概率论与数理统计

概率论与数理统计教研团队[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

2024 年　春

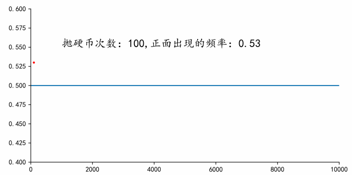
大工至善
大学至真

哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

目　录

大数定律

频率的稳定值是概率，这种稳定性呈现在大量的、独立的重复试验中，历史上把这个试验次数很大时出现的规律称作大数定律.



可以用 0-1 分布概率模型刻画独立重复试验. 将事件 A 发生概率为 p 的试验独立重复 n 次，记 Y_n 为事件 A 发生的次数，

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

其中 $Y_n \sim b(n,p), X_i \sim b(1,p), i = 1, 2, \cdots, n$. 事件 A 发生的频率为 $\frac{1}{n}Y_n$，当 $n \to \infty$ 时以概率 p 为极限.

依概率收敛的定义

依概率收敛的定义

定义 1

设 $\{X_n\}$ 为随机变量序列，X 为随机变量，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$$

称随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 X，记作 $X_n \xrightarrow{P} X$.

依概率收敛的定义

定义 1
设 $\{X_n\}$ 为随机变量序列，X 为随机变量，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$$

称随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 X，记作 $X_n \xrightarrow{P} X$.

注：
依概率收敛的含义是：绝对偏差 $|X_n - X|$ 小于任一给定量的可能性将随着 n 增大愈来愈接近于 1，特别当 X 是退化随机变量时，即 $P\{X = a\} = 1$，a 为常数，则称序列依概率收敛于 a，即 $X_n \xrightarrow{P} a$.

依概率收敛的性质

定理 2

设 $X_n, Y_n (n \geq 1)$ 为随机变量序列，a, b 是两个常数，如果 $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$，则有

(1) $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$;

依概率收敛的性质

定理 2

设 $X_n, Y_n (n \geq 1)$ **为随机变量序列，** a, b **是两个常数，如果** $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$**，则有**

(1) $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$;

(2) $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$;

依概率收敛的性质

定理 2

设 $X_n, Y_n (n \geq 1)$ **为随机变量序列，** a, b **是两个常数，如果** $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$**，则有**

(1) $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$;

(2) $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$;

(3) $\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \dfrac{a}{b} (b \neq 0)$;

定理 2

设 $X_n, Y_n (n \geq 1)$ **为随机变量序列，** a, b **是两个常数，如果** $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$**，则有**

(1) $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$;

(2) $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$;

(3) $\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \dfrac{a}{b} (b \neq 0)$;

(4) **若函数** $g(x)$ **在** $x = a$ **处连续，** $g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$;

依概率收敛的性质

定理 2

设 $X_n, Y_n (n \geq 1)$ 为随机变量序列，a, b 是两个常数，如果 $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$，则有

(1) $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$;

(2) $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$;

(3) $\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \dfrac{a}{b} (b \neq 0)$;

(4) 若函数 $g(x)$ 在 $x = a$ 处连续，$g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$;

(5) 若函数 $g(x, y)$ 在 (a, b) 处连续，$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b)$.

切比雪夫不等式

切比雪夫不等式

定理 3

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$ 及方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意的正数 ε，有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\quad \text{或} \quad P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

切比雪夫不等式

定理 3
设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$ 及方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意的正数 ε，有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\quad\text{或}\quad P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明：仅证明连续型随机变量情况，离散型随机变量情况类似.
设随机变量的概率密度为 $f(x)$，则

切比雪夫不等式

定理 3

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$ 及方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意的正数 ε，有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\quad \text{或}\quad P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明：仅证明连续型随机变量情况，离散型随机变量情况类似.

设随机变量的概率密度为 $f(x)$，则

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}$$

切比雪夫不等式

定理 3
设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$ 及方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意的正数 ε，有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\quad \text{或} \quad P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明：仅证明连续型随机变量情况，离散型随机变量情况类似.
设随机变量的概率密度为 $f(x)$，则

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

切比雪夫不等式

定理 3

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$ 及方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意的正数 ε，有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\quad \text{或} \quad P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明：仅证明连续型随机变量情况，离散型随机变量情况类似.
设随机变量的概率密度为 $f(x)$，则

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)\mathrm{d}x$$

切比雪夫不等式

定理 3
设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$ 及方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意的正数 ε，有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\quad\text{或}\quad P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明：仅证明连续型随机变量情况，离散型随机变量情况类似.
设随机变量的概率密度为 $f(x)$，则

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int\limits_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x\leq\int\limits_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x$$

切比雪夫不等式

定理 3
设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$ 及方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意的正数 ε，有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\quad \text{或} \quad P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明：仅证明连续型随机变量情况，离散型随机变量情况类似.
设随机变量的概率密度为 $f(x)$，则

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

不等式给出了 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}$ 的上界，或 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$ 的下界，该上界或者下界只与其方差 $D(X)$ 和 ε 有关，并不涉及随机变量 X 的概率分布，因此在理论与实际中都有相当广泛的应用. 需要注意的是，在具体的问题中，由切比雪夫不等式给出的概率上界或者下界通常比较保守，例如

不等式给出了 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}$ 的上界，或 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$ 的下界，该上界或者下界只与其方差 $D(X)$ 和 ε 有关，并不涉及随机变量 X 的概率分布，因此在理论与实际中都有相当广泛的应用. 需要注意的是，在具体的问题中，由切比雪夫不等式给出的概率上界或者下界通常比较保守，例如

设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，取 $\varepsilon=3\sigma$，则

$$
\begin{aligned}
P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\} &= 1-P\{|X-\mu|<\varepsilon\} \\
&= 1-P\left\{-\frac{\varepsilon}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{\varepsilon}{\sigma}\right\} \\
&= 1-\Phi(3)+\Phi(-3)=0.0026
\end{aligned}
$$

不等式给出了 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}$ 的上界，或 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$ 的下界，该上界或者下界只与其方差 $D(X)$ 和 ε 有关，并不涉及随机变量 X 的概率分布，因此在理论与实际中都有相当广泛的应用. 需要注意的是，在具体的问题中，由切比雪夫不等式给出的概率上界或者下界通常比较保守，例如

设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，取 $\varepsilon=3\sigma$，则

$$
\begin{aligned}
P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\} &= 1-P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\\
&= 1-P\left\{-\frac{\varepsilon}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{\varepsilon}{\sigma}\right\}\\
&= 1-\Phi(3)+\Phi(-3)=0.0026
\end{aligned}
$$

使用切比雪夫不等式估计有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}=0.1111$$

例 1

设 $\{X_n\}$ **是独立同分布的随机变量序列，且数学期望和方差分别为** $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2, i=1,2,\cdots,$ **令**

$$Z_n=\frac{2(X_1+2X_2+\cdots+nX_n)}{n(n+1)}$$

求证： $Z_n \xrightarrow{P} \mu(n\to\infty)$

例 1

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且数学期望和方差分别为 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2, i=1,2,\cdots$，令

$$Z_n=\frac{2(X_1+2X_2+\cdots+nX_n)}{n(n+1)}$$

求证：$Z_n \xrightarrow{P} \mu(n\to\infty)$

证明：首先计算 Z_n 的期望和方差.

$$E(Z_n)=\frac{2(E(X_1)+2E(X_2)+\cdots+nE(X_n))}{n(n+1)}$$
$$=\frac{2\mu(1+2+\cdots+n)}{n(n+1)}=\mu$$

$$
\begin{aligned}
D(Z_n) &= D\left(\frac{2(X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n)}{n(n+1)}\right) \\
&= \frac{4(1^2 D(X_1) + 2^2 D(X_2) + \cdots + n^2 D(X_n))}{n^2(n+1)^2} \\
&= \frac{4\sigma^2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(Z_n) &= D\left(\frac{2(X_1+2X_2+\cdots+nX_n)}{n(n+1)}\right) \\
&= \frac{4(1^2D(X_1)+2^2D(X_2)+\cdots+n^2D(X_n))}{n^2(n+1)^2} \\
&= \frac{4\sigma^2(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}\sigma^2
\end{aligned}
$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$**，利用切比雪夫不等式有**

$$
P\{|Z_n - E(Z_n)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(Z_n)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)\varepsilon^2}
$$

$$D(Z_n) = D\left(\frac{2(X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n)}{n(n+1)}\right)$$

$$= \frac{4(1^2D(X_1) + 2^2D(X_2) + \cdots + n^2D(X_n))}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{4\sigma^2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}\sigma^2$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$，利用切比雪夫不等式有

$$P\{|Z_n - E(Z_n)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(Z_n)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)\varepsilon^2}$$

于是当 $n \to \infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Z_n - E(Z_n)| < \varepsilon\} = 1$$

故 $Z_n \xrightarrow{P} \mu(n \to \infty)$.

大数定律的定义

定义 4

设 $\{X_n\}$ 为随机变量序列，令 $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$$

则称随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

大数定律的定义

定义 4

设 $\{X_n\}$ 为随机变量序列，令 $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$$

则称随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

思考：随机变量序列在什么条件下服从大数定律?

大数定律的定义

定义 4

设 $\{X_n\}$ 为随机变量序列，令 $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$$

则称随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

思考：随机变量序列在什么条件下服从大数定律?

下面给出三个大数定律，它们之间的差别表现在条件上的不同.

切比雪夫（Chebyshev）大数定律

定理 5
设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，若方差有共同的上界，即 $D(X_i) \le c(i=1,2,\cdots)$，$c$ 为常数，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$，其中 $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

切比雪夫（Chebyshev）大数定律

定理 5
设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，若方差有共同的上界，即 $D(X_i) \le c(i = 1, 2, \cdots)$，$c$ 为常数，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$，其中 $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$。

证明：因 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，故

切比雪夫（Chebyshev）大数定律

定理 5

设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，若方差有共同的上界，即 $D(X_i) \leq c(i=1,2,\cdots)$，$c$ 为常数，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$，其中 $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

证明：因 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，故

$$D(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} c = \frac{c}{n}$$

切比雪夫（Chebyshev）大数定律

定理 5
设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，若方差有共同的上界，即 $D(X_i) \le c(i=1,2,\cdots)$，$c$ 为常数，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$，其中 $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

证明：因 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，故

$$D(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} c = \frac{c}{n}$$

故 $D(Y_n)$ 存在，从而 $E(Y_n)$ 也存在，利用切比雪夫不等式，对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

切比雪夫（Chebyshev）大数定律

定理 5

设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，若方差有共同的上界，即 $D(X_i) \le c(i=1,2,\cdots)$，$c$ 为常数，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$，其中 $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

证明：因 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，故

$$D(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} c = \frac{c}{n}$$

故 $D(Y_n)$ 存在，从而 $E(Y_n)$ 也存在，利用切比雪夫不等式，对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}$$

切比雪夫（Chebyshev）大数定律

定理 5

设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，若方差有共同的上界，即 $D(X_i) \le c(i=1,2,\cdots)$，$c$ 为常数，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$，其中 $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

证明：因 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，故

$$D(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} c = \frac{c}{n}$$

故 $D(Y_n)$ 存在，从而 $E(Y_n)$ 也存在，利用切比雪夫不等式，对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} = 1$，即随机变量序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

伯努利 (Bernoulli) 大数定律

定理 6

设 n 重伯努利试验中，事件 A 发生的概率为 p，m 为事件 A 发生的次数，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$.

伯努利 (Bernoulli) 大数定律

定理 6
设 n 重伯努利试验中，事件 A 发生的概率为 p，m 为事件 A 发生的次数，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$.

证明：设随机变量 $X_i = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生}, \\ 0, & A \text{ 不发生}, \end{cases}, i = 1, 2, \cdots, n.$

伯努利 (Bernoulli) 大数定律

定理 6
设 n 重伯努利试验中，事件 A 发生的概率为 p，m 为事件 A 发生的次数，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

证明：设随机变量 $X_i = \begin{cases} 1, & A\text{ 发生}, \\ 0, & A\text{ 不发生}, \end{cases}, i = 1, 2, \cdots, n.$

因此事件 A 发生的次数 $m = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，从而 $\frac{m}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i.$

伯努利 (Bernoulli) 大数定律

定理 6

设 n 重伯努利试验中，事件 A 发生的概率为 p，m 为事件 A 发生的次数，则对于任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$

证明：设随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}, i=1,2,\cdots,n.$

因此事件 A 发生的次数 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，从而 $\frac{m}{n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i.$

由切比雪夫大数定律可知

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right|<\varepsilon\right\}=\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

辛钦 (Khinchin) 大数定律

定理 7

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，若数学期望 $E(X_i) = \mu(i = 1, 2, \cdots)$ 存在，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - \mu| < \varepsilon\} = 1$，其中 $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

辛钦 (Khinchin) 大数定律

定理 7
设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，若数学期望 $E(X_i)=\mu(i=1,2,\cdots)$ 存在，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-\mu|<\varepsilon\}=1，\text{其中 } Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

证明：略

辛钦 (Khinchin) 大数定律

定理 7

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，若数学期望 $E(X_i)=\mu(i=1,2,\cdots)$ 存在，则 $\{X_n\}$ 服从大数定律，即对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n-\mu|<\varepsilon\}=1，\text{其中 } Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

证明：略

注：由辛钦大数定律容易得出，如果 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E\left(X_i^k\right)=\mu_k(i=1,2,\cdots)$ 存在，其中 k 为正整数，则随机变量序列 $\{X_n^k\}$ 也服从大数定律，即

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k-\mu_k\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

三个大数定律在条件上的区别与联系

三个大数定律在条件上的区别与联系

（1）切比雪夫大数定律条件：随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立，方差有界；

三个大数定律在条件上的区别与联系

(1) **切比雪夫大数定律条件：随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立，方差有界；**

(2) **辛钦大数定律条件：随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，期望存在；**

三个大数定律在条件上的区别与联系

(1) **切比雪夫大数定律条件：随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立，方差有界；**

(2) **辛钦大数定律条件：随机变量序列 $\{X_n\}$ 独立同分布，期望存在；**

(3) **伯努利大数定律是切比雪夫大数定律的特例，也是辛钦大数定律的特例.**

例 2

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，且与 X 同分布，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^5$ 依概率收敛的极限.

例 2

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，且与 X 同分布，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^5$ 依概率收敛的极限.

解：因为 $\{X_n\}$ 独立同分布，则由辛钦大数定律有，

例 2

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，且与 X 同分布，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^5$ 依概率收敛的极限.

解：因为 $\{X_n\}$ 独立同分布，则由辛钦大数定律有，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^5 \xrightarrow{P} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^5\right)=E(X^5)(n\to\infty)$$

例 2

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，且与 X 同分布，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^5$ 依概率收敛的极限.

解：因为 $\{X_n\}$ 独立同分布，则由辛钦大数定律有，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^5 \xrightarrow{P} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^5\right)=E(X^5)(n\to\infty)$$

而 $E(X^5)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x^6\mathrm{d}x=\frac{2}{7}$，

例 2

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立，且与 X 同分布，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^5$ 依概率收敛的极限.

解：因为 $\{X_n\}$ 独立同分布，则由辛钦大数定律有，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^5 \xrightarrow{P} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^5\right)=E(X^5)(n\to\infty)$$

而 $E(X^5)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^5f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x^6\mathrm{d}x=\frac{2}{7}$，故 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^5\xrightarrow{P}\frac{2}{7}$.

中心极限定理

许多微小的偶然因素共同作用的结果必定服从正态分布. 设 X_i 表示第 i 个偶然因素，n 个偶然因素的共同作用就是它们的和 $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，当 $n \to \infty$ 时，在什么条件下这个和的分布以正态分布为极限.

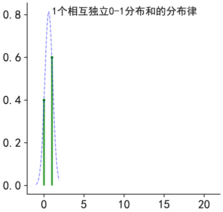


图: 相互独立的 $0-1$ 分布的和

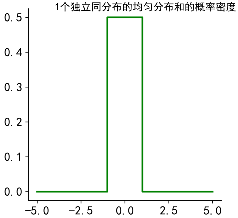


图: 相互独立的 $U(-1,1)$ 的和

定义 8

设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，且期望和方差 $E(X_i), D(X_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots)$ 均有限，记

$$Y_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}}$$

如果 Y_n 的分布函数 $F_n(x)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t, -\infty < x < +\infty.$$

则称 $\{X_n\}$ 满足中心极限定理.

历史上，关于中心极限定理的第一个结果是由法国数学家棣莫弗 (Abraham de Moivre) 针对 0-1 分布 $p = \frac{1}{2}$ 情况证明的，在此后的 200 年当中，有关独立随机变量和的极限分布的讨论，一直是概率论研究的一个中心，故称作中心极限定理.

历史上，关于中心极限定理的第一个结果是由法国数学家棣莫弗 (Abraham de Moivre) 针对 0-1 分布 $p = \frac{1}{2}$ 情况证明的，在此后的 200 年当中，有关独立随机变量和的极限分布的讨论，一直是概率论研究的一个中心，故称作中心极限定理.

由中心极限定理的定义可见，期望有限及方差有限且非零是独立随机变量和可标准化的前提，从而是中心极限定理成立的必要条件. 以下讨论中心极限定理成立的充分条件.

林德伯格-列维中心极限定理 (独立同分布中心极限定理)

定理 9

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且数学期望和方差分别为 $E(X_i)=\mu, 0<D(X_i)=\sigma^2<+\infty(i=1,2,\cdots)$，则 $\{X_n\}$ 满足中心极限定理，即，若记 $Y_n=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$，则 Y_n 的分布函数 $F_n(x)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,-\infty<x<+\infty.$$

例 1

在数值计算中，需要将实数转换为计算机使用的浮点数再进行计算，转换过程中将会产生舍入误差，误差记为 X，设 X 服从区间 $(-0.5\times 10^{-k}, 0.5\times 10^{-k})$ 上的均匀分布，其中 k 为非负整数，取值与计算机硬件有关.

(1) 若将 1500 个数相加，求误差总和的绝对值超过 15×10^{-k} 的概率；

(2) 最多多少个数相加可使得误差总和的绝对值小于 10×10^{-k} 的概率不小于 0.9.

例 1

在数值计算中，需要将实数转换为计算机使用的浮点数再进行计算，转换过程中将会产生舍入误差，误差记为 X，设 X 服从区间 $(-0.5\times 10^{-k}, 0.5\times 10^{-k})$ 上的均匀分布，其中 k 为非负整数，取值与计算机硬件有关.

(1) 若将 1500 个数相加，求误差总和的绝对值超过 15×10^{-k} 的概率；

(2) 最多多少个数相加可使得误差总和的绝对值小于 10×10^{-k} 的概率不小于 0.9.

解：设 $X_i(i=1,2,\cdots)$ 表示第 i 个数的舍入误差，由题意可知 $\{X_i\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $X_i \sim U(-0.5\times 10^{-k}, 0.5\times 10^{-k})$，并且有

$$E(X_i)=0, D(X_i)=\frac{10^{-2k}}{12}.$$

(1) 记 1500 个数的舍入误差和为 X，则 $X = \sum\limits_{i=1}^{1500} X_i$，由定理可知 $\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

(1) 记 1500 个数的舍入误差和为 X，则 $X=\sum\limits_{i=1}^{1500}X_i$，由定理可知 $\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

$$P\{|X|>15\times 10^{-k}\}=1-P\{|X|\le 15\times 10^{-k}\}$$

(1) 记 1500 个数的舍入误差和为 X，则 $X=\sum\limits_{i=1}^{1500} X_i$，由定理可知 $\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

$$P\{|X|>15\times 10^{-k}\}=1-P\{|X|\le 15\times 10^{-k}\}$$

$$\approx 1-P\left\{\frac{-15\times 10^{-k}}{\sqrt{1500\times\frac{10^{-2k}}{12}}}\le\frac{X}{\sqrt{1500\times\frac{10^{-2k}}{12}}}\le\frac{15\times 10^{-k}}{\sqrt{1500\times\frac{10^{-2k}}{12}}}\right\}$$

(1) 记 1500 个数的舍入误差和为 X，则 $X=\sum_{i=1}^{1500} X_i$，由定理可知 $\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

$$
\begin{aligned}
P\{|X|>15\times 10^{-k}\} &= 1-P\{|X|\le 15\times 10^{-k}\}\\
&\approx 1-P\left\{\frac{-15\times 10^{-k}}{\sqrt{1500\times \frac{10^{-2k}}{12}}}\le \frac{X}{\sqrt{1500\times \frac{10^{-2k}}{12}}}\le \frac{15\times 10^{-k}}{\sqrt{1500\times \frac{10^{-2k}}{12}}}\right\}\\
&= 1-\left(\Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)-\Phi\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

(1) 记 1500 个数的舍入误差和为 X，则 $X=\sum_{i=1}^{1500} X_i$，由定理可知 $\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

$$
\begin{aligned}
P\{|X|>15\times 10^{-k}\} &= 1-P\{|X|\le 15\times 10^{-k}\}\\
&\approx 1-P\left\{\frac{-15\times 10^{-k}}{\sqrt{1500\times \frac{10^{-2k}}{12}}}\le \frac{X}{\sqrt{1500\times \frac{10^{-2k}}{12}}}\le \frac{15\times 10^{-k}}{\sqrt{1500\times \frac{10^{-2k}}{12}}}\right\}\\
&= 1-\left(\Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)-\Phi\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right)\\
&= 0.1802
\end{aligned}
$$

(1) 记 1500 个数的舍入误差和为 X，则 $X=\sum_{i=1}^{1500} X_i$，由定理可知 $\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

$$
\begin{aligned}
P\{|X|>15\times 10^{-k}\} &= 1-P\{|X|\le 15\times 10^{-k}\} \\
&\approx 1-P\left\{\frac{-15\times 10^{-k}}{\sqrt{1500\times\frac{10^{-2k}}{12}}}\le\frac{X}{\sqrt{1500\times\frac{10^{-2k}}{12}}}\le\frac{15\times 10^{-k}}{\sqrt{1500\times\frac{10^{-2k}}{12}}}\right\} \\
&= 1-\left(\Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)-\Phi\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right) \\
&= 0.1802
\end{aligned}
$$

即误差总和的绝对值超过 15×10^{-k} 的概率为 0.1802.

(2) 设有 n 个数相加，n 个数的舍入误差总和为 Y，则 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，由定理可知 $\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

(2) 设有 n 个数相加，n 个数的舍入误差总和为 Y，则 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，由定理可知 $\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

$$P\{|Y|<10\times 10^{-k}\}=P\{-10\times 10^{-k}<Y<10\times 10^{-k}\}$$

(2) 设有 n 个数相加，n 个数的舍入误差总和为 Y，则 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，由定理可知 $\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

$$P\{|Y|<10\times10^{-k}\}=P\{-10\times10^{-k}<Y<10\times10^{-k}\}$$
$$\approx P\left\{\frac{-10\times10^{-k}}{\sqrt{n\times\frac{10^{-2k}}{12}}}<\frac{Y}{\sqrt{n\times\frac{10^{-2k}}{12}}}<\frac{10\times10^{-k}}{\sqrt{n\times\frac{10^{-2k}}{12}}}\right\}$$

(2) 设有 n 个数相加，n 个数的舍入误差总和为 Y，则 $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$，由定理可知 $\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

$$
\begin{aligned}
P\{|Y|<10\times10^{-k}\} &= P\{-10\times10^{-k}<Y<10\times10^{-k}\} \\
&\approx P\left\{\frac{-10\times10^{-k}}{\sqrt{n\times\frac{10^{-2k}}{12}}}<\frac{Y}{\sqrt{n\times\frac{10^{-2k}}{12}}}<\frac{10\times10^{-k}}{\sqrt{n\times\frac{10^{-2k}}{12}}}\right\} \\
&= \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)-\Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)
\end{aligned}
$$

(2) 设有 n 个数相加，n 个数的舍入误差总和为 Y，则 $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，由定理可知 $\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，于是有

$$
\begin{aligned}
P\{|Y| < 10\times 10^{-k}\} &= P\{-10\times 10^{-k} < Y < 10\times 10^{-k}\} \\
&\approx P\left\{\frac{-10\times 10^{-k}}{\sqrt{n\times \frac{10^{-2k}}{12}}} < \frac{Y}{\sqrt{n\times \frac{10^{-2k}}{12}}} < \frac{10\times 10^{-k}}{\sqrt{n\times \frac{10^{-2k}}{12}}}\right\} \\
&= \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - 1
\end{aligned}
$$

若使 $P\{|Y| < 10 \times 10^{-k}\} = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - 1 \geq 0.9$，即 $\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) \geq 0.95$，

也即使

若使 $P\{|Y| < 10 \times 10^{-k}\} = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - 1 \geq 0.9$，即 $\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) \geq 0.95$，

也即使

$$\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \geq 1.645$$

若使 $P\{|Y| < 10 \times 10^{-k}\} = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - 1 \geq 0.9$，即 $\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) \geq 0.95$，

也即使

$$\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \geq 1.645$$

解得 $n \leq 443.45$，因此最多可有 443 个数相加可使得误差总和的绝对值小于 10×10^{-k} 的概率不小于 0.9.

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

定理 10

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $n, 0<p<1$ 的二项分布，即 $\eta_n \sim b(n,p)$，则对于任意的实数 x 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

定理 10
设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $n, 0<p<1$ 的二项分布，即 $\eta_n \sim b(n,p)$，则对于任意的实数 x 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

证明：将 η_n 改写为独立同分布的随机变量序列 $\{X_i\}$ 的和，即

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

定理 10
设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $n, 0<p<1$ 的二项分布，即 $\eta_n \sim b(n,p)$，则对于任意的实数 x 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

证明：将 η_n 改写为独立同分布的随机变量序列 $\{X_i\}$ 的和，即

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

其中 $X_i \sim b(1,p), E(X_i)=p, D(X_i)=p(1-p)(i=1,2,\cdots)$.

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

定理 10
设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $n, 0<p<1$ 的二项分布，即 $\eta_n \sim b(n,p)$，则对于任意的实数 x 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

证明：将 η_n 改写为独立同分布的随机变量序列 $\{X_i\}$ 的和，即

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

其中 $X_i \sim b(1,p), E(X_i)=p, D(X_i)=p(1-p)(i=1,2,\cdots)$.
由林德伯格-列维中心极限定理可知定理成立.

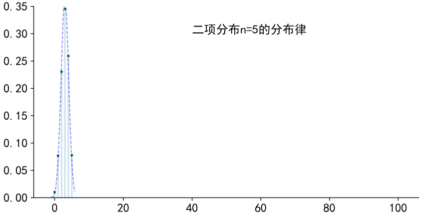


图: 二项分布 $b(n, 0.6)$ 的分布律

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理由拉普拉斯将 $p = \frac{1}{2}$ 推广到 $0 < p < 1$ 情形，专门针对二项分布给出正态近似结果，即若 $X \sim b(n, p)$，当 n 充分大时，可近似认为 $X \sim N(np, np(1-p))$.

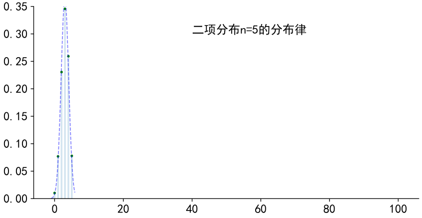


图: 二项分布 $b(n, 0.6)$ 的分布律

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理由拉普拉斯将 $p = \frac{1}{2}$ 推广到 $0 < p < 1$ 情形，专门针对二项分布给出正态近似结果，即若 $X \sim b(n, p)$，当 n 充分大时，可近似认为 $X \sim N(np, np(1-p))$.

在实际使用中，一般在 np 比较小时，用泊松分布近似较好；而在 $np > 5$ 和 $n(1-p) > 5$ 时，用正态分布近似较好.

例 2

一船舶在某海区航行，已知每遭受一次波浪的冲击，纵摇角大于 3° 的概率为 $\frac{1}{3}$，若船舶遭受到 90000 次波浪冲击，问纵摇角大于 3° 的次数不小于 29800 并且不大于 30200 的概率是多少?

例 2

一船舶在某海区航行，已知每遭受一次波浪的冲击，纵摇角大于 3° 的概率为 $\frac{1}{3}$，若船舶遭受到 90000 次波浪冲击，问纵摇角大于 3° 的次数不小于 29800 并且不大于 30200 的概率是多少?

解：将船舶遭受一次波浪冲击看作一次试验，并假定各次试验是独立的．在 90000 次波浪冲击中纵摇角度大于 3° 的次数记为 X，则 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$.

例 2

一船舶在某海区航行，已知每遭受一次波浪的冲击，纵摇角大于 3° 的概率为 $\frac{1}{3}$，若船舶遭受到 90000 次波浪冲击，问纵摇角大于 3° 的次数不小于 29800 并且不大于 30200 的概率是多少?

解：将船舶遭受一次波浪冲击看作一次试验，并假定各次试验是独立的．在 90000 次波浪冲击中纵摇角度大于 3° 的次数记为 X，则 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$.

$$P\{29800 \leq X \leq 30200\} = \sum_{k=29800}^{30200} C_{90000}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{90000-k}$$

例 2

一船舶在某海区航行，已知每遭受一次波浪的冲击，纵摇角大于 3° 的概率为 $\frac{1}{3}$，若船舶遭受到 90000 次波浪冲击，问纵摇角大于 3° 的次数不小于 29800 并且不大于 30200 的概率是多少?

解：将船舶遭受一次波浪冲击看作一次试验，并假定各次试验是独立的．在 90000 次波浪冲击中纵摇角度大于 3° 的次数记为 X，则 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$．

$$P\{29800 \leq X \leq 30200\} = \sum_{k=29800}^{30200} C_{90000}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{90000-k}$$

直接计算非常困难，下面使用棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理来近似计算.

当 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$ 时，由定理可近似为 $X \sim N\left(np, np(1-p)\right)$，

当 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$ 时，由定理可近似为 $X \sim N\left(np, np(1-p)\right)$，

$$P\{29800 \le X \le 30200\}$$

当 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$ 时，由定理可近似为 $X \sim N\left(np, np(1-p)\right)$，

$$P\{29800 \le X \le 30200\} = P\left\{\frac{29800 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{30200 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

当 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$ 时，由定理可近似为 $X \sim N\left(np, np(1-p)\right)$，

$$P\{29800 \leq X \leq 30200\} = P\left\{\frac{29800-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{30200-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{30200-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{29800-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

当 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$ 时，由定理可近似为 $X \sim N\left(np, np(1-p)\right)$，

$$P\{29800 \le X \le 30200\} = P\left\{\frac{29800-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{30200-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{30200-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{29800-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

因为 $n = 90000, p = \frac{1}{3}$，所以 $np = 30000, \sqrt{np(1-p)} = 100\sqrt{2}$，则

当 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$ 时，由定理可近似为 $X \sim N\left(np, np(1-p)\right)$，

$$P\{29800 \le X \le 30200\} = P\left\{\frac{29800-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{30200-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{30200-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{29800-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

因为 $n = 90000, p = \frac{1}{3}$，所以 $np = 30000, \sqrt{np(1-p)} = 100\sqrt{2}$，则

$$P\{29800 \le X \le 30200\} \approx \Phi\left(\sqrt{2}\right) - \Phi\left(-\sqrt{2}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{2}\right) - 1 = 0.8414$$

当 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$ 时，由定理可近似为 $X \sim N\left(np, np(1-p)\right)$，

$$P\{29800 \le X \le 30200\} = P\left\{\frac{29800-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{30200-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{30200-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{29800-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

因为 $n = 90000, p = \frac{1}{3}$，所以 $np = 30000, \sqrt{np(1-p)} = 100\sqrt{2}$，则

$$P\{29800 \le X \le 30200\} \approx \Phi\left(\sqrt{2}\right) - \Phi\left(-\sqrt{2}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{2}\right) - 1 = 0.8414$$

故纵摇角大于 3° 的次数不小于 29800 并且不大于 30200 的概率为 0.8414.

例 3

某校有 1000 位师生中午在校吃饭，若每人有 30% 概率去“大学生美食广场 (简称大美)”吃饭，且每人是否去“大美”相互独立，请用中心极限定理估算“大美”需要设置多少个座位，才能以 90% 以上概率保证来吃饭的人都有座位?

例 3

某校有 1000 位师生中午在校吃饭，若每人有 30% 概率去“大学生美食广场 (简称大美)”吃饭，且每人是否去“大美”相互独立，请用中心极限定理估算“大美”需要设置多少个座位，才能以 90% 以上概率保证来吃饭的人都有座位?

解：设 1000 位师生中去“大美”的人数为 X，“大美”需要设置 m 个座位，由题意可知 $X \sim b(1000, 0.3)$，从而 $E(X) = 300, D(X) = 210.$

例 3

某校有 1000 位师生中午在校吃饭，若每人有 30% 概率去“大学生美食广场 (简称大美)”吃饭，且每人是否去“大美”相互独立，请用中心极限定理估算“大美”需要设置多少个座位，才能以 90% 以上概率保证来吃饭的人都有座位?

解：设 1000 位师生中去“大美”的人数为 X，“大美”需要设置 m 个座位，由题意可知 $X \sim b(1000, 0.3)$，从而 $E(X) = 300, D(X) = 210.$
由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理，可近似认为 $X \sim N(300, 210)$，故

$$P\{X \leq m\} = P\left\{\frac{X - 300}{\sqrt{210}} \leq \frac{m - 300}{\sqrt{210}}\right\} = \Phi\left(\frac{m - 300}{\sqrt{210}}\right) > 0.9$$

例 3

某校有 1000 位师生中午在校吃饭，若每人有 30% 概率去“大学生美食广场 (简称大美)”吃饭，且每人是否去“大美”相互独立，请用中心极限定理估算“大美”需要设置多少个座位，才能以 90% 以上概率保证来吃饭的人都有座位?

解：设 1000 位师生中去“大美”的人数为 X**，“大美”需要设置** m **个座位，由题意可知** $X \sim b(1000, 0.3)$**，从而** $E(X) = 300, D(X) = 210.$
由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理，可近似认为 $X \sim N(300, 210)$**，故**

$$P\{X \leq m\} = P\left\{\frac{X-300}{\sqrt{210}} \leq \frac{m-300}{\sqrt{210}}\right\} = \Phi\left(\frac{m-300}{\sqrt{210}}\right) > 0.9$$

查表得 $\frac{m-300}{\sqrt{210}} > 1.29$**，从而** $m > 318.69$**，因此需设置 319 个座位.**

定理 11

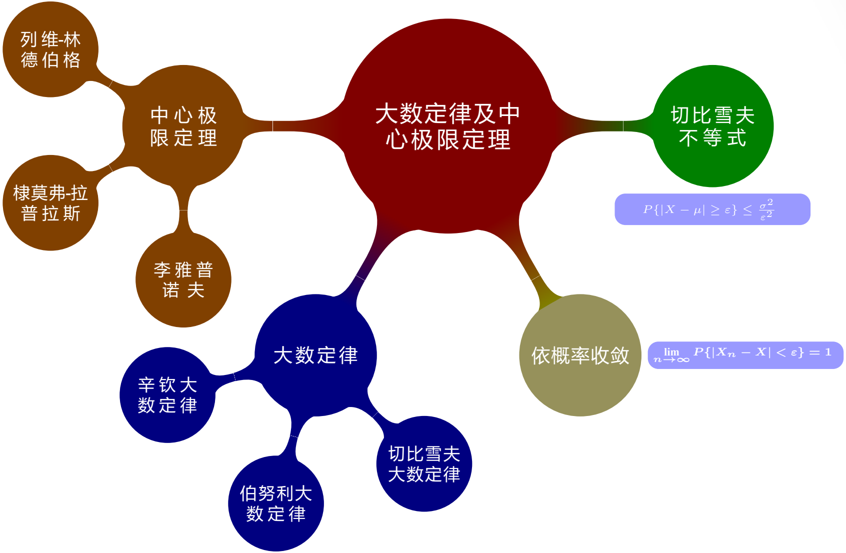
设 $\{X_n\}$ **为独立随机变量序列，且有数学期望** $E(X_k)=\mu_k$**，方差** $D(X_k)=\sigma_k^2>0(k=1,2,\cdots)$**，令** $S_n=\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}$**，若存在** $\delta>0$**，使得**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E\left\{\left|X_k-\mu_k\right|^{2+\delta}\right\}=0$$

则 $\{X_n\}$ **满足中心极限定理，即，若记** $Y_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^n X_k-E\left(\sum\limits_{k=1}^n X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^n X_k\right)}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^n X_k-\sum\limits_{k=1}^n \mu_k}{S_n}$**，则** Y_n **的分布函数** $F_n(x)$ **满足** $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,-\infty<x<+\infty.$

大数定律及中心极限定理习题

知识点总结


大数定律及中心极限定理
中心极限定理
列维-林德伯格
棣莫弗-拉普拉斯
李雅普诺夫
切比雪夫不等式
$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$
依概率收敛
$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$
大数定律
辛钦大数定律
伯努利大数定律
切比雪夫大数定律

例 1

设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$, 则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu| \geq 3\sigma\} \leq$ ______.

例 1

设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$, 则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq$ ________ .

解: 切比雪夫不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

例 1

设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$, 则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq$ ________.

解: 切比雪夫不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

故

$$P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq\frac{D(X)}{9\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{1}{9}$$

例 1

设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$, 则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq \underline{\quad \frac{1}{9} \quad}$.

解: 切比雪夫不等式

$$P\{|X-\mu|\geq \varepsilon\}\leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

故

$$P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq \frac{D(X)}{9\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{1}{9}$$

例 2

掷 100 枚均匀硬币, 利用契比雪夫不等式估计出现正面的硬币个数在 40 到 60 之间的概率为 ________.

例 2

掷 100 枚均匀硬币，利用契比雪夫不等式估计出现正面的硬币个数在 40 到 60 之间的概率为 ______.

解: 设随机变量 X 表示掷 100 枚硬币中出现正面的硬币个数，则 $X \sim b(100, 0.5), E(X) = 50, D(X) = 25$，由中心极限定理可知

例 2

掷 100 枚均匀硬币, 利用契比雪夫不等式估计出现正面的硬币个数在 40 到 60 之间的概率为 ______.

解: 设随机变量 X 表示掷 100 枚硬币中出现正面的硬币个数，则
$X \sim b(100, 0.5), E(X) = 50, D(X) = 25$，**由中心极限定理可知 故**

$$P\{40 < X < 60\} = P\{|X - 50| < 10\}$$
$$\geq 1 - \frac{D(X)}{10^2} = 1 - \frac{25}{100} = \frac{3}{4}$$

例 2

掷 100 枚均匀硬币, 利用契比雪夫不等式估计出现正面的硬币个数在 40 到 60 之间的概率为 $\underline{\;\frac{3}{4}\;}$.

解: 设随机变量 X 表示掷 100 枚硬币中出现正面的硬币个数，则 $X \sim b(100, 0.5), E(X) = 50, D(X) = 25$，由中心极限定理可知 故

$$
\begin{aligned}
P\{40 < X < 60\} &= P\{|X - 50| < 10\} \\
&\geq 1 - \frac{D(X)}{10^2} = 1 - \frac{25}{100} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

例 3

掷 100 枚均匀硬币, 利用中心极限定理估计出现正面的硬币个数在 40 到 60 之间的概率为 ____________.

例 3

掷 100 枚均匀硬币, 利用中心极限定理估计出现正面的硬币个数在 40 到 60 之间的概率为 __________.

解: 设随机变量 X 表示掷 100 枚硬币中出现正面的硬币个数，则 $X \sim b(100, 0.5), E(X) = 50, D(X) = 25$，由中心极限定理可知

例 3

掷 100 枚均匀硬币, 利用中心极限定理估计出现正面的硬币个数在 40 到 60 之间的概率为 __________.

解: 设随机变量 X 表示掷 100 枚硬币中出现正面的硬币个数，则 $X \sim b(100, 0.5), E(X) = 50, D(X) = 25$，由中心极限定理可知 故

$$P\{40 < X < 60\} = P\left\{\frac{40-50}{\sqrt{25}} < \frac{X-50}{\sqrt{25}} < \frac{60-50}{\sqrt{25}}\right\}$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$

例 3

掷 100 枚均匀硬币, 利用中心极限定理估计出现正面的硬币个数在 40 到 60 之间的概率为 $\underline{\quad 0.9544 \quad}$.

解: 设随机变量 X 表示掷 100 枚硬币中出现正面的硬币个数，则 $X \sim b(100, 0.5), E(X) = 50, D(X) = 25$，**由中心极限定理可知 故**

$$P\{40 < X < 60\} = P\left\{\frac{40-50}{\sqrt{25}} < \frac{X-50}{\sqrt{25}} < \frac{60-50}{\sqrt{25}}\right\}$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$

例 4

设 $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列，记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，则根据林德伯格-列维中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $\{X_n\}$ 满足 ______.

(A) 具有相同的期望；

(B) 具有相同的方差；

(C) 服从同一指数分布；

(D) 服从同一离散分布.

例 4

设 $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列，记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，则根据林德伯格-列维中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $\{X_n\}$ 满足 ______.

(A) 具有相同的期望；　　(B) 具有相同的方差；

(C) 服从同一指数分布；　　(D) 服从同一离散分布.

解：林德伯格-列维中心极限定理的条件

(1) $\{X_n\}$ 为独立同分布随机变量序列；

(2) 数学期望存在；

(3) 方差存在且 $D(X_k) = \sigma^2 > 0 (k = 1, 2, \cdots)$.

例 4

设 $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列，记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则根据林德伯格-列维中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $\{X_n\}$ 满足 $\underline{\quad C \quad}$.

(A) 具有相同的期望；

(B) 具有相同的方差；

(C) 服从同一指数分布；

(D) 服从同一离散分布.

解：林德伯格-列维中心极限定理的条件

(1) $\{X_n\}$ 为独立同分布随机变量序列；

(2) 数学期望存在；

(3) 方差存在且 $D(X_k)=\sigma^2>0(k=1,2,\cdots)$.

例 5

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从参数为 λ 的指数分布，则当 $n \to \infty$ 时，$\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于______，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于______，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{0 < \overline{X}_n < \frac{2}{\lambda}\right\} =$______.

例 5

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从参数为 λ 的指数分布，则当 $n \to \infty$ 时，$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于______，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于______，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{0 < \overline{X}_n < \frac{2}{\lambda}\right\} =$______.

解: 因为 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$，由辛钦大数定律可知

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{\lambda}$$

例 5

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从参数为 λ 的指数分布，则当 $n\to\infty$ 时，$\overline{X}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于 $\underline{\quad\dfrac{1}{\lambda}\quad}$，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 ______，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{0<\overline{X}_n<\frac{2}{\lambda}\right\}=$______.

例 5

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从参数为 λ 的指数分布，则当 $n\to\infty$ 时，$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于 $\underline{\quad\frac{1}{\lambda}\quad}$，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $\underline{\qquad\qquad}$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{0<\overline{X}_n<\frac{2}{\lambda}\right\}=\underline{\qquad\qquad}$.

因为 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且

$$E(X_i^2)=D(X_i)+\left[E(X_i)\right]^2=\frac{1}{\lambda^2}+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}$$

由辛钦大数定律可知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{2}{\lambda^2}$$

例 5

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从参数为 λ 的指数分布，则当 $n \to \infty$ 时，$\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于 $\underline{\ \dfrac{1}{\lambda}\ }$，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 $\underline{\ \dfrac{2}{\lambda^2}\ }$，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{0 < \overline{X}_n < \frac{2}{\lambda}\right\} =$______.

例 5

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从参数为 λ 的指数分布，则当 $n\to\infty$ 时，$\overline{X}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于 $\underline{\quad\dfrac{1}{\lambda}\quad}$，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $\underline{\quad\dfrac{2}{\lambda^2}\quad}$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{0<\overline{X}_n<\frac{2}{\lambda}\right\}=$______.

因为 $\overline{X}_n$ 依概率收敛于 $\frac{1}{\lambda}$，即对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{\lambda}-\varepsilon<\overline{X}_n<\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right\}=1$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{\lambda}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{0<\overline{X}_n<\frac{2}{\lambda}\right\}=1$

例 5

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从参数为 λ 的指数分布，则当 $n\to\infty$ 时，$\overline{X}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于 $\underline{\quad\dfrac{1}{\lambda}\quad}$，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $\underline{\quad\dfrac{2}{\lambda^2}\quad}$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{0<\overline{X}_n<\frac{2}{\lambda}\right\}=\underline{\quad 1\quad}$.

因为 $\overline{X}_n$ 依概率收敛于 $\frac{1}{\lambda}$，即对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{\lambda}-\varepsilon<\overline{X}_n<\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right\}=1$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{\lambda}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{0<\overline{X}_n<\frac{2}{\lambda}\right\}=1$

例 6

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从参数为 λ 的泊松分布，以下选项正确的是 ______.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-\lambda}{\lambda}\le x\right\}=\Phi(x)$; (B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\le x\right\}=\Phi(x)$;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-n\lambda}{n\lambda}\le x\right\}=\Phi(x)$; (D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\le x\right\}=\Phi(x)$.

例 6

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从参数为 λ 的泊松分布，以下选项正确的是 $\underline{\quad D \quad}$.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\lambda} \le x\right\} = \Phi(x)$; (B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right\} = \Phi(x)$;

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{n\lambda} \le x\right\} = \Phi(x)$; (D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x\right\} = \Phi(x)$.

例 7

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从 $(-1,1)$ 上的均匀分布，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \le 1\right\} = $ __________.

例 7

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从 $(-1,1)$ 上的均匀分布，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \le 1\right\} =$ ________.

解: $X_i \sim U(-1,1)$，则 $E(X_i)=0, D(X_i)=\frac{1}{3}$，由中心极限定理，有 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - 0}{\sqrt{\frac{n}{3}}} \sim N(0,1)$，故

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \le 1\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - 0}{\sqrt{\frac{n}{3}}} \le \sqrt{3}\right\} = \Phi\left(\sqrt{3}\right)$$

例 7

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，都服从 $(-1,1)$ 上的均匀分布，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \le 1\right\} = \underline{\quad \Phi\left(\sqrt{3}\right) \quad}$.

解:$X_i \sim U(-1,1)$，则 $E(X_i)=0, D(X_i)=\frac{1}{3}$，由中心极限定理，有 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - 0}{\sqrt{\frac{n}{3}}} \sim N(0,1)$，故

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \le 1\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - 0}{\sqrt{\frac{n}{3}}} \le \sqrt{3}\right\} = \Phi\left(\sqrt{3}\right)$$

例 8

某系统由 n 个部件组成，每个部件是否损坏相互独立，且损坏的概率均为 0.1，若 80% 以上的部件完好时，系统才能正常工作. 利用中心极限定理计算 n 至少多大时，才能保证系统正常工作的概率不小于 0.95?

例 8

某系统由 n 个部件组成，每个部件是否损坏相互独立，且损坏的概率均为 0.1，若 80% 以上的部件完好时，系统才能正常工作. 利用中心极限定理计算 n 至少多大时，才能保证系统正常工作的概率不小于 0.95?

解：设随机变量 X 表示 n 个不见中未损坏的部件数，则

$$X \sim b(n, 0.9), E(X) = 0.9n, D(X) = 0.09n$$

例 8

某系统由 n 个部件组成，每个部件是否损坏相互独立，且损坏的概率均为 0.1，若 80% 以上的部件完好时，系统才能正常工作. 利用中心极限定理计算 n 至少多大时，才能保证系统正常工作的概率不小于 0.95?

解：设随机变量 X 表示 n 个不见中未损坏的部件数，则

$$X \sim b(n, 0.9), E(X) = 0.9n, D(X) = 0.09n$$

由中心极限定理 $\dfrac{X - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} \sim N(0,1)$，从而正常工作的概率不小于 0.95 为

例 8

某系统由 n 个部件组成，每个部件是否损坏相互独立，且损坏的概率均为 0.1，若 80% 以上的部件完好时，系统才能正常工作. 利用中心极限定理计算 n 至少多大时，才能保证系统正常工作的概率不小于 0.95?

解：设随机变量 X 表示 n 个不见中未损坏的部件数，则

$$X \sim b(n, 0.9), E(X) = 0.9n, D(X) = 0.09n$$

由中心极限定理 $\dfrac{X - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} \sim N(0,1)$**，从而正常工作的概率不小于 0.95 为**

$$P\{X \geq 0.8n\} = P\left\{\frac{X - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} \geq \frac{0.8n - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right\} = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.95$$

例 8

某系统由 n 个部件组成，每个部件是否损坏相互独立，且损坏的概率均为 0.1，若 80% 以上的部件完好时，系统才能正常工作. 利用中心极限定理计算 n 至少多大时，才能保证系统正常工作的概率不小于 0.95?

解：设随机变量 X 表示 n 个不见中未损坏的部件数，则

$$X \sim b(n, 0.9), E(X) = 0.9n, D(X) = 0.09n$$

由中心极限定理 $\dfrac{X - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} \sim N(0,1)$，从而正常工作的概率不小于 0.95 为

$$P\{X \geq 0.8n\} = P\left\{\frac{X - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} \geq \frac{0.8n - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right\} = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.95$$

查表可知 $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.645$，从而 $n \geq 24.3$，故取 $n = 25$.

例 9

设 X 是连续型随机变量，$E\left(e^{X^2}\right)$ 存在，证明对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\left(e^{X^2}\right)}{e^{\varepsilon^2}}$$

例 9

设 X 是连续型随机变量，$E\left(e^{X^2}\right)$ 存在，证明对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\left(e^{X^2}\right)}{e^{\varepsilon^2}}$$

证明：设 X 的概率密度为 $f(x)$，则

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} = \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

例 9

设 X 是连续型随机变量，$E\left(e^{X^2}\right)$ 存在，证明对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E\left(e^{X^2}\right)}{e^{\varepsilon^2}}$$

证明：设 X 的概率密度为 $f(x)$，则

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}=\int_{|x|\geq\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x\leq\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{e^{x^2}}{e^{\varepsilon^2}}f(x)\mathrm{d}x$$

例 9

设 X 是连续型随机变量，$E\left(e^{X^2}\right)$ 存在，证明对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\left(e^{X^2}\right)}{e^{\varepsilon^2}}$$

证明： 设 X 的概率密度为 $f(x)$，则

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} = \int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{e^{x^2}}{e^{\varepsilon^2}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{1}{e^{\varepsilon^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} f(x)\mathrm{d}x$$

例 9

设 X 是连续型随机变量，$E\left(e^{X^2}\right)$ 存在，证明对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\left(e^{X^2}\right)}{e^{\varepsilon^2}}$$

证明：设 X 的概率密度为 $f(x)$，则

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} = \int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{e^{x^2}}{e^{\varepsilon^2}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{1}{e^{\varepsilon^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{E\left(e^{X^2}\right)}{e^{\varepsilon^2}}$$

概率论与数理统计

概率论与数理统计教研团队[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

2024 年　春

大工至善
大学至真

哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY