y=n|X=m\}=p(1-p)^{n-m-1}.$$

二维连续型随机变量的条件分布

设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度为 $f_X(x), f_Y(y)$，因为连续型随机变量取某个值的概率为零，即 $P\{Y=y\}=0$，所以将 $P\{X\le x|Y=y\}$ 等价表示为当 $\varepsilon\to 0$ 时，$P\{X\le x|y\le Y\le y+\varepsilon\}$ 的极限，即

二维连续型随机变量的条件分布

设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度为 $f_X(x), f_Y(y)$，因为连续型随机变量取某个值的概率为零，即 $P\{Y=y\}=0$，所以将 $P\{X\le x|Y=y\}$ 等价表示为当 $\varepsilon\to 0$ 时，$P\{X\le x|y\le Y\le y+\varepsilon\}$ 的极限，即

$$
\begin{aligned}
P\{X\le x|Y=y\} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P\{X\le x, y\le Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y\le Y\le y+\varepsilon\}}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(y)\mathrm{d}y}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{y}^{y+\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x}{\frac{1}{\varepsilon}\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(y)\mathrm{d}y}
\end{aligned}
$$

当 $f_Y(y), f(x,y)$ 在 y 处连续时，由积分中值定理可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{y}^{y+\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}y = f(x,y)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(y)\mathrm{d}y = f_Y(y)$$

当 $f_Y(y), f(x,y)$ 在 y 处连续时，由积分中值定理可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}y = f(x,y)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(y)\mathrm{d}y = f_Y(y)$$

所以有

$$P\{X\le x|Y=y\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x}{\frac{1}{\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(y)\mathrm{d}y}$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x.$$

当 $f_Y(y), f(x,y)$ 在 y 处连续时，由积分中值定理可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}y = f(x,y)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(y)\mathrm{d}y = f_Y(y)$$

所以有

$$P\{X\le x|Y=y\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x}{\frac{1}{\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(y)\mathrm{d}y} = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x.$$

同理可得 $P\{Y\le y|X=x\} = \int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y.$

定义 11
设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 边缘概率密度为 $f_X(x), f_Y(y)$，对于任意使得 $f_Y(y)>0$ 的 y, 称

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x \text{ 和 } f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为 $Y=y$ 的条件下, 随机变量 X 的条件分布函数和条件概率密度.

定义 11
设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 边缘概率密度为 $f_X(x), f_Y(y)$，对于任意使得 $f_Y(y)>0$ 的 y, 称

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x \text{ 和 } f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为 $Y=y$ 的条件下, 随机变量 X 的条件分布函数和条件概率密度.

同理可得 $X=x$ 条件下, 随机变量 Y 的条件分布函数和条件概率密度分别为

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y \text{ 和 } f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

例 3

设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(1+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 $f_{Y|X}(y|x)$;

(2) 求 $P\{Y>1|X=3\}$

例 3

设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求 $f_{Y|X}(y|x)$;

(2) 求 $P\{Y>1|X=3\}$

解：(1) 由题意可知

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时，在 $X = x$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} xe^{-xy}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时，在 $X = x$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} xe^{-xy}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

(2) 当 $X = 3$ 时，有

$$P\{Y > 1|X = 3\} = \int_1^{+\infty} f_{Y|X}(y|3)\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} 3e^{-3y}\mathrm{d}y = e^{-3}$$

定义 12

如果二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 A 是平面区域 G 的面积, 则称 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布.

二维均匀分布

定义 12

如果二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 A 是平面区域 G 的面积, 则称 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布.

注： 若 (X, Y) 在 G 上服从均匀分布，则 (X, Y) 落在区域 G 的任何一个子区域内的概率只与子区域的面积成正比，与子区域的形状、位置无关.

例 4

设二维随机变量 (X,Y) **在圆域** $x^2+y^2 \leq 1$ **上服从均匀分布，当** $-1 < y < 1$，**求条件概率密度** $f_{X|Y}(x|y)$.

例 4

设二维随机变量 (X,Y) 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布，当 $-1<y<1$，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解：(1) 由题意可知 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$,

例 4

设二维随机变量 (X,Y) **在圆域** $x^2+y^2 \le 1$ **上服从均匀分布，当** $-1 < y < 1$，**求条件概率密度** $f_{X|Y}(x|y)$.

解：(1) 由题意可知 (X,Y) **的概率密度为** $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \le 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$**，则** Y **的边缘概率密度为**

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\mathrm{d}x, & -1<y<1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1<y<1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

于是当 $-1 < y < 1$ 时，在 $Y = y$ 的条件下，X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 5

设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机取值，当观察到 $X=x(0<x<1)$ 时，数 Y 在 $(x,1)$ 上随机取值，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

例 5

设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机取值，当观察到 $X=x(0<x<1)$ 时，数 Y 在 $(x,1)$ 上随机取值，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解：(1) 由题意可知 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 5

设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机取值，当观察到 $X = x(0 < x < 1)$ 时，数 Y 在 $(x,1)$ 上随机取值，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解：(1) 由题意可知 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $0 < x < 1$ 时，在 $X = x$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

于是 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以有

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x,\\ &=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\\ &=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

随机变量的独立性

定义 13

设 (X, Y) 为二维随机变量，如果对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 都有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

即

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

其中 $F(x,y), F_X(x), F_Y(y)$ 为联合分布函数和边缘分布函数，则称随机变量 X 与 Y 相互独立.

离散型随机变量的独立性

若 (X, Y) 为二维离散型随机变量，则随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件：对于任意的 $i, j = 1, 2, \cdots$，有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$$

记为

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

此时有

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = P\{X = x_i\}$$

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = P\{Y = y_j\}$$

连续型随机变量的独立性

若 (X,Y) 为二维连续型随机变量，则随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件：联合概率密度等于边缘概率密度乘积，即

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

例 1

设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

(1) 求 X 与 Y 的边缘分布律;

(2) 判断 X 与 Y 是否独立.

$Y \backslash X$	0	1
0	0.2	0.2
1	0.3	0.3

例 1

设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

(1) 求 X 与 Y 的边缘分布律;

(2) 判断 X 与 Y 是否独立.

$Y \backslash X$	0	1
0	0.2	0.2
1	0.3	0.3

解：(1)　显然 X 与 Y 的边缘分布律为

X	0	1
$p_{i\cdot}$	0.5	0.5

Y	0	1
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	0.2	0.2	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$p_{i\cdot}$	0.5	0.5	

例 1

设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

(1) 求 X 与 Y 的边缘分布律;

(2) 判断 X 与 Y 是否独立.

$Y \backslash X$	0	1
0	0.2	0.2
1	0.3	0.3

解：(1)　显然 X 与 Y 的边缘分布律为

X	0	1
$p_{i\cdot}$	0.5	0.5

Y	0	1
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	0.2	0.2	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$p_{i\cdot}$	0.5	0.5	

(2)　经验证，对任意的 i,j 有 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，故 X 与 Y 独立.

例 2

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}4e^{-2x-2y}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

判断 X, Y 是否独立?

例 2

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2x-2y}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

判断 X,Y 是否独立?

解：X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 2

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2x-2y}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

判断 X, Y 是否独立?

解： X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理可求得 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

例 2

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2x-2y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

判断 X,Y 是否独立?

解： X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 独立.

例 3

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & x>0, 0<y<1-x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

判断 X, Y 是否独立?

例 3

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & x>0, 0<y<1-x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

判断 X,Y 是否独立?

解：X 与 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立.

例 4

设 (X,Y) **服从二维正态分布，**

$$X \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

证明 X **与** Y **相互独立的充要条件是** $\rho = 0.$

例 4

设 (X, Y) 服从二维正态分布，

$$X \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

证明 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $\rho = 0.$

证明： 必要性 已知 X 与 Y 相互独立，即

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

并且已经证明二维正态分布的边缘分布为一维正态分布，即

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

计算 $f_X(x)f_Y(y)$ 可得

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以有 $\rho=0$.

计算 $f_X(x)f_Y(y)$ 可得

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以有 $\rho=0$.

充分性　已知 $\rho=0$，所以二维正态分布的概率密度此时为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

显然有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立. $\square$

计算 $f_X(x)f_Y(y)$ 可得

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以有 $\rho=0$.

充分性　已知 $\rho=0$，所以二维正态分布的概率密度此时为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

显然有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立. $\square$

注

- $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$;

计算 $f_X(x)f_Y(y)$ 可得

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以有 $\rho=0$.

充分性 已知 $\rho=0$，所以二维正态分布的概率密度此时为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

显然有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立. $\square$

注

- $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$;
- X 与 Y 相互独立的充要条件是 $\rho=0$.

n 维随机向量简介

设 E 是一个随机试验，样本空间为 $S=\{e\}$，定义在样本空间上的 n 个随机变量为 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$. 由它们构成的向量

$$X=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

称为 n 维随机变量或 n 维随机向量，X_i 称为 X 的第 i 个分量 (或坐标).

n 随机变量的分布函数

对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

为 n 维随机变量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数.

n 维离散型随机变量及其分布律

若 n 维随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的所有可能取值是有限组或可列无穷多组，则称 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 n 维离散型随机变量，表示 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的所有可能取值及取值的概率的表达式称为 n 维离散型随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布律.

n 维连续型随机变量及其概率密度函数

若存在非负可积函数，对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维连续型随机变量，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度.

已知随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的 $k(1 \leq k < n)$ 维边缘分布函数就随之确定.

例如，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的关于 X_1 与 (X_1, X_2) 的边缘分布函数分别为

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, \cdots, +\infty)$$

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, +\infty\cdots, +\infty)$$

n 维离散型随机变量的边缘分布律

已知 $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$ 是离散型随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的 $k(1 \le k < n)$ 维边缘分布律就随之确定.

例如，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的关于 X_1 与 (X_1, X_2) 的边缘分布律分别为

$$P\{X_1 = x_{i_1}\} = \sum_{i_2, i_3, \cdots, i_n} P\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \cdots, X_n = x_{i_n}\}$$

$$P\{X_1 = x_{i_1} X_2 = x_{i_2}\} = \sum_{i_3, i_4, \cdots, i_n} P\{X_1 = x_{i_1}, \cdots, X_n = x_{i_n}\}$$

n 维连续型随机变量的边缘概率密度

已知 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是连续型随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的 $k(1 \leq k < n)$ 维边缘概率密度就随之确定.

例如，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的关于 X_1 与 (X_1, X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_3 \cdots \mathrm{d}x_n$$

n 维连续型随机变量的边缘概率密度

若 n 维随机变量的联合分布函数等于一维边缘分布函数的乘积，即

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同的分布，简称独立同分布，此时有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

其中 $F(x)$ 为 $X_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的分布函数.

n 维连续型随机变量的边缘概率密度

若有 $m+n$ 维随机变量的联合分布函数等于 m 维与 n 边缘分布函数的乘积，即

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ = F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

其中 F_1,F_2,F 分别为随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$,$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$,$(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 的分布函数. 则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 相互独立.

n 维随机变量的独立性

定理 14
设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立，则 $X_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 与 $Y_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 相互独立.

定理 15
设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立，若

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_m) \text{和} g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

是连续函数，则 $h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立.

两个随机变量函数的分布

两个离散型随机变量的函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布

设 (X, Y) 为一个二维随机变量，$z = g(x, y)$ 为一个已知的二元连续函数，则 $Z = g(X, Y)$ 是随机变量 X, Y 的函数，也是一个随机变量.

两个离散型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布

设 (X,Y) 为一个二维随机变量，$z=g(x,y)$ 为一个已知的二元连续函数，则 $Z=g(X,Y)$ 是随机变量 X,Y 的函数，也是一个随机变量.

设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的分布律的步骤为：

(1) **计算 $Z=g(X,Y)$ 的所有可能取值**

$$z_l, l=1,2,\cdots$$

两个离散型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布

设 (X,Y) 为一个二维随机变量，$z=g(x,y)$ 为一个已知的二元连续函数，则 $Z=g(X,Y)$ 是随机变量 X,Y 的函数，也是一个随机变量.

设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的分布律的步骤为：

(1) 计算 $Z=g(X,Y)$ 的所有可能取值

$$z_l, l=1,2,\cdots$$

(2) 计算 $P\{Z=z_l\}$ 的概率

$$P\{Z=z_l\}=\sum_{g(x_i,y_j)=z_l} p_{ij}, l=1,2,\cdots$$

例 1

设随机变量 X 与 Y 相互独立，分布律分别为

X	0	1	2
p_k	0.5	0.3	0.2

Y	0	2
p_k	0.6	0.4

(1) 求 $Z = X + Y$ 的分布律；(2) 求 $M = \max(X, Y)$ 的分布律.

例 1

设随机变量 X 与 Y 相互独立，分布律分别为

X	0	1	2
p_k	0.5	0.3	0.2

Y	0	2
p_k	0.6	0.4

(1) 求 $Z = X + Y$ 的分布律；(2) 求 $M = \max(X, Y)$ 的分布律.

解：(1)$Z = X + Y$ 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4$，取相应值的概率为

例 1

设随机变量 X 与 Y 相互独立，分布律分别为

X	0	1	2
p_k	0.5	0.3	0.2

Y	0	2
p_k	0.6	0.4

(1) 求 $Z = X + Y$ 的分布律；(2) 求 $M = \max(X, Y)$ 的分布律.

解：(1)$Z = X + Y$ 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4$，取相应值的概率为

$$P\{Z = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} = 0.5 \times 0.6 = 0.3$$
$$P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0.3 \times 0.6 = 0.18$$
$$P\{Z = 2\} = P\{X = 2, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = 2\} = 0.12 + 0.2 = 0.32$$
$$P\{Z = 3\} = P\{X = 1, Y = 2\} = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$
$$P\{Z = 4\} = P\{X = 2, Y = 2\} = 0.2 \times 0.4 = 0.08$$

例 1

设随机变量 X 与 Y 相互独立，分布律分别为

X	0	1	2
p_k	0.5	0.3	0.2

Y	0	2
p_k	0.6	0.4

(1) 求 $Z = X + Y$ 的分布律；(2) 求 $M = \max(X, Y)$ 的分布律.

综上，$Z = X + Y$ 的分布律为

Z	0	1	2	3	4
p_k	0.3	0.18	0.32	0.12	0.08

例 1

设随机变量 X 与 Y 相互独立，分布律分别为

X	0	1	2
p_k	0.5	0.3	0.2

Y	0	2
p_k	0.6	0.4

(1) 求 $Z = X + Y$ 的分布律；(2) 求 $M = \max(X, Y)$ 的分布律.

(2)$M = \max(X, Y)$ 的所有可能取值为 $0, 1, 2$，取相应值的概率为

例 1

设随机变量 X 与 Y 相互独立，分布律分别为

X	0	1	2
p_k	0.5	0.3	0.2

Y	0	2
p_k	0.6	0.4

(1) 求 $Z = X + Y$ 的分布律；(2) 求 $M = \max(X, Y)$ 的分布律.

(2)$M = \max(X, Y)$ 的所有可能取值为 $0, 1, 2$，取相应值的概率为

$$P\{M = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} = 0.5 \times 0.6 = 0.3$$
$$P\{M = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0.3 \times 0.6 = 0.18$$
$$P\{M = 2\} = 1 - P\{M = 0\} - P\{M = 1\} = 0.52$$

例 1

设随机变量 X 与 Y 相互独立，分布律分别为

X	0	1	2
p_k	0.5	0.3	0.2

Y	0	2
p_k	0.6	0.4

(1) 求 $Z = X + Y$ 的分布律；(2) 求 $M = \max(X, Y)$ 的分布律.

$M = \max(X, Y)$ 的分布律为

M	0	1	2
p_k	0.3	0.18	0.52

两个连续型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布

设 (X,Y) 为二维连续型随机变量，概率密度为 $f(x,y)$，求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 的步骤为：

两个连续型随机变量的函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布

设 (X, Y) 为二维连续型随机变量，概率密度为 $f(x, y)$，求随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 的步骤为：

(1) 求 $Z = g(X, Y)$ 的分布函数

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{g(X, Y) \le z\} = \iint\limits_{g(x,y) \le z} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

两个连续型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布

设 (X,Y) 为二维连续型随机变量，概率密度为 $f(x,y)$，求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 的步骤为：

(1) **求 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数**

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(2) **对 $F_Z(z)$ 关于 z 求导，得到概率密度**

$$f_Z(z)=F_Z'(z)$$

$Z = X + Y$ 的分布

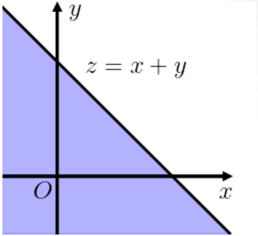
$Z = X + Y$ 的分布

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = X + Y$ 的分布函数为

$Z=X+Y$ 的分布

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=\iint_{x+y\leq z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

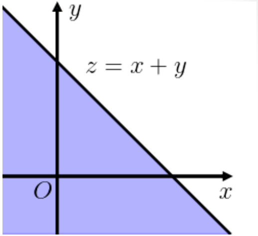


$Z = X + Y$ 的分布

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = X + Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \iint_{x+y\le z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$



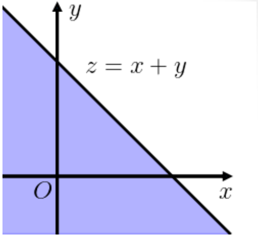
$Z = X + Y$ 的分布

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z = X + Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \iint_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{令}u=x+y} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u$$



$Z = X + Y$ 的分布

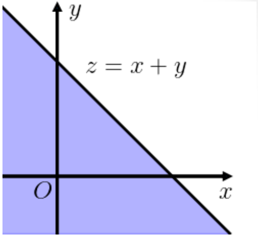
设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = X + Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = \iint_{x+y\leq z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{令}u=x+y} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} f(u-y, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}u$$

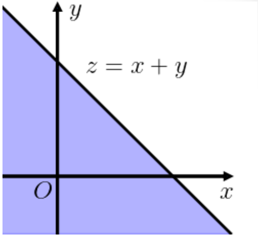
$$\xlongequal{\text{交换积分次序}} \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y, y)\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}y$$



$Z = X + Y$ 的分布

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = X + Y$ 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) = P\{Z \le z\} &= \iint_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&\xlongequal{\text{令}u=x+y} \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\text{交换积分次序}} \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$



Z 概率密度为

$$
f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y
$$

$Z=X+Y$ 的分布

同理，Z 的概率密度还可以表示为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

综上，设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x, \text{ 或 } f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

$Z=X+Y$ 的分布

同理，Z 的概率密度还可以表示为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

综上，设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x,\ \text{或}\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

当 X,Y 相互独立时，$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x\ \text{或}\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$Z = X + Y$ 的分布

定理 16

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\mathrm{d}x, \text{ 或 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)\mathrm{d}y$$

当 X, Y 相互独立时,$Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x \text{ 或 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y$$

其中 $f_X(x), f_Y(y)$ 分别为随机变量 X 与 Y 的边缘概率密度.

$Z = X + Y$ 的分布

定理 16
设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\mathrm{d}x, \text{ 或 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\mathrm{d}y$$

当 X, Y 相互独立时,$Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x \text{ 或 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y$$

其中 $f_X(x), f_Y(y)$ 分别为随机变量 X 与 Y 的边缘概率密度.

积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y$ 也称为函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的卷积，记为 $f_X(x) * f_Y(y)$.

例 2

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(0,1)$，求 $Z = X+Y$ 的概率密度.

例 2

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(0,1)$，求 $Z = X+Y$ 的概率密度.

解：因为 X 与 Y 的概率密度为

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}; f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, y \in \mathbb{R}$，**且 X 与 Y 相互独立，**

例 2

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(0,1)$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解：因为 X 与 Y 的概率密度为

$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in\mathbb{R}; f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, y\in\mathbb{R}$，**且 X 与 Y 相互独立，所以 $Z=X+Y$ 的概率密度为**

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}, z\in\mathbb{R}$$

例 2

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(0,1)$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解：因为 X 与 Y 的概率密度为

$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in\mathbb{R}; f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, y\in\mathbb{R}$，且 X 与 Y 相互独立，所以 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}, z\in\mathbb{R}$$

注： 由 Z 的概率密度可知，$Z\sim N(0,2)$.

相互独立的正态分布有如下结论：

相互独立的正态分布有如下结论：

(1) 设 X,Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $Z = X + Y$ 仍服从正态分布，且有

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

相互独立的正态分布有如下结论：

(1) 设 X, Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则 $Z = X + Y$ 仍服从正态分布，且有

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

(2) 若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, n$，且相互独立，则 $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 仍服从正态分布，且有

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

相互独立的正态分布有如下结论:

(1) **设** X, Y **相互独立，且** $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$**，则** $Z = X + Y$ **仍服从正态分布，且有**

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

(2) **若** $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, n$**，且相互独立，则** $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ **仍服从正态分布，且有**

$$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

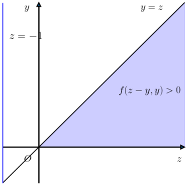
(3) **有限个相互独立的服从正态分布的随机变量的线性组合，仍然服从正态分布.**

例 3

设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.



例 3

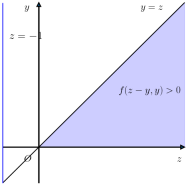
设 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解： Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) \mathrm{d} y$$



例 3

设 (X,Y) 的概率密度为

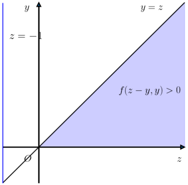
$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解：Z 的概率密度为

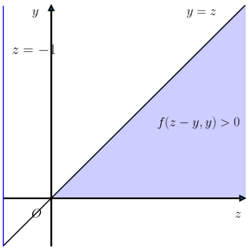
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

当 $z\le 0$ 时，对于任意的 y 均有 $f(z-y,y)=0$，此时有 $f_Z(z)=0$;



当 $z>0$，且 $y\in(0,z)$ 时，有 $f(z-y,y)>0$，从而

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\int_0^z 2e^{-(2(z-y)+y)}\mathrm{d}y=2e^{-z}-2e^{-2z}$$

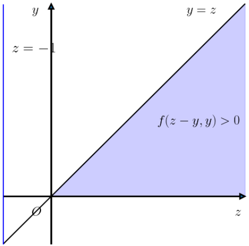


当 $z>0$，且 $y\in(0,z)$ 时，有 $f(z-y,y)>0$，从而

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y=\int_0^z 2e^{-(2(z-y)+y)}\mathrm{d}y=2e^{-z}-2e^{-2z}$$

所以 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2e^{-z}-2e^{-2z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

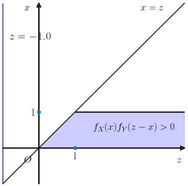


例 4

设 X, Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

已知 X, Y 相互独立，求 $Z = X + Y$ 的概率密度.



例 4

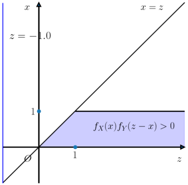
设 X,Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

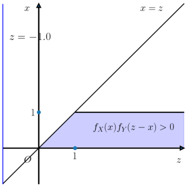
已知 X,Y 相互独立，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解：由 X,Y 相互独立，Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$



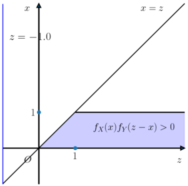
当 $z \le 0$ 时，对于任意的 x 均有 $f_X(x)f_Y(z-x)=0$，此时有 $f_Z(z)=0$；



当 $z \leq 0$ 时，对于任意的 x 均有 $f_X(x)f_Y(z-x)=0$，此时有 $f_Z(z)=0$;

当 $0<z\leq 1$，且 $x\in(0,z)$ 时，有 $f_X(x)f_Y(z-x)>0$，此时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=1-e^{-z}$$



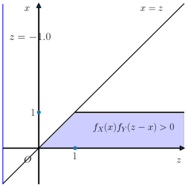
当 $z \le 0$ 时，对于任意的 x 均有 $f_X(x)f_Y(z-x)=0$，此时有 $f_Z(z)=0$；

当 $0<z\le 1$，且 $x\in(0,z)$ 时，有 $f_X(x)f_Y(z-x)>0$，此时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=1-e^{-z}$$

当 $z>1$，且 $x\in(0,1)$ 时，有 $f_X(x)f_Y(z-x)>0$，此时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=e^{-z}(e-1)$$



当 $z \leq 0$ 时，对于任意的 x 均有 $f_X(x)f_Y(z-x)=0$，此时有 $f_Z(z)=0$；

当 $0<z\leq 1$，且 $x\in(0,z)$ 时，有 $f_X(x)f_Y(z-x)>0$，此时有

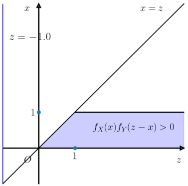
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=1-e^{-z}$$

当 $z>1$，且 $x\in(0,1)$ 时，有 $f_X(x)f_Y(z-x)>0$，此时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=e^{-z}(e-1)$$

所以 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z\leq 1,\\ e^{-z}(e-1), & z>1,\\ 0, & z\leq 0.\end{cases}$$



定理 17

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = X - Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z + y, y)\mathrm{d}y$$

当 X, Y 相互独立时，$Z = X - Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z + y) f_Y(y)\mathrm{d}y$$

其中 $f_X(x), f_Y(y)$ 分别为随机变量 X 与 Y 的边缘概率密度.

$Z = \frac{X}{Y}, W = XY$ 的分布

定理 18

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = \frac{X}{Y}, W = XY$ 的概率密度分别为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy, y) \mathrm{d}y\,,\ f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{w}{x}\right) \mathrm{d}x$$

当 X, Y 相互独立时，概率密度分别为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(zy) f_Y(y) \mathrm{d}y\,,\ f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{w}{x}\right) \mathrm{d}x$$

其中 $f_X(x), f_Y(y)$ 分别为随机变量 X 与 Y 的边缘概率密度.

例 5

设 X, Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

已知 X, Y 相互独立，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度.

例 5

设 X, Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

已知 X, Y 相互独立，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度.

解：由 X, Y 相互独立，Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y| f_X(zy) f_Y(y)\mathrm{d}y$$

由密度函数 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$, $f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 可知

由密度函数 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 可知

当 $z\leq 0$ 时，对于任意的 y 均有 $|y|f_X(zy)f_Y(y)=0$，此时有 $f_Z(z)=0$

由密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 可知

当 $z\le 0$ 时，对于任意的 y 均有 $|y|f_X(zy)f_Y(y)=0$，此时有 $f_Z(z)=0$

当 $z>0$，且 $y>0$ 时，有 $|y|f_X(zy)f_Y(y)>0$，此时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(zy)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}ye^{-yz}2e^{-2y}\mathrm{d}y=\frac{2}{(2+z)^2}$$

由密度函数 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 可知

当 $z \le 0$ 时，对于任意的 y 均有 $|y|f_X(zy)f_Y(y)=0$，此时有 $f_Z(z)=0$

当 $z>0$，且 $y>0$ 时，有 $|y|f_X(zy)f_Y(y)>0$，此时有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(zy)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty} ye^{-yz}2e^{-2y}\mathrm{d}y=\frac{2}{(2+z)^2}$$

所以 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases} \dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

例 6

设 X, Y 相互独立，均服从正态分布 $N(0,1)$，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度.

例 6

设 X, Y 相互独立，均服从正态分布 $N(0,1)$，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度.

解：由 X, Y 相互独立，可知 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y| f_X(zy) f_Y(y) \mathrm{d}y$$

例 6

设 X, Y 相互独立，均服从正态分布 $N(0,1)$，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度.

解：由 X, Y 相互独立，可知 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y| f_X(zy) f_Y(y) \mathrm{d}y$$

X 与 Y 的概率密度 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in\mathbb{R}; f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, y\in\mathbb{R}$

例 6

设 X, Y 相互独立，均服从正态分布 $N(0,1)$，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度.

解：由 X, Y 相互独立，可知 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y| f_X(zy) f_Y(y)\mathrm{d}y$$

X 与 Y 的概率密度 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in\mathbb{R}; f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, y\in\mathbb{R}$

所以 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}|y|e^{-\frac{y^2(1+z^2)}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi(1+z^2)}, -\infty<z<+\infty.$$

$M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布

设随机变量 X 和 Y 相互独立，分布函数分别记为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则

$M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

设随机变量 X 和 Y 相互独立，分布函数分别记为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则

$$\begin{aligned}F_M(z)=P\{M\le z\}&=P\{\max(X,Y)\le z\}\\&=P\{X\le z,Y\le z\}\\&=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}\\&=F_X(z)F_Y(z)\end{aligned}$$

$M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布

设随机变量 X 和 Y 相互独立，分布函数分别记为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则

$$
\begin{aligned}
F_M(z) = P\{M \le z\} &= P\{\max(X, Y) \le z\} \\
&= P\{X \le z, Y \le z\} \\
&= P\{X \le z\}P\{Y \le z\} \\
&= F_X(z)F_Y(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_N(z) = P\{N \le z\} &= 1 - P\{\min(X, Y) > z\} \\
&= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\
&= 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\
&= 1 - (1 - P\{X \le z\})(1 - P\{Y \le z\}) \\
&= 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))
\end{aligned}
$$

更一般地，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量序列，分布函数分别记为 $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x)\cdots, F_{X_n}(x)$，记

$$M = \max\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right), N = \min\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$$

则

更一般地，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量序列，分布函数分别记为 $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x)\cdots, F_{X_n}(x)$，记

$$M = \max\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right), N = \min\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$$

则

$$F_M(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

更一般地，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量序列，分布函数分别记为 $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x)\cdots, F_{X_n}(x)$，记

$$M=\max\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right), N=\min\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$$

则

$$F_M(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$
$$F_N(z)=1-(1-F_{X_1}(z))(1-F_{X_2}(z))\cdots(1-F_{X_n}(z))$$

更一般地，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量序列，分布函数分别记为 $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x)\cdots, F_{X_n}(x)$，记

$$M = \max\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right), N = \min\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$$

则

$$F_M(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$
$$F_N(z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z))(1 - F_{X_2}(z))\cdots(1 - F_{X_n}(z))$$

当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，分布函数为 $F(x)$ 时，有

更一般地，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量序列，分布函数分别记为 $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x)\cdots, F_{X_n}(x)$，记

$$M = \max\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right), N = \min\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$$

则

$$F_M(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$
$$F_N(z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z))(1 - F_{X_2}(z))\cdots(1 - F_{X_n}(z))$$

当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，分布函数为 $F(x)$ 时，有

$$F_M(z) = (F(z))^n$$

更一般地，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量序列，分布函数分别记为 $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x)\cdots, F_{X_n}(x)$，记

$$M = \max\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right), N = \min\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$$

则

$$F_M(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$
$$F_N(z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z))(1 - F_{X_2}(z))\cdots(1 - F_{X_n}(z))$$

当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，分布函数为 $F(x)$ 时，有

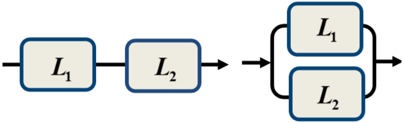
$$F_M(z) = (F(z))^n$$
$$F_N(z) = 1 - (1 - F(z))^n$$

例 7

设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成，设 L_1, L_2 的寿命分别为随机变量 X, Y，概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$，求系统 L 在串联、并联两种情况下的寿命 Z_1 和 Z_2 的概率密度.



串联　　　　并联

解：依题意，串联情况的寿命 $Z_1 = \min(X, Y)$**，并联情况的寿命** $Z_2 = \max(X, Y)$.

解：依题意，串联情况的寿命 $Z_1 = \min(X, Y)$**，并联情况的寿命** $Z_2 = \max(X, Y)$.

X, Y **的分布函数为**

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}, F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

解：依题意，串联情况的寿命 $Z_1 = \min(X, Y)$，并联情况的寿命 $Z_2 = \max(X, Y)$.

X, Y 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}, F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

Z_1 的分布函数为

$$F_{Z_1}(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

解：依题意，串联情况的寿命 $Z_1 = \min(X, Y)$，并联情况的寿命 $Z_2 = \max(X, Y)$.

X, Y 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}, F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

Z_1 的分布函数为

$$F_{Z_1}(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

Z_1 的概率密度为

$$f_{Z_1}(z) = F'_{Z_1}(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

解：依题意，串联情况的寿命 $Z_1 = \min(X, Y)$，并联情况的寿命 $Z_2 = \max(X, Y)$.

X, Y 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}, F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

Z_2 的分布函数为

$$F_{Z_2}(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\alpha z}\right)\left(1 - e^{-\beta z}\right), & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

解：依题意，串联情况的寿命 $Z_1 = \min(X, Y)$，并联情况的寿命 $Z_2 = \max(X, Y)$.

X, Y 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}, F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

Z_2 的分布函数为

$$F_{Z_2}(z) = F_X(z) F_Y(z) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\alpha z}\right)\left(1 - e^{-\beta z}\right), & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

Z_2 的概率密度为

$$f_{Z_2}(z) = F'_{Z_2}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta) e^{-(\alpha+\beta) z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 8

设 X, Y 相互独立，均服从 $N(0, \sigma^2)$，求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率密度.

例 8

设 X, Y 相互独立，均服从 $N(0,\sigma^2)$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度.

解：由题意可知 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

例 8

设 X, Y 相互独立，均服从 $N(0, \sigma^2)$，求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率密度.

解：由题意可知 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\left\{\sqrt{X^2 + Y^2} \le z\right\} = \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le z} f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$F_Z(z) = \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$

$$F_Z(z) = \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z) = 0$

当 $z > 0$ 时，$F_Z(z) = \int_0^z \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}r = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}r=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}r=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

一个离散型和一个连续型随机变量的函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布

设 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

Y 为连续型随机变量，求随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 的步骤为：

一个离散型和一个连续型随机变量的函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布

设 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

Y 为连续型随机变量，求随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 的步骤为：

(1) 写出分布函数的定义

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\}$$

一个离散型和一个连续型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布

设 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

Y 为连续型随机变量，求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 的步骤为：

(1) 写出分布函数的定义

$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{g(X,Y)\leq z\}$$

(2) 针对离散型随机变量，利用全概率公式，得到分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{g(X,Y)\leq z\}\\&=\sum_i P\{X=x_i\}P\{g(X,Y)\leq z|X=x_i\}\\&=\sum_i P\{X=x_i\}P\{g(x_i,Y)\leq z\}\end{aligned}$$

例 9

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的分布率为

$$P\{X=i\}=\frac{1}{3}, i=-1,0,1.$$

Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

例 9

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的分布率为

$$P\{X=i\}=\frac{1}{3},\ i=-1,0,1.$$

Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解：先求随机变量 Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

运用全概率公式计算概率

$$
\begin{aligned}
P\{X+Y\le z\} = & P\{X=-1\}P\{X+Y\le z|X=-1\} \\
& + P\{X=0\}P\{X+Y\le z|X=0\} \\
& + P\{X=1\}P\{X+Y\le z|X=1\}
\end{aligned}
$$

运用全概率公式计算概率

$$\begin{aligned}P\{X+Y\le z\} =&P\{X=-1\}P\{X+Y\le z|X=-1\}\\&+P\{X=0\}P\{X+Y\le z|X=0\}\\&+P\{X=1\}P\{X+Y\le z|X=1\}\end{aligned}$$

因此 Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=\frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z-1\}\\&=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)]\end{aligned}$$

运用全概率公式计算概率

$$
\begin{aligned}
P\{X+Y\le z\} = & P\{X=-1\}P\{X+Y\le z|X=-1\} \\
& + P\{X=0\}P\{X+Y\le z|X=0\} \\
& + P\{X=1\}P\{X+Y\le z|X=1\}
\end{aligned}
$$

因此 Z 的分布函数为

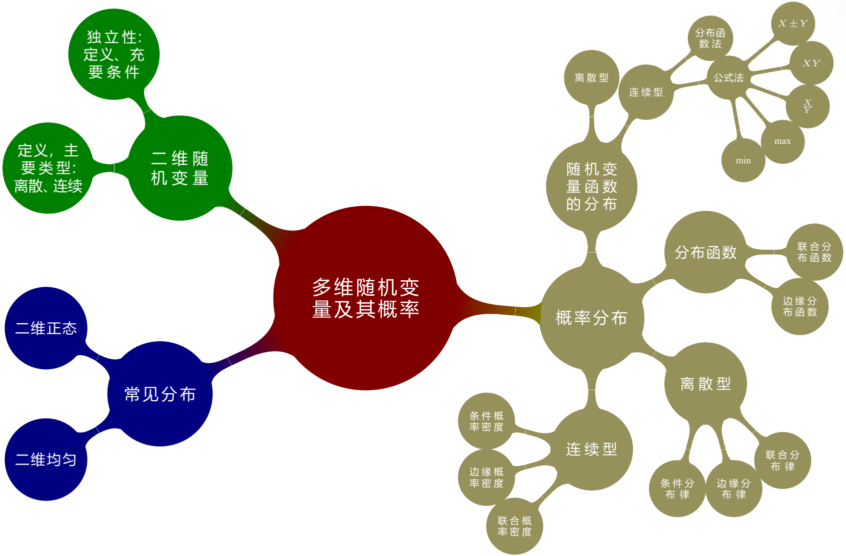
$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \frac{1}{3}P\{Y\le z+1\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z\}+\frac{1}{3}P\{Y\le z-1\} \\
&= \frac{1}{3}\left[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)\right]
\end{aligned}
$$

所以 Z 的概率密度为

$$
f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le z<2, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}
$$

多维随机变量及其分布习题

知识点总结



多维随机变量及其概率
二维随机变量
独立性：定义、充要条件
定义，主要类型：离散、连续
常见分布
二维正态
二维均匀
概率分布
随机变量函数的分布
离散型
连续型
分布函数法
公式法
$X\pm Y$
XY
$\frac{X}{Y}$
max
min
分布函数
联合分布函数
边缘分布函数
离散型
联合分布律
边缘分布律
条件分布律
连续型
条件概率密度
边缘概率密度
联合概率密度

例 1

设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = A(B + \arctan x)(C + \arctan y)$$

则 $A = \underline{\qquad}$, $B = \underline{\qquad}$, $C = \underline{\qquad}$.

例 1

设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = A(B + \arctan x)(C + \arctan y)$$

则 $A =$ ____，$B =$ ____，$C =$ ____.

解：由分布函数的性质有

$$F(+\infty, +\infty) = A\left(B + \frac{\pi}{2}\right)\left(C + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$F(-\infty, y) = A\left(B - \frac{\pi}{2}\right)(C + \arctan y) = 0$$

$$F(x, -\infty) = A\,(B + \arctan x)\left(C - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

例 1

设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = A(B + \arctan x)(C + \arctan y)$$

则 $A = $ ____, $B = $ ____, $C = $ ____.

解：由分布函数的性质有

$$F(+\infty, +\infty) = A\left(B + \frac{\pi}{2}\right)\left(C + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$F(-\infty, y) = A\left(B - \frac{\pi}{2}\right)(C + \arctan y) = 0$$

$$F(x, -\infty) = A(B + \arctan x)\left(C - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

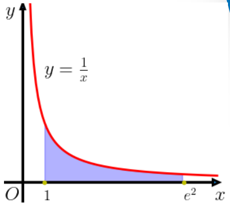
解得 $A = \frac{1}{\pi^2}, B = C = \frac{\pi}{2}.$

例 2

设二维随机变量 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，其中 D 是由 $y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=e^2$ 围成的区域. 则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为 ____.

例 2

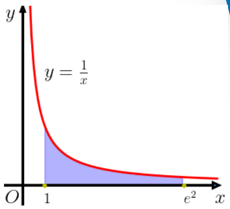
设二维随机变量 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，其中 D 是由 $y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=e^2$ 围成的区域．则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为 ____．



例 2

设二维随机变量 (X,Y) **在** D **上服从均匀分布，其中** D **是由** $y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=e^2$ **围成的区域. 则** (X,Y) **关于** X **的边缘概率密度在** $x=2$ **处的值为** ____.

解 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln e^2=2$，故 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$



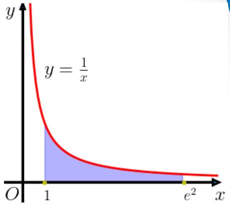
例 2

设二维随机变量 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，其中 D 是由 $y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=e^2$ 围成的区域. 则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为 ____.

解 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln e^2=2$，故 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$

因此 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y, & 1<x<e^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1<x<e^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



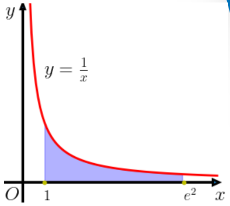
例 2

设二维随机变量 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，其中 D 是由 $y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=e^2$ 围成的区域. 则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为 ____.

解 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln e^2=2$，故 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$

因此 $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y, & 1<x<e^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1<x<e^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



因此 $f_X(2)=\frac{1}{4}$.

例 3

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X < Y\} =$ ______.

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{2}{5}$　　(D) $\frac{4}{5}$

例 3

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$ ______.

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{2}{5}$　　(D) $\dfrac{4}{5}$

解：由题意可知 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-x-4y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

例 3

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$ ______.

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

解：由题意可知 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-x-4y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$P\{X<Y\}=\iint_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}4e^{-x-4y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-5x}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$$

例 3

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$ __A__.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

解：由题意可知 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-x-4y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$P\{X<Y\}=\iint_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}4e^{-x-4y}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{+\infty}e^{-5x}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$$

例 4

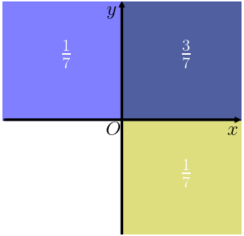
设随机变量 X 与 Y 满足 $P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}$，$P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7}$，则 $P\{\max(X, Y) \geq 0\} =$ ______.

(A) $\frac{16}{49}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{40}{49}$

例 4

设随机变量 X 与 Y 满足 $P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}$，$P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7}$，则 $P\{\max(X, Y) \geq 0\} = $ ______.

(A) $\dfrac{16}{49}$　　(B) $\dfrac{5}{7}$　　(C) $\dfrac{3}{7}$　　(D) $\dfrac{40}{49}$



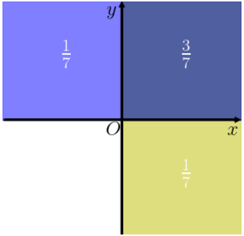
例 4

设随机变量 X 与 Y 满足 $P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}$，$P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7}$，则 $P\{\max(X,Y) \geq 0\} =$ ______.

(A) $\frac{16}{49}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{40}{49}$

解：由题意可知

$$\begin{aligned} P\{\max(X,Y) \geq 0\} &= 1 - P\{\max(X,Y) < 0\} \\ &= 1 - P\{X < 0, Y < 0\} \\ &= 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$



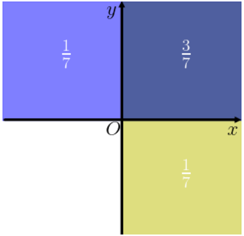
例 4

设随机变量 X 与 Y 满足 $P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}$，$P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7}$，则 $P\{\max(X, Y) \geq 0\} = \underline{\quad B \quad}$.

(A) $\dfrac{16}{49}$　(B) $\dfrac{5}{7}$　(C) $\dfrac{3}{7}$　(D) $\dfrac{40}{49}$

解：由题意可知

$$\begin{aligned} P\{\max(X, Y) \geq 0\} &= 1 - P\{\max(X, Y) < 0\} \\ &= 1 - P\{X < 0, Y < 0\} \\ &= 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$



例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$	1

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$	
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$	1

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$	1

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$	1

例 5

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了 (X, Y) 的联合分布律及边缘分布律中的部分数值，请将其余数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

例 6

已知随机变量 X_1 与 X_2 的分布律如下

X_1	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X_2	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且 $P\{X_1X_2=0\}=1$，求（1）(X_1,X_2) 的联合分布律；（2）X_1 与 X_2 是否独立.

例 6

已知随机变量 X_1 与 X_2 的分布律如下

X_1	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

X_2	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且 $P\{X_1X_2=0\}=1$，求（1）(X_1,X_2) 的联合分布律；（2）X_1 与 X_2 是否独立.

解：由 $P\{X_1X_2=0\}=1$ 可知 $P\{X_1X_2\neq 0\}=0$ 即

$$P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0$$

所以联合分布律与边缘分布律写在同一表格中有

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0				$\frac{1}{2}$
1	0		0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0		0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0		0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

于是得到 (X_1, X_2) 的联合分布律.

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

于是得到 (X_1, X_2) 的联合分布律.

(2) 由于

$$0 = P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} \neq P\{X_1 = -1\}P\{X_2 = 1\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

故 X_1 与 X_2 不独立.

例 7

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<1, 0<y<2x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求:(1)常数 A;(2)边缘概率密度 $f_Y(y)$ 及条件概率密度 $f_{X|Y}(x,y)$;(3)概率 $P\{X+Y<1\}$;(4) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

例 7

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<1, 0<y<2x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求:(1)常数 A;(2)边缘概率密度 $f_Y(y)$ 及条件概率密度 $f_{X|Y}(x,y)$;(3)概率 $P\{X+Y<1\}$;(4) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

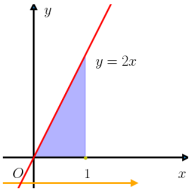
解:(1)由概率密度性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ 有

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{2x} A\mathrm{d}y=1, \quad \text{故} A=1.$$

(2) (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

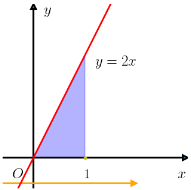
Y 的边缘概率密度为



(2) (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度为

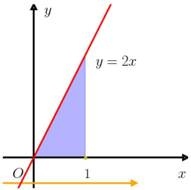


$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=$$

(2) (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

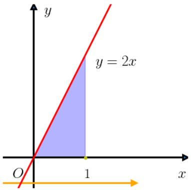
Y 的边缘概率密度为



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}1\mathrm{d}x, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}1\mathrm{d}x, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

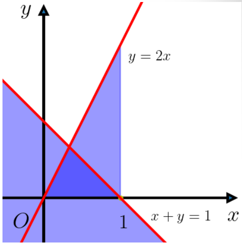
当 $0<y<2$ 时，在 $Y=y$ 的条件下，随机变量 X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2}{2-y}, & \frac{y}{2}<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3)

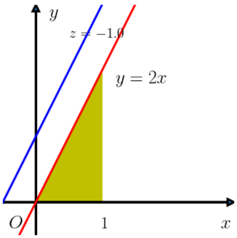
$$P\{X+Y<1\}=\iint_{x+y<1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{1-y}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$



(4) 设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，由定义有

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{2X - Y \leq z\}$$
$$= \iint_{2x-y\leq z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当 $z \leq 0$ 时，$F_Z(z) = 0$;

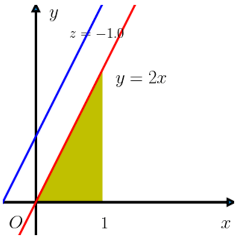
当 $z \geq 2$ 时，$F_Z(z) = 1$;

当 $0 < z < 2$ 时，

$$F_Z(z) = S_D = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2}\right)2\left(1 - \frac{z}{2}\right) = z - \frac{1}{4}z^2.$$

(4) 设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，由定义有

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{2X - Y \le z\}$$
$$= \iint_{2x-y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z) = 0$;

当 $z \ge 2$ 时，$F_Z(z) = 1$;

当 $0 < z < 2$ 时，

$$F_Z(z) = S_D = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2}\right)2\left(1 - \frac{z}{2}\right) = z - \frac{1}{4}z^2.$$

故 $Z = 2X - Y$ 概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 8

设二维随机变量 X 与 Y 独立同分布，其分布律为

X	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

求：$U=\max(X,Y), V=\min(X,Y), W=XY$ 的分布律.

例 8

设二维随机变量 X 与 Y 独立同分布，其分布律为

X	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

求：$U = \max(X, Y), V = \min(X, Y), W = XY$ 的分布律.

例 8

设二维随机变量 X 与 Y 独立同分布，其分布律为

X	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

求： $U=\max(X,Y), V=\min(X,Y), W=XY$ **的分布律.**

解： U,V,W **的所有可能取值均为** $0,1$ **其中**

$$P\{U=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$P\{V=1\}=P\{\min(X,Y)=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P\{W=1\}=P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

例 8

设二维随机变量 X 与 Y 独立同分布，其分布律为

X	0	1
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

求：$U=\max(X,Y), V=\min(X,Y), W=XY$ 的分布律.

$U=\max(X,Y), V=\min(X,Y), W=XY$ **的分布律分别为**

U	0	1
p_k	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$

V	0	1
p_k	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

W	0	1
p_k	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

例 9

设某商品一周的需求量 X 是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

并设各周的需求量是独立同分布的，求（1）两周需求量的概率密度函数；（2）三周需求量的概率密度函数.

例 9

设某商品一周的需求量 X 是一个随机变量，其概率密度为

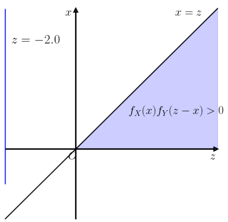
$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

并设各周的需求量是独立同分布的，求（1）两周需求量的概率密度函数；（2）三周需求量的概率密度函数.

解：（1）设随机变量 Y 也表示一周的需求量，Z 表示两周的需求量，则有 $Z=X+Y$.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

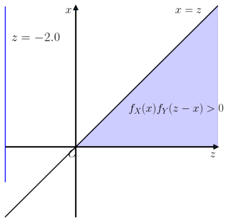
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$



$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

当 $z \leq 0$ 时，对于任意的 x 均有

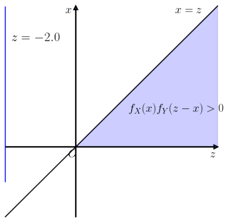
$f_X(x)f_Y(z-x) = 0$ 此时 $f_Z(z) = 0$；



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

当 $z\le 0$ 时，对于任意的 x 均有 $f_X(x)f_Y(z-x)=0$ 此时 $f_Z(z)=0$；
当 $z>0$ 时，

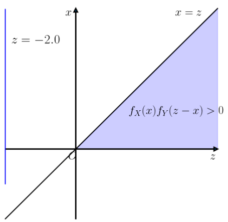
$$f_Z(z)=\int_0^z xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}z^3e^{-z}$$



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

当 $z \le 0$ 时，对于任意的 x 均有
$f_X(x)f_Y(z-x)=0$ 此时 $f_Z(z)=0$；
当 $z>0$ 时，

$$f_Z(z)=\int_0^z xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}z^3e^{-z}$$



故两周的需求量的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{6}z^3e^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(2) 设该商品的三周需求量为 W，则 $W=Z+X$，Z 和 X 的概率密度分别为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{6}z^3e^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

(2) 设该商品的三周需求量为 W，则 $W=Z+X$，Z 和 X 的概率密度分别为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{6}z^3e^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

W 的概率密度为

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,w-z)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z)f_X(w-z)\mathrm{d}z$$

(2) 设该商品的三周需求量为 W，则 $W=Z+X$，Z 和 X 的概率密度分别为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{6}z^3e^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

W 的概率密度为

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z,w-z)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(z)f_X(w-z)\mathrm{d}z$$

当 $w\le 0$ 时，$f_W(w)=0$;

(2) 设该商品的三周需求量为 W，则 $W=Z+X$，Z 和 X 的概率密度分别为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{6}z^3e^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

W 的概率密度为

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z,w-z)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(z)f_X(w-z)\mathrm{d}z$$

当 $w\le 0$ 时，$f_W(w)=0$;
当 $w>0$ 时，$f_W(w)=\int_0^w\frac{1}{6}z^3e^{-z}(w-z)e^{-(w-z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{120}w^5e^{-w}$

(2) 设该商品的三周需求量为 W，则 $W=Z+X$，Z 和 X 的概率密度分别为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{6}z^3e^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

W 的概率密度为

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z,w-z)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Z(z)f_X(w-z)\mathrm{d}z$$

当 $w\le 0$ 时，$f_W(w)=0$;
当 $w>0$ 时，$f_W(w)=\int_0^w\frac{1}{6}z^3e^{-z}(w-z)e^{-(w-z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{120}w^5e^{-w}$

即 $f_W(w)=\begin{cases}\frac{1}{120}w^5e^{-w}, & w>0,\\ 0, & w\le 0.\end{cases}$

概率论与数理统计

概率论与数理统计教研团队[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

2024 年　春

大工至善
大学至真

哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY