概率论与数理统计

概率论与数理统计教研团队[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

2024 年　春

大工至善
大学至真

哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

目　录

第八章：假设检验

- 假设检验的基本思想
- 正态总体参数的假设检验
  - 单个正态总体情形
  - 两个独立正态总体情形
- 假设检验习题

假设检验又称统计假设检验，是用来判断样本与样本、样本与总体的差异是由抽样误差引起的，还是本质差别造成的一种统计推断方法.

显著性检验是假设检验中最常用的一种方法，也是一种最基本的统计推断形式，其基本原理是先对总体的特征做出某种假设，然后通过抽样研究的统计推理，对此假设应该被拒绝还是被接受做出推断.

假设检验可分为参数假设检验和非参数假设检验．当总体分布形式已知，只对总体 X 某些参数做出假设，进而做出的检验称为参数假设检验；对其它假设做出的检验称为非参数假设检验．在实际问题中，正态总体是最重要的研究对象，本章只介绍正态总体参数的显著性检验.

假设检验的基本思想

假设检验的基本思想是利用“小概率事件”原理，使用带有某种概率性质的反证法，通过样本来检验假设是否成立.

小概率原理是指小概率事件在一次试验中基本上不会发生，但在多次重复试验中是必然发生的. 统计学上，把小概率事件在一次实验中看成是实际不可能发生的事件，一般认为概率等于或小于 0.05 的为小概率; 假设是关于总体某个性质的假定，反证法是先提出检验假设，再用适当的统计方法，利用小概率原理判断假设是否成立.

为了检验一个假设 H_0 是否正确，首先假定该假设 H_0 正确，然后根据样本对假设 H_0 做出接受或拒绝的决策. 如果样本观察值导致了“小概率事件”发生，就应拒绝假设 H_0，否则应接受假设 H_0.

假设检验的基本思想是利用“小概率事件”原理，使用带有某种概率性质的反证法，通过样本来检验假设是否成立.

小概率原理是指小概率事件在一次试验中基本上不会发生，但在多次重复试验中是必然发生的. 统计学上，把小概率事件在一次实验中看成是实际不可能发生的事件，一般认为概率等于或小于 0.05 的为小概率; 假设是关于总体某个性质的假定，反证法是先提出检验假设，再用适当的统计方法，利用小概率原理判断假设是否成立.

为了检验一个假设 H_0 是否正确，首先假定该假设 H_0 正确，然后根据样本对假设 H_0 做出接受或拒绝的决策. 如果样本观察值导致了“小概率事件”发生，就应拒绝假设 H_0，否则应接受假设 H_0.

为了对假设检验有一个直观的认识，不妨先看下面的例子.

例 1

某高中 3 年级数学第二次高考模拟考试后，若已知全校这次考试分数 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，根据以往考试经验，认为每次考试分数标准差 $\sigma = 5.5$ 分保持不变，有人说这次考试平均分与上次模拟考试平均分 103.2 基本一样，即 $\mu = 103.2$，为了检验这种说法正不正确，老师随机取出 9 份试卷批改，9 份试卷平均分 107.7 分，请问老师是否可以接受这种说法?

例 1

某高中 3 年级数学第二次高考模拟考试后，若已知全校这次考试分数 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，根据以往考试经验，认为每次考试分数标准差 $\sigma=5.5$ 分保持不变，有人说这次考试平均分与上次模拟考试平均分 103.2 基本一样，即 $\mu=103.2$，为了检验这种说法正不正确，老师随机取出 9 份试卷批改，9 份试卷平均分 107.7 分，请问老师是否可以接受这种说法?

分析　本次抽样的样本均值为 $\overline{x}=107.7$ 分，与上次平均分 $\mu=103.2$ 不同，这个差异可能是由抽样造成的，也可能是 $\mu\neq 103.2$ 由造成的．若是能由“反证法”说明不是抽样造成的差异，那就能确定说法不正确.

例 1

某高中 3 年级数学第二次高考模拟考试后，若已知全校这次考试分数 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，根据以往考试经验，认为每次考试分数标准差 $\sigma=5.5$ 分保持不变，有人说这次考试平均分与上次模拟考试平均分 103.2 基本一样，即 $\mu=103.2$，为了检验这种说法正不正确，老师随机取出 9 份试卷批改，9 份试卷平均分 107.7 分，请问老师是否可以接受这种说法?

分析　本次抽样的样本均值为 $\overline{x}=107.7$ 分，与上次平均分 $\mu=103.2$ 不同，这个差异可能是由抽样造成的，也可能是 $\mu\neq 103.2$ 由造成的．若是能由“反证法”说明不是抽样造成的差异，那就能确定说法不正确.

这里所说的“反证法”不是数学逻辑意义上的反证法，而是根据小概率原理，若假设 $\mu=103.2$ 时，根据样本构造一个小概率事件，且发生了，就认为假设错误，即 $\mu=103.2$ 不正确，说明这不是由抽样造成的差异，而是本质上有差别；反之，$\mu=103.2$ 有可能是正确的，说明不能排除这是由抽样造成的差异.

解：假设说法正确，可以提出假设 $H_0 : \mu = 103.2$**，此时** $X \sim N(103.2, 5.5^2)$**，样本容量** $n = 9$**，因此**

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) = N(103.2, \frac{5.5^2}{9})$$

解：假设说法正确，可以提出假设 $H_0: \mu = 103.2$，此时 $X \sim N(103.2, 5.5^2)$，样本容量 $n = 9$，因此

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) = N(103.2, \frac{5.5^2}{9})$$

令 $U = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}-103.2}{\frac{5.5}{3}}$，则 $U \sim N(0,1)$，令 $\alpha = 0.05$，利用标准正态分布 α 分位点有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \alpha$$

解：假设说法正确，可以提出假设 $H_0: \mu = 103.2$，此时 $X \sim N(103.2, 5.5^2)$，样本容量 $n = 9$，因此

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) = N(103.2, \frac{5.5^2}{9})$$

令 $U = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}-103.2}{\frac{5.5}{3}}$，则 $U \sim N(0,1)$，令 $\alpha = 0.05$，利用标准正态分布 α 分位点有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \alpha$$

于是构造了一个小概率事件

$$\left\{U \in W = \left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \bigcup \left(z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right) = (-\infty, -1.96) \bigcup (1.96, +\infty)\right\}$$

通过样本值得到统计量 U 的取值 $u = \frac{\overline{x}-103.2}{\frac{5.5}{3}} = 2.45 \in W$，由此可知小概率事件发生.

通过样本值得到统计量 U 的取值 $u = \frac{\overline{x}-103.2}{\frac{5.5}{3}} = 2.45 \in W$，由此可知小概率事件发生.

在一次观测中，当小概率事件发生时，我们有足够的理由怀疑假设 $\mu = 103.2$ 的正确性，因此认为这次考试平均分与上次模拟考试平均分 103.2 基本一样是错误的.

通过样本值得到统计量 U 的取值 $u=\frac{\overline{x}-103.2}{\frac{5.5}{3}}=2.45\in W$，由此可知小概率事件发生.

在一次观测中，当小概率事件发生时，我们有足够的理由怀疑假设 $\mu=103.2$ 的正确性，因此认为这次考试平均分与上次模拟考试平均分 103.2 基本一样是错误的.

在数理统计中，把例 1 中 $\mu=103.2$ 这样的等待检验的假设称为原假设或零假设，记为 H_0; 与原假设对立的假设称为备择假设，记为 $H_1:\mu\neq 103.2$. 检验的目的是在原假设 H_0 与备择假设 H_1 之间接受其中之一，若认为原假设 H_0 是不正确，则拒绝 H_0 而接受备择假设 H_1；若不能拒绝原假设 H_0，则接受 H_0.

假设检验是基于小概率事件原理，利用反证法，依据样本统计量做出的统计推断，其推断的结论有可能发生错误，可能犯的错误有两类：

假设检验是基于小概率事件原理，利用反证法，依据样本统计量做出的统计推断，其推断的结论有可能发生错误，可能犯的错误有两类：

(1) **第 I 类错误也叫弃真错误或 α 错误，即原假设 H_0 为真，但却拒绝了原假设. 犯第 I 类错误的概率记为 α，即**

$$P\left\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\right\}=\alpha$$

假设检验是基于小概率事件原理，利用反证法，依据样本统计量做出的统计推断，其推断的结论有可能发生错误，可能犯的错误有两类：

(1) **第 I 类错误也叫弃真错误或 α 错误，即原假设 H_0 为真，但却拒绝了原假设. 犯第 I 类错误的概率记为 α，即**

$$P\left\{\text{拒绝}H_0 | H_0\text{为真}\right\} = \alpha$$

(2) **第 II 类错误也叫取伪错误或 β 错误，即原假设为假，但却接受了原假设. 犯第 II 类错误的概率记为 β，即**

$$P\left\{\text{接受}H_0 | H_0\text{为假}\right\} = \beta$$

理论上，自然希望犯这两类错误的概率都很小，但是当样本容量固定时，不能试图使得 α, β 同时变小，事实上，α 变小时，β 就变大；而 β 变小时，α 就变大. 一般只有当样本容量增大时，才有可能使两者变小.

在实际应用中，原则上是控制犯第 I 类错误的概率，即给定 α，然后通过增大样本容量来减小 β. 这种着重控制犯第 I 类错误的概率 α 的假设检验称为显著性检验，犯第 I 类错误的概率 α 称为显著性水平，显著性水平代表的意义是在一次试验中小概率事件发生的可能性大小.

临界值方法

假设检验中，在给出原假设和备择假设后，由样本对原假设进行判断总是通过一个统计量完成的，该统计量称为检验统计量. 在零假设情况下，检验统计量服从一个给定的概率分布，例 1 中，给出原假设 H_0，检验统计量

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X} - 103.2}{\frac{5.5}{3}} \sim N(0,1)$$

然后要根据检验统计量的观察值，来确定接受还是拒绝原假设.

临界值方法

假设检验中，在给出原假设和备择假设后，由样本对原假设进行判断总是通过一个统计量完成的，该统计量称为检验统计量. 在零假设情况下，检验统计量服从一个给定的概率分布，例 1 中，给出原假设 H_0，检验统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{\overline{X}-103.2}{\frac{5.5}{3}}\sim N(0,1)$$

然后要根据检验统计量的观察值，来确定接受还是拒绝原假设.

取定显著性水平 $\alpha=0.05$，则检验统计量 U 的取值位于集合

$$W=\left(-\infty,-z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\bigcup\left(z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty\right)$$

内的概率为 $\alpha=0.05$，若检验统计量的观察值在集合 W 内，则拒绝原假设，称集合 W 为拒绝域，拒绝域的边界点称为临界点，如例 1 中，$-z_{\frac{\alpha}{2}},z_{\frac{\alpha}{2}}$ 为临界点. 不能够拒绝原假设的检验统计量的所有可能取值的集合称为接受域.

p 值法

p 值法是假设检验的一种常用方法，所谓 p 值是在原假设成立时，检验统计量的观测值或者比之更极端值出现的概率. 在有了检验统计量以及它的观测值之后，只需计算相应的 p 值. 如果 p 值较大，则表明在原假设下出现这个观测值并无不正常之处，因而不能拒绝原假设 H_0；如果 p 值很小，则在原假设下一个小概率事件在该次试验发生，这与小概率原理相矛盾，表明数据不支持原假设，从而拒绝原假设.

在实际使用中，一般当 p 值不超过 0.05，就认为很小，并称结果具有显著性统计意义；若当 p 值不超过 0.01，则称结果具有极其显著性统计意义.

例如，在例 1 中，统计值 2.45，相应的 p 值为 $p_{value} = 0.0143 < 0.05$，所以拒绝原假设.

双边假设检验与单边假设检验

假设检验从原假设和备择假设的形式看，区分为双边假设检验和单边假设检验. 例 1 中，原假设 $H_0 : \mu = 103.2$，备择假设 $H_1 : \mu \neq 103.2$，将检验统计量的观察值和临界值比较，无论偏大还是偏小，都应拒绝原假设，接受备择假设，具有这种形式的假设检验，称为双边假设检验.

但在某些实际问题中，例如，对于设备、元件的寿命来说，寿命越长越好，而产品的废品率当然越低越好，同时均方差越小也是我们所希望的. 因此，在实际应用中，除了双边假设检验之外，还有许多其他形式的假设检验问题：例如，

双边假设检验与单边假设检验

假设检验从原假设和备择假设的形式看，区分为双边假设检验和单边假设检验. 例 1 中，原假设 $H_0: \mu = 103.2$，备择假设 $H_1: \mu \neq 103.2$，将检验统计量的观察值和临界值比较，无论偏大还是偏小，都应拒绝原假设，接受备择假设，具有这种形式的假设检验，称为双边假设检验.

但在某些实际问题中，例如，对于设备、元件的寿命来说，寿命越长越好，而产品的废品率当然越低越好，同时均方差越小也是我们所希望的．因此，在实际应用中，除了双边假设检验之外，还有许多其他形式的假设检验问题：例如，

（1）左边假设检验：原假设 $H_0: \mu \geq \mu_0$，备择假设 $H_1: \mu < \mu_0$.

双边假设检验与单边假设检验

假设检验从原假设和备择假设的形式看，区分为双边假设检验和单边假设检验. 例 1 中，原假设 $H_0 : \mu = 103.2$，备择假设 $H_1 : \mu \neq 103.2$，将检验统计量的观察值和临界值比较，无论偏大还是偏小，都应拒绝原假设，接受备择假设，具有这种形式的假设检验，称为双边假设检验.

但在某些实际问题中，例如，对于设备、元件的寿命来说，寿命越长越好，而产品的废品率当然越低越好，同时均方差越小也是我们所希望的. 因此，在实际应用中，除了双边假设检验之外，还有许多其他形式的假设检验问题：例如，

(1) 左边假设检验：原假设 $H_0 : \mu \geq \mu_0$，备择假设 $H_1 : \mu < \mu_0$.

(2) 右边假设检验：原假设 $H_0 : \mu \leq \mu_0$，备择假设 $H_1 : \mu > \mu_0$.

双边假设检验与单边假设检验

假设检验从原假设和备择假设的形式看，区分为双边假设检验和单边假设检验. 例 1 中，原假设 $H_0 : \mu = 103.2$，备择假设 $H_1 : \mu \neq 103.2$，将检验统计量的观察值和临界值比较，无论偏大还是偏小，都应拒绝原假设，接受备择假设，具有这种形式的假设检验，称为双边假设检验.

但在某些实际问题中，例如，对于设备、元件的寿命来说，寿命越长越好，而产品的废品率当然越低越好，同时均方差越小也是我们所希望的．因此，在实际应用中，除了双边假设检验之外，还有许多其他形式的假设检验问题：例如，

(1) 左边假设检验：原假设 $H_0 : \mu \geq \mu_0$，备择假设 $H_1 : \mu < \mu_0$.

(2) 右边假设检验：原假设 $H_0 : \mu \leq \mu_0$，备择假设 $H_1 : \mu > \mu_0$.

双边假设检验与单边假设检验

假设检验从原假设和备择假设的形式看，区分为双边假设检验和单边假设检验. 例 1 中，原假设 $H_0: \mu = 103.2$，备择假设 $H_1: \mu \neq 103.2$，将检验统计量的观察值和临界值比较，无论偏大还是偏小，都应拒绝原假设，接受备择假设，具有这种形式的假设检验，称为双边假设检验.

但在某些实际问题中，例如，对于设备、元件的寿命来说，寿命越长越好，而产品的废品率当然越低越好，同时均方差越小也是我们所希望的．因此，在实际应用中，除了双边假设检验之外，还有许多其他形式的假设检验问题：例如，

(1) 左边假设检验：原假设 $H_0: \mu \geq \mu_0$，备择假设 $H_1: \mu < \mu_0$.
(2) 右边假设检验：原假设 $H_0: \mu \leq \mu_0$，备择假设 $H_1: \mu > \mu_0$.

左边假设检验和右边假设检验统称为单边假设检验.

假设检验的步骤

1. 临界值法

(1) **根据实际问题提出相应的原假设 H_0 和备择假设 H_1；**

(2) **在原假设 H_0 成立的条件下构造统计量，并确定该统计量的分布；**

(3) **对于给定的显著水平 α，样本容量 n，确定拒绝域；**

(4) **根据样本观测值计算统计量的观测值，并作出拒绝或接受原假设 H_0 的判断.**

假设检验的步骤

1. 临界值法

(1) 根据实际问题提出相应的原假设 H_0 和备择假设 H_1；

(2) 在原假设 H_0 成立的条件下构造统计量，并确定该统计量的分布；

(3) 对于给定的显著水平 α，样本容量 n，确定拒绝域；

(4) 根据样本观测值计算统计量的观测值，并作出拒绝或接受原假设 H_0 的判断.

2. p 值法

(1) 根据实际问题提出相应的原假设 H_0 和备择假设 H_1；

(2) 在原假设 H_0 成立的条件下构造统计量，并确定该统计量的分布；

(3) 根据样本观测值计算统计量的观测值，计算 p 值.

(4) 根据 p 值的大小作出拒绝或接受原假设 H_0 的判断.

p 计算方法

用 X 表示检验的统计量，当 H_0 为真时，可由样本数据计算出该统计量的值 c，根据检验统计量 X 的具体分布，可求出 p 值. 具体地说:

(1) 左侧检验的 p 值为检验统计量 X 小于样本统计值 c 的概率，即

$$p = P\{X < c\}$$

(2) 右侧检验的 p 值为检验统计量 X 大于样本统计值 c 的概率，即

$$p = P\{X > c\}$$

(3) 双侧检验的 p 值为检验统计量 X 落在样本统计值 c 为端点的尾部区域内的概率的 2 倍，即

$$p = 2P\{X > c\}, c \text{ 位于分布曲线的右端时}$$

或

$$p = 2P\{X < c\}, c \text{ 位于分布曲线的左端时}$$

若 X 服从正态分布或 t 分布，其概率密度关于纵轴对称，故其 p 值可表示为

$$p = P\{|X| > |c|\}$$

正态总体参数的假设检验

一、单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中，均值 μ 的检验

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为从总体中抽取容量为 n 的样本，显著性水平为 α

1. **总体方差 σ^2 已知，关于总体均值 μ 的双边假设检验 (U 检验)**

一、单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中，均值 μ 的检验

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从总体中抽取容量为 n 的样本，显著性水平为 α

1. **总体方差 σ^2 已知，关于总体均值 μ 的双边假设检验 (U 检验)**

   (1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$$

一、单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中，均值 μ 的检验

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从总体中抽取容量为 n 的样本，显著性水平为 α

1. **总体方差 σ^2 已知，关于总体均值 μ 的双边假设检验 (U 检验)**
   (1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$$

   (2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

一、单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中，均值 μ 的检验

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从总体中抽取容量为 n 的样本，显著性水平为 α

1. **总体方差 σ^2 已知，关于总体均值 μ 的双边假设检验 (U 检验)**
   (1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$$

   (2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

   (3) **对于给定的显著性水平 α，确定临界值 $\pm z_{\frac{\alpha}{2}}$，得到双边拒绝域**

$$W=(-\infty,-z_{\frac{\alpha}{2}})\bigcup(z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty)$$

(4）计算判断：由样本值计算统计量取值

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

若 $u\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

若 $u\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

若 $u \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

检验统计量服从标准正态分布，此检验法也称为 U 检验法.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

若 $u\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

检验统计量服从标准正态分布，此检验法也称为 U 检验法.

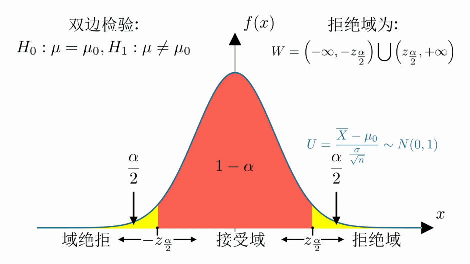


图: 双边假设检验

例 1

某工厂从长期实践得知，生产零件的直径 X 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，实践表明直径 X 的标准差 $\sigma = 0.28$ 比较稳定，设计标准中直径 X 的均值 $\mu = 15.0$ 厘米，现从某日产品中随机抽取 10 个，测得其直径（单位：厘米）分别为

$$14.8, 15.3, 15.1, 15.3, 14.7, 15.1, 15.6, 15.3, 15.5, 15.1$$

(1) 取显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时，问零件直径的均值是否符合设计标准?

(2) 取显著性水平 $\alpha = 0.01$ 时，问零件直径的均值是否符合设计标准?

例 1

某工厂从长期实践得知，生产零件的直径 X 服从正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，实践表明直径 X 的标准差 $\sigma = 0.28$ 比较稳定，设计标准中直径 X 的均值 $\mu = 15.0$ 厘米，现从某日产品中随机抽取 10 个，测得其直径（单位：厘米）分别为

$$14.8, 15.3, 15.1, 15.3, 14.7, 15.1, 15.6, 15.3, 15.5, 15.1$$

(1) 取显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时，问零件直径的均值是否符合设计标准?

(2) 取显著性水平 $\alpha = 0.01$ 时，问零件直径的均值是否符合设计标准?

解: 提出假设

$$H_0 : \mu = 15.0, H_1 : \mu \neq 15.0$$

当 H_0 为真时，取检验统计量 $U = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

由数据计算样本均值 $\overline{x} = 15.18$，检验统计量 U 的观察值为

$$u = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{15.18 - 15}{\frac{0.28}{\sqrt{10}}} = 2.03$$

由数据计算样本均值 $\overline{x}=15.18$，检验统计量 U 的观察值为

$$u=\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{15.18-15}{\frac{0.28}{\sqrt{10}}}=2.03$$

(1) 对于给定的显著性水平 $\alpha=0.05$，查标准正态分布表得 $z_{\frac{0.05}{2}}=1.96$，得到双边拒绝域

$$W=\left(-\infty,-z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\bigcup\left(z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty\right)=(-\infty,-1.96)\cup(1.96,+\infty)$$

检验统计量 U 的观察值 $u=2.03\in W$，因此拒绝原假设 H_0，认为零件直径的均值不符合设计标准.

由数据计算样本均值 $\overline{x}=15.18$，检验统计量 U 的观察值为

$$u=\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{15.18-15}{\frac{0.28}{\sqrt{10}}}=2.03$$

(2) 对于给定的显著性水平 $\alpha=0.01$，查标准正态分布表得 $z_{\frac{0.01}{2}}=2.58$，得到双边拒绝域

$$W=\left(-\infty,-z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\bigcup\left(z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty\right)=(-\infty,-2.58)\cup(2.58,+\infty)$$

检验统计量 U 的观察值 $u=2.03\notin W$，因此不能拒绝原假设 H_0，即没有充分的理由说明零件直径的均值不符合设计标准.

2. 总体方差 σ^2 已知，关于总体均值 μ 的单边假设检验 (U 检验)

2. 总体方差 σ^2 已知，关于总体均值 μ 的单边假设检验 (U 检验)

(1) 提出原假设和备择假设:

$$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0 \quad \text{或} \quad H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$$

2. 总体方差 σ^2 已知，关于总体均值 μ 的单边假设检验 (U 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0 \quad \text{或} \quad H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

2. 总体方差 σ^2 已知，关于总体均值 μ 的单边假设检验 (U 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\mu\geq\mu_0, H_1:\mu<\mu_0 \quad \text{或} \quad H_0:\mu\leq\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

(3) **对于给定的显著性水平 α，确定临界值 $-z_\alpha$ 或 z_α，得到左边拒绝域或右边拒绝域**

$$W=(-\infty,-z_\alpha) \quad \text{或} \quad W=(z_\alpha,+\infty)$$

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

若 $u\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

若 $u \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

若 $u \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

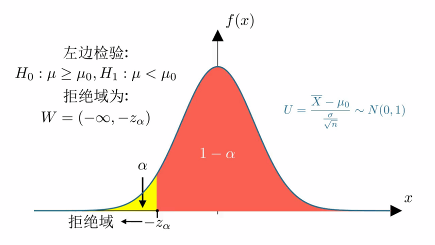


图: 左边假设检验

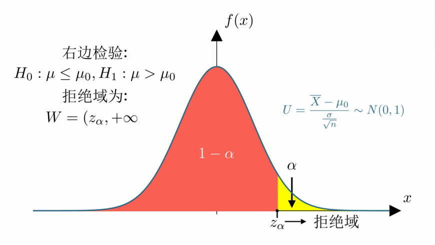


图: 右边假设检验

3. **总体方差 σ^2 未知，关于总体均值 μ 的双边假设检验 (t 检验)**

3. **总体方差 σ^2 未知，关于总体均值 μ 的双边假设检验 (t 检验)**

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$$

3. 总体方差 σ^2 未知，关于总体均值 μ 的双边假设检验 (t 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

3. 总体方差 σ^2 未知，关于总体均值 μ 的双边假设检验 (t 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

(3) **对于给定的显著性水平 α，确定临界值 $\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，得到双边拒绝域**

$$W = \left(-\infty, -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \bigcup \left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty\right)$$

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

若 $t\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

若 $t\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

若 $t\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

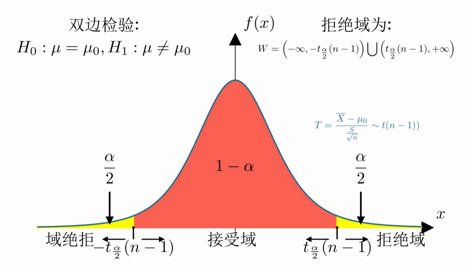


图: 双边假设检验

4. 总体方差 σ^2 未知，关于总体均值 μ 的单边假设检验 (t 检验)

4. 总体方差 σ^2 未知，关于总体均值 μ 的单边假设检验 (t 检验)

(1) 提出原假设和备择假设:

$$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0 \quad \text{或} \quad H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$$

4. **总体方差 σ^2 未知，关于总体均值 μ 的单边假设检验 (t 检验)**

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0 \quad \text{或} \quad H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

4. 总体方差 σ^2 未知，关于总体均值 μ 的单边假设检验 (t 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0 \quad \text{或} \quad H_0 : \mu \leq \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

(3) **对于给定的显著性水平 α，确定临界值 $-t_\alpha$ 或 t_α，得到左边拒绝域或右边拒绝域**

$$W = (-\infty, -t_\alpha(n-1)) \quad \text{或} \quad W = (t_\alpha(n-1), +\infty)$$

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

若 $t\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

若 $t \in W$**，拒绝接受** H_0**，否则接受** H_0**.**

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

若 $t\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

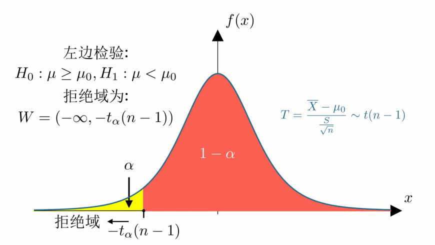


图: 左边假设检验

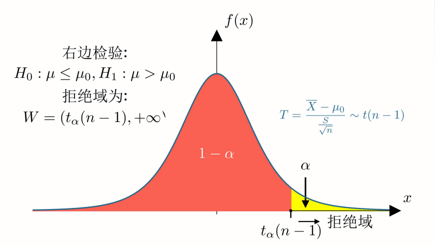


图: 右边假设检验

例 2

从一批标有含量 500 毫升的罐装啤酒中随机抽取 9 罐，测得含量分别为 (单位：毫升)

$$495.3, 502.1, 498.2, 499.3, 497.5, 500.5, 496.8, 497.4, 498.5$$

取显著性水平 $\alpha = 0.05$，若已知灌装啤酒含量服从正态分布，问能否认为这批罐装啤酒平均含量不足 500 毫升?

例 2

从一批标有含量 500 毫升的罐装啤酒中随机抽取 9 罐，测得含量分别为(单位：毫升)

$$495.3, 502.1, 498.2, 499.3, 497.5, 500.5, 496.8, 497.4, 498.5$$

取显著性水平 $\alpha = 0.05$，若已知灌装啤酒含量服从正态分布，问能否认为这批罐装啤酒平均含量不足 500 毫升?

解: 由题意提出如下假设 $H_0 : \mu \geq \mu_0 = 500, H_1 : \mu < \mu_0 = 500$. 此为左边检验问题，当原假设 H_0 为真，样本容量为 $n = 9$ 时，取检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，查 t 分布表得临界值

$$t_{\alpha}(n-1) = t_{0.05}(8) = 1.8595$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，查 t 分布表得临界值

$$t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(8) = 1.8595$$

于是左边检验的拒绝域为

$$W = (-\infty, -t_\alpha(n-1)) = (-\infty, -1.8595)$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，查 t 分布表得临界值

$$t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(8) = 1.8595$$

于是左边检验的拒绝域为

$$W = (-\infty, -t_\alpha(n-1)) = (-\infty, -1.8595)$$

由样本计算得样本均值 $\overline{x} = 498.4$，样本方差为 $s = 2.03$，计算出检验统计量 T 的观察值

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{498.4 - 500}{\frac{2.03}{\sqrt{9}}} = -2.36$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，查 t 分布表得临界值

$$t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(8) = 1.8595$$

于是左边检验的拒绝域为

$$W = (-\infty, -t_\alpha(n-1)) = (-\infty, -1.8595)$$

由样本计算得样本均值 $\overline{x} = 498.4$，样本方差为 $s = 2.03$，计算出检验统计量 T 的观察值

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{498.4 - 500}{\frac{2.03}{\sqrt{9}}} = -2.36$$

因为 $t = -2.36 \in W$ ，故拒绝原假设而接受备择假设，认为这批罐装啤酒平均含量不足 500 毫升.

二、单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中，方差 σ^2 的检验

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从总体中抽取容量为 n 的样本，显著性水平为 $\alpha\,(0<\alpha<1)$.

1. 总体均值 μ 已知，关于总体方差 σ^2 的双边假设检验 (χ^2 检验)

二、单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中，方差 σ^2 的检验

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为从总体中抽取容量为 n 的样本，显著性水平为 $\alpha\,(0<\alpha<1)$.

1. **总体均值 μ 已知，关于总体方差 σ^2 的双边假设检验 (χ^2 检验)**

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

二、单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中，方差 σ^2 的检验

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从总体中抽取容量为 n 的样本，显著性水平为 $\alpha\,(0<\alpha<1)$.

1. **总体均值 μ 已知，关于总体方差 σ^2 的双边假设检验 (χ^2 检验)**

   (1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

   (2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$$

二、单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中，方差 σ^2 的检验

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从总体中抽取容量为 n 的样本，显著性水平为 $\alpha\,(0<\alpha<1)$.

1. 总体均值 μ 已知，关于总体方差 σ^2 的双边假设检验 (χ^2 检验)

(1) 提出原假设和备择假设:

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

(2) 选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$$

(3) 对于给定的显著性水平 α，确定临界值 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 和 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$，得到双边拒绝域

$$W=\left(0,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right)\bigcup\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n),+\infty\right)$$

(4）**计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

若 $\chi^2 \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

若 $\chi^2 \in W$**，拒绝接受** H_0**，否则接受** H_0**.**

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

若 $\chi^2 \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

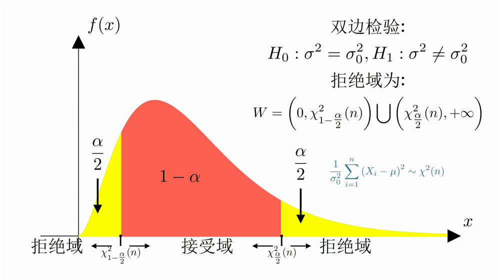


图: 双边假设检验

2. 总体均值 μ 已知，关于总体方差 σ^2 的单边假设检验 (χ^2 检验)

2. 总体均值 μ 已知，关于总体方差 σ^2 的单边假设检验 (χ^2 检验)

(1) 提出原假设和备择假设:

$$H_0:\sigma^2 \geq \sigma_0^2, H_1:\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad \text{或} \quad H_0:\sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2$$

2. 总体均值 μ 已知，关于总体方差 σ^2 的单边假设检验 (χ^2 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2, H_1:\sigma^2<\sigma_0^2 \quad \text{或} \quad H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2, H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$$

2. 总体均值 μ 已知，关于总体方差 σ^2 的单边假设检验 (χ^2 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2, H_1:\sigma^2<\sigma_0^2 \quad \text{或} \quad H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2, H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$$

(3) **对于给定的显著性水平 α，确定临界值 $\chi^2_{1-\alpha}(n)$ 或 $\chi^2_{\alpha}(n)$，得到左边拒绝域或右边拒绝域**

$$W=\left(0,\chi^2_{1-\alpha}(n)\right) \quad \text{或} \quad W=\left(\chi^2_{\alpha}(n),+\infty\right)$$

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

若 $\chi^2 \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

若 $\chi^2 \in W$**，拒绝接受** H_0**，否则接受** H_0**.**

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

若 $\chi^2 \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

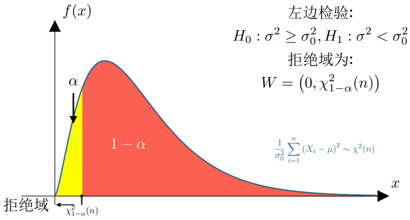


图: 左边假设检验

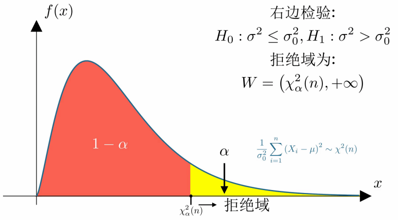


图: 右边假设检验

3. **总体均值 μ 未知，关于总体方差 σ^2 的双边假设检验 (χ^2 检验)**

3. 总体均值 μ 未知，关于总体方差 σ^2 的双边假设检验 (χ^2 检验)

（1）提出原假设和备择假设:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

3. 总体均值 μ 未知，关于总体方差 σ^2 的双边假设检验 (χ^2 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

3. 总体均值 μ 未知，关于总体方差 σ^2 的双边假设检验 (χ^2 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(3) **对于给定的显著性水平 α，确定临界值 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 和 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，得到双边拒绝域**

$$W = \left(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) \bigcup \left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty\right)$$

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

若 $\chi^2 \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

若 $\chi^2 \in W$，**拒绝接受** H_0，**否则接受** H_0.

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

若 $\chi^2\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

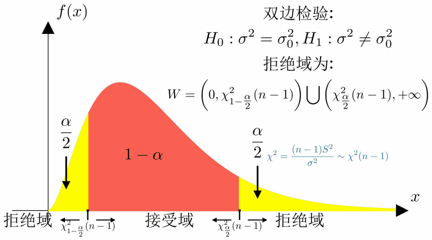


图: 双边假设检验

4. **总体均值 μ 未知，关于总体方差 σ^2 的单边假设检验 (χ^2 检验)**

4. **总体均值 μ 未知，关于总体方差 σ^2 的单边假设检验 (χ^2 检验)**

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\sigma^2 \geq \sigma_0^2, H_1:\sigma^2 < \sigma_0^2 \quad \text{或} \quad H_0:\sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2$$

4. **总体均值 μ 未知，关于总体方差 σ^2 的单边假设检验 (χ^2 检验)**

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2, H_1:\sigma^2<\sigma_0^2 \quad \text{或} \quad H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2, H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

4. 总体均值 μ 未知，关于总体方差 σ^2 的单边假设检验 (χ^2 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2, H_1:\sigma^2<\sigma_0^2 \quad \text{或} \quad H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2, H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

(3) **对于给定的显著性水平 α，确定临界值 $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ 或 $\chi^2_{\alpha}(n-1)$，得到左边拒绝域或右边拒绝域**

$$W=\left(0,\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right) \quad \text{或} \quad W=\left(\chi^2_{\alpha}(n-1),+\infty\right)$$

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

若 $\chi^2 \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

若 $\chi^2 \in W$**，拒绝接受** H_0**，否则接受** H_0.

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

若 $\chi^2 \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

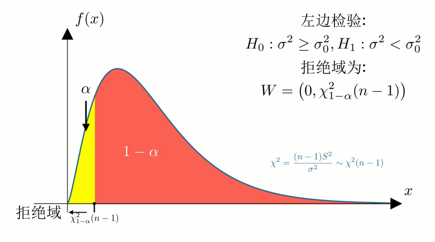


图: 左边假设检验

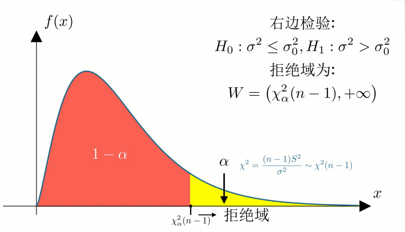


图: 右边假设检验

例 3

某工厂生产一批内径服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的零件，根据设计要求，零件的内径标准差 σ 不得超 0.30 厘米，现从这批零件中随机抽验了 25 件，测得内径样本值为 0.36 厘米，问抽样结果是否说明该产品的标准差明显增大（显著性水平为 0.05）?

例 3

某工厂生产一批内径服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的零件，根据设计要求，零件的内径标准差 σ 不得超 0.30 厘米，现从这批零件中随机抽验了 25 件，测得内径样本值为 0.36 厘米，问抽样结果是否说明该产品的标准差明显增大（显著性水平为 0.05)？

解: 由题意提出如下假设 $H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2=0.30^2, H_1:\sigma>\sigma_0^2=0.30^2$. 此为右边检验问题，当原假设 H_0 为真，样本容量为 $n=25$ 时，取检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，查 χ^2 分布表得临界值

$$\chi^2_\alpha(n-1) = \chi^2_{0.05}(24) = 36.415$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，查 χ^2 分布表得临界值

$$\chi_{\alpha}^{2}(n-1) = \chi_{0.05}^{2}(24) = 36.415$$

于是右边检验的拒绝域为

$$W = \left(\chi_{\alpha}^{2}(n-1), +\infty\right) = (36.415, +\infty)$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，查 χ^2 分布表得临界值

$$\chi_\alpha^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(24) = 36.415$$

于是右边检验的拒绝域为

$$W = \left(\chi_\alpha^2(n-1), +\infty\right) = (36.415, +\infty)$$

由样本标准差 $s = 0.36$，计算出检验统计量 χ^2 的观察值

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)\times 0.36^2}{0.30^2} = 34.56$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，查 χ^2 分布表得临界值

$$\chi^2_\alpha(n-1) = \chi^2_{0.05}(24) = 36.415$$

于是右边检验的拒绝域为

$$W = \left(\chi^2_\alpha(n-1), +\infty\right) = (36.415, +\infty)$$

由样本标准差 $s = 0.36$，计算出检验统计量 χ^2 的观察值

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)\times 0.36^2}{0.30^2} = 34.56$$

因为 $\chi^2 = 34.56 \notin W$ ，故不能拒绝原假设 H_0，没有充分理由认为该产品的标准差超过了 0.30 厘米.

三、两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中，均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且总体 X 与总体 Y 相互独立，抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个样本分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，记它们的样本均值为 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$，样本方差为 S_1^2 与 S_2^2. 取显著性水平为 α.

三、两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中，均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且总体 X 与总体 Y 相互独立，抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个样本分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，记它们的样本均值为 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$，样本方差为 S_1^2 与 S_2^2. 取显著性水平为 α.

1. **总体方差 σ_1^2,σ_2^2 已知，关于均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的双边假设检验 (U 检验)**

三、两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中，均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且总体 X 与总体 Y 相互独立，抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个样本分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，记它们的样本均值为 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$，样本方差为 S_1^2 与 S_2^2. 取显著性水平为 α.

1. **总体方差 σ_1^2,σ_2^2 已知，关于均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的双边假设检验 (U 检验)**

   (1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta,\ H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$$

三、两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中，均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且总体 X 与总体 Y 相互独立，抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个样本分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，记它们的样本均值为 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$，样本方差为 S_1^2 与 S_2^2. 取显著性水平为 α.

1. **总体方差 σ_1^2,σ_2^2 已知，关于均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的双边假设检验 (U 检验)**

   (1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta, H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$$

   (2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

三、两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中，均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且总体 X 与总体 Y 相互独立，抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个样本分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，记它们的样本均值为 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$，样本方差为 S_1^2 与 S_2^2. 取显著性水平为 α.

1. 总体方差 σ_1^2,σ_2^2 已知，关于均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的双边假设检验 (U 检验)

(1) 提出原假设和备择假设:

$$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta, H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$$

(2) 选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量

$$U=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

(3) 对于给定的显著性水平 α，确定临界值 $\pm z_{\frac{\alpha}{2}}$，得到双边拒绝域

$$W=\left(-\infty,-z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\bigcup\left(z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty\right)$$

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$u=\frac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

若 $u\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$u = \frac{(\overline{x} - \overline{y}) - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

若 $u \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$u = \frac{(\overline{x} - \overline{y}) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

若 $u \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

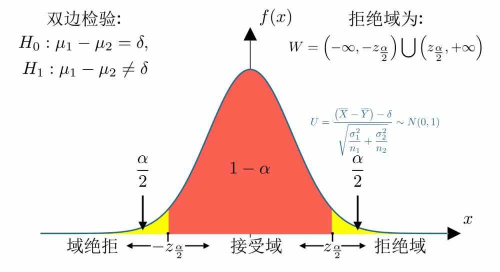


图: 双边假设检验

类似可得，左边检验 (其中 δ 为已知常数)

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

的拒绝域为

$$W = (-\infty, -z_\alpha)$$

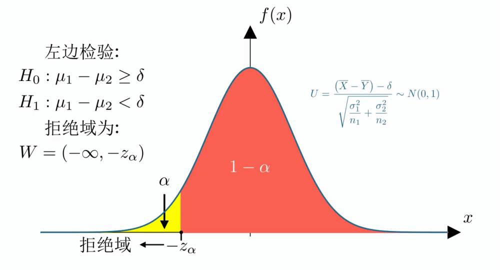


图: 左边假设检验

右边检验 (其中 δ 为已知常数)

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$$

的拒绝域为

$$W = (z_\alpha, +\infty)$$

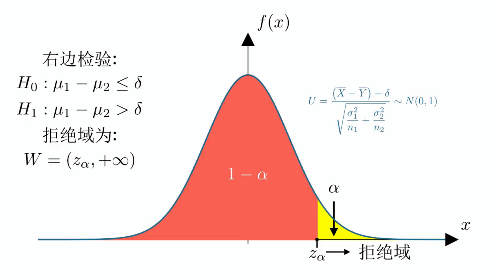


图: 右边假设检验

2. 总体方差 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知，关于 $\mu_1 - \mu_2$ 的双边假设检验 (t 检验)

2. 总体方差 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知，关于 $\mu_1-\mu_2$ 的双边假设检验 (t 检验)

(1) 提出原假设和备择假设:

$$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta, H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$$

2. 总体方差 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知，关于 $\mu_1 - \mu_2$ 的双边假设检验 (t 检验)

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta, H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中 $S_W = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$.

2. 总体方差 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知，关于 $\mu_1-\mu_2$ 的双边假设检验 (t 检验)

(1) 提出原假设和备择假设:

$$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta, H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta$$

(2) 选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $S_W=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

(3) 对于显著性水平 α，确定临界值 $\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$，得到双边拒绝域

$$W=\left(-\infty,-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)\bigcup\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2),+\infty\right)$$

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$t=\frac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{s_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$$

若 $t\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$t = \frac{(\overline{x} - \overline{y}) - \delta}{s_W \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

若 $t \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$t=\frac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{s_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$$

若 $t\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

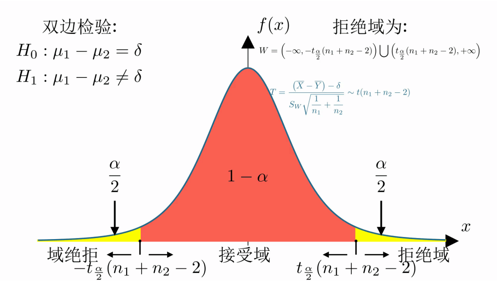


图: 双边假设检验

类似可得，左边检验 (其中 δ 为已知常数)

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

的拒绝域为

$$W = (-\infty, -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2))$$

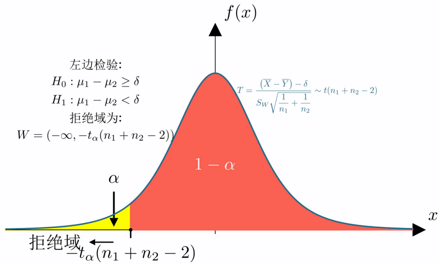


图: 左边假设检验

右边检验 (其中 δ 为已知常数)

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \le \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$$

的拒绝域为

$$W = (t_\alpha(n_1+n_2-2), +\infty)$$

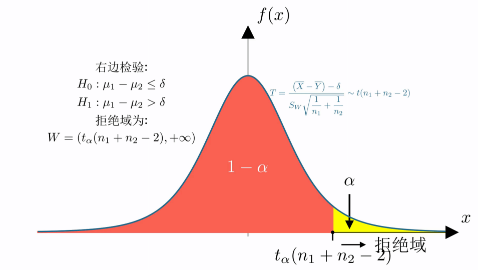


图: 右边假设检验

例 4

有两个品牌啤酒，现要比较饮用两种啤酒后平均血液酒精浓度 (单位：毫克/100 毫升) 是否相同，随机抽取 8 人饮用 A 牌啤酒 1000 毫升，1 小时后测得血液酒精浓度分别为

$$62.3, 67.2, 64.5, 65.4, 64.8, 63.6, 63.9, 64.3$$

随机抽取 6 人饮用 B 牌啤酒 1000 毫升，1 小时后测得血液酒精浓度分别为

$$60.3, 62.5, 64.4, 62.8, 60.7, 61.9$$

设饮用 A 牌啤酒的人血液酒精浓度 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，饮用 B 牌啤酒的人血液酒精浓度 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，取显著性水平 $\alpha = 0.05$，问饮用两种啤酒后平均血液酒精浓度是否有显著差异.

例 4

有两个品牌啤酒，现要比较饮用两种啤酒后平均血液酒精浓度 (单位：毫克/100 毫升) 是否相同，随机抽取 8 人饮用 A 牌啤酒 1000 毫升，1 小时后测得血液酒精浓度分别为

$$62.3, 67.2, 64.5, 65.4, 64.8, 63.6, 63.9, 64.3$$

随机抽取 6 人饮用 B 牌啤酒 1000 毫升，1 小时后测得血液酒精浓度分别为

$$60.3, 62.5, 64.4, 62.8, 60.7, 61.9$$

设饮用 A 牌啤酒的人血液酒精浓度 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，饮用 B 牌啤酒的人血液酒精浓度 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，取显著性水平 $\alpha = 0.05$，问饮用两种啤酒后平均血液酒精浓度是否有显著差异.

解: 由题意提出如下假设 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0, H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$

当 H_0 为真，两个样本容量分别为 $n_1=8, n_2=6$，取检验统计量

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(8+6-2)$$

其中 $S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

当 H_0 为真，两个样本容量分别为 $n_1 = 8, n_2 = 6$，取检验统计量

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \frac{(\overline{X} - \overline{Y})}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(8+6-2)$$

其中 $S_W = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

显著性水平 $\alpha = 0.05$，查 t 分布表得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) = t_{\frac{0.05}{2}}(12) = 2.18$，

于是双边拒绝域为

$$W = \left(-\infty, -t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right) \bigcup \left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2), +\infty\right)$$
$$= (-\infty, -2.18) \cup (2.18, +\infty)$$

由样本值计算得到

$$\overline{x} = 64.5, \overline{y} = 62.1, s_1^2 = 2.034, s_2^2 = 2.236, s_W = 1.455$$

由样本值计算得到

$$\overline{x} = 64.5, \overline{y} = 62.1, s_1^2 = 2.034, s_2^2 = 2.236, s_W = 1.455$$

进而计算得到检验统计量的观测值

$$t = \frac{(\overline{x} - \overline{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_W\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{64.5 - 62.1}{1.455\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}}} = 3.05$$

由样本值计算得到

$$\overline{x}=64.5,\overline{y}=62.1,s_1^2=2.034,s_2^2=2.236,s_W=1.455$$

进而计算得到检验统计量的观测值

$$t=\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{64.5-62.1}{1.455\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}}}=3.05$$

因为 $t=3.05\in W$，所以拒绝原假设 H_0，即认为饮用两种啤酒后平均血液酒精浓度有显著性差异.

四、两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中，方差 σ_1^2,σ_2^2 的检验

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且总体 X 与总体 Y 相互独立，抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个样本分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，样本方差为 S_1^2 与 S_2^2. 取显著性水平为 α.

四、两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中，方差 σ_1^2,σ_2^2 的检验

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且总体 X 与总体 Y 相互独立，抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个样本分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$, 样本方差为 S_1^2 与 S_2^2. 取显著性水平为 α.

(1) 提出原假设和备择假设:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

四、两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中，方差 σ_1^2,σ_2^2 的检验

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且总体 X 与总体 Y 相互独立，抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个样本分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，样本方差为 S_1^2 与 S_2^2. 取显著性水平为 α.

(1) **提出原假设和备择假设:**

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

(2) **选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量**

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

四、两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中，方差 σ_1^2,σ_2^2 的检验

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且总体 X 与总体 Y 相互独立，抽取容量为 n_1 和 n_2 的两个样本分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，样本方差为 S_1^2 与 S_2^2. 取显著性水平为 α.

(1) 提出原假设和备择假设:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

(2) 选定统计量：当 H_0 为真时，取检验统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

(3) 对于给定的显著性水平 α，确定临界值 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 和 $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$，得到双边拒绝域

$$W=\left(0,F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right)\bigcup\left(F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1),+\infty\right)$$

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

若 $f \in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(4) **计算判断：由样本值计算统计量取值**

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

若 $f \in W$，**拒绝接受** H_0，**否则接受** H_0.

(4) 计算判断：由样本值计算统计量取值

$$f=\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

若 $f\in W$，拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

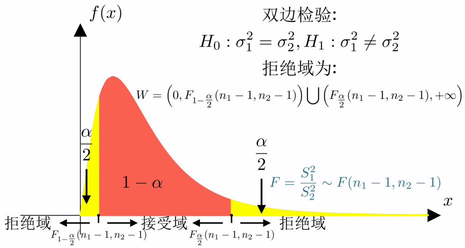


图: 双边假设检验

类似可得，左边检验

$$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

的拒绝域为

$$W = (0, F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1))$$

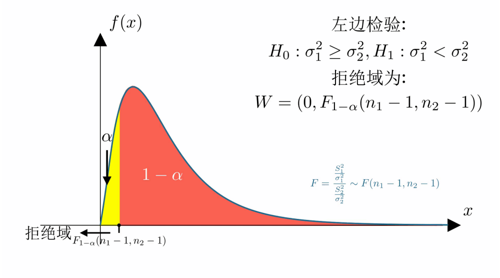


图: 左边假设检验

右边检验

$$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

的拒绝域为

$$W = (F_\alpha(n_1-1, n_2-1), +\infty)$$

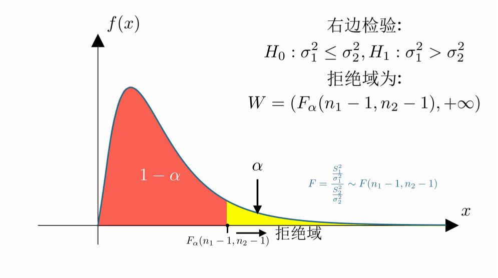


图: 右边假设检验

例 5

某糖果厂引进甲、乙两种型号分装机，设两种机型分装糖果的重量均服从正态分布，从甲型机分装的糖果中随机取 9 袋，测得重量的样本方差 $s_1^2=0.17$，从乙型机分装的糖果中随机取 6 袋，测得重量的样本方差 $s_2^2=0.14$. 取显著性水平 $\alpha=0.1$，问这两种机型分装糖果重量的方差是否有显著差异?

例 5

某糖果厂引进甲、乙两种型号分装机，设两种机型分装糖果的重量均服从正态分布，从甲型机分装的糖果中随机取 9 袋，测得重量的样本方差 $s_1^2 = 0.17$，从乙型机分装的糖果中随机取 6 袋，测得重量的样本方差 $s_2^2 = 0.14$．取显著性水平 $\alpha = 0.1$，问这两种机型分装糖果重量的方差是否有显著差异?

解: 由题意提出如下假设

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

例 5

某糖果厂引进甲、乙两种型号分装机，设两种机型分装糖果的重量均服从正态分布，从甲型机分装的糖果中随机取 9 袋，测得重量的样本方差 $s_1^2 = 0.17$，从乙型机分装的糖果中随机取 6 袋，测得重量的样本方差 $s_2^2 = 0.14$．取显著性水平 $\alpha = 0.1$，问这两种机型分装糖果重量的方差是否有显著差异?

解: 由题意提出如下假设

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

当 H_0 为真，取检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

两个样本容量分别为 $n_1 = 9, n_2 = 6$，对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.1$，查 F 分布表得 $F_{0.95}(8,5) = 0.27$，$F_{0.05}(8,5) = 4.82$，于是双边拒绝域为

$$
\begin{aligned}
W &= \left(0, F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right) \bigcup \left(F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1), +\infty\right) \\
&= (0, 0.27) \cup (4.82, +\infty)
\end{aligned}
$$

两个样本容量分别为 $n_1 = 9, n_2 = 6$，对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.1$，查 F 分布表得 $F_{0.95}(8,5) = 0.27$，$F_{0.05}(8,5) = 4.82$，于是双边拒绝域为

$$\begin{aligned} W &= \left(0, F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right) \bigcup \left(F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1), +\infty\right) \\ &= (0, 0.27) \cup (4.82, +\infty) \end{aligned}$$

由 $s_1^2 = 0.17, s_2^2 = 0.14$，计算得到检验统计量的观测值

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.214$$

两个样本容量分别为 $n_1=9, n_2=6$，对于给定的显著性水平 $\alpha=0.1$，查 F 分布表得 $F_{0.95}(8,5)=0.27$，$F_{0.05}(8,5)=4.82$，于是双边拒绝域为

$$\begin{aligned} W &= \left(0, F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right) \bigcup \left(F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1), +\infty\right) \\ &= (0, 0.27) \cup (4.82, +\infty) \end{aligned}$$

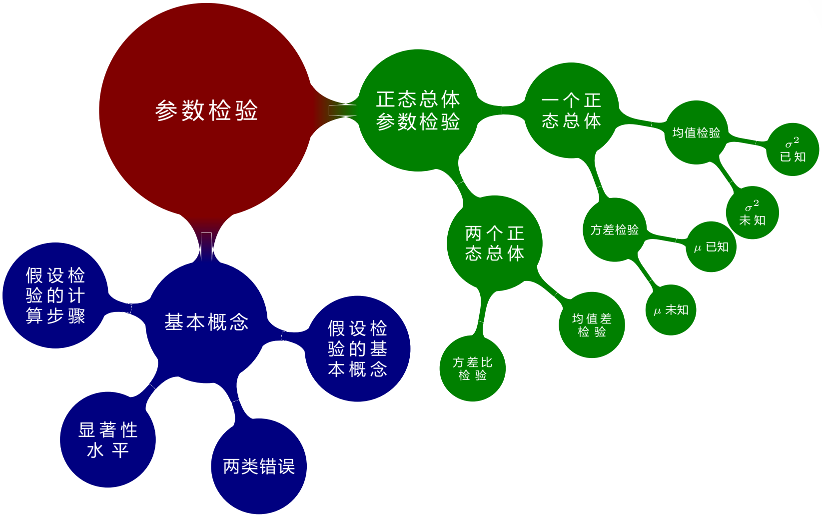
由 $s_1^2=0.17, s_2^2=0.14$，计算得到检验统计量的观测值

$$f=\frac{s_1^2}{s_2^2}=1.214$$

因为 $f=1.214 \notin W$，所以不能拒绝原假设 H_0，即这两种机型分装糖果重量的方差没有显著差异.

假设检验习题

知识点总结



参数检验
正态总体参数检验
一个正态总体
均值检验
σ^2 已知
σ^2 未知
方差检验
μ 已知
μ 未知
两个正态总体
均值差检验
方差比检验
基本概念
假设检验的计算步骤
假设检验的基本概念
显著性水平
两类错误

例 1

对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.05 下接受 $H_0: \mu = \mu_0$，那么在显著性水平 0.01 下，下列结论正确的是 ______.

(A) 必接受 H_0;

(B) 可能接受，也可能拒绝 H_0;

(C) 必拒绝 H_0;

(D) 不接受，也不拒绝 H_0.

例 1

对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.05 下接受 $H_0 : \mu = \mu_0$，那么在显著性水平 0.01 下，下列结论正确的是 ______.

(A) 必接受 H_0;

(B) 可能接受，也可能拒绝 H_0;

(C) 必拒绝 H_0;

(D) 不接受，也不拒绝 H_0.

解：在 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0，说明统计量的测量值落在接受域.

例 1

对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.05 下接受 $H_0 : \mu = \mu_0$，那么在显著性水平 0.01 下，下列结论正确的是 ______.

(A) 必接受 H_0;

(B) 可能接受，也可能拒绝 H_0;

(C) 必拒绝 H_0;

(D) 不接受，也不拒绝 H_0.

解：在 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0，说明统计量的测量值落在接受域.
$\alpha = 0.05$ 变为 $\alpha = 0.01$，临界值向实数轴两侧移动，接受域变大.

例 1

对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.05 下接受 $H_0 : \mu = \mu_0$，那么在显著性水平 0.01 下，下列结论正确的是 $\underline{\quad A \quad}$.

(A) 必接受 H_0;

(B) 可能接受，也可能拒绝 H_0;

(C) 必拒绝 H_0;

(D) 不接受，也不拒绝 H_0.

解：在 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0，说明统计量的测量值落在接受域.
$\alpha = 0.05$ 变为 $\alpha = 0.01$，临界值向实数轴两侧移动，接受域变大.
故统计量的测量值仍落在接受域，故选 A.

例 2

对正态总体的数学期望 μ 进行区间估计，得到置信度为 0.95 的置信区间为 $(9.5, 10.5)$，若在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下对 μ 进行假设检验，$H_0 : \mu = 9, H_1 : \mu \neq 9$，则下列结论正确的是 ______.

(A) 必接受 H_0;

(B) 可能接受，也可能拒绝 H_0;

(C) 必拒绝 H_0;

(D) 不接受，也不拒绝 H_0.

例 2

对正态总体的数学期望 μ 进行区间估计，得到置信度为 0.95 的置信区间为 $(9.5, 10.5)$，若在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下对 μ 进行假设检验，$H_0 : \mu = 9, H_1 : \mu \neq 9$，则下列结论正确的是 ______.

(A) 必接受 H_0;

(B) 可能接受，也可能拒绝 H_0;

(C) 必拒绝 H_0;

(D) 不接受，也不拒绝 H_0.

解：μ 的置信度为 $1 - \alpha = 0.95$ 的置信区间为 $(9.5, 10.5)$，
因为 $9 \notin (9.5, 10.5)$，所以当 $\mu = 9$ 时，拒绝接受 H_0 可能会犯错误，犯错误的概率为 $1 - 0.95 = \alpha$，
这恰是显著水平的定义，所以在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝接受 H_0.

例 2
对正态总体的数学期望 μ 进行区间估计，得到置信度为 0.95 的置信区间为 $(9.5, 10.5)$，若在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下对 μ 进行假设检验，$H_0 : \mu = 9, H_1 : \mu \neq 9$，则下列结论正确的是 $\underline{\quad C \quad}$.

(A) 必接受 H_0;

(B) 可能接受，也可能拒绝 H_0;

(C) 必拒绝 H_0;

(D) 不接受，也不拒绝 H_0.

解：μ 的置信度为 $1 - \alpha = 0.95$ 的置信区间为 $(9.5, 10.5)$，
因为 $9 \notin (9.5, 10.5)$，所以当 $\mu = 9$ 时，拒绝接受 H_0 可能会犯错误，犯错误的概率为 $1 - 0.95 = \alpha$，
这恰是显著水平的定义，所以在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝接受 H_0.

例 3

对总体 X 的概率密度进行假设检验，原假设为

$$H_0: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

对 X 进行一次采用得到 X_1，假定当 $X_1 \ge \frac{3}{2}$ 时拒绝假设 H_0，则此检验的显著性水平 $\alpha =$ ________.

例 3

对总体 X 的概率密度进行假设检验，原假设为

$$H_0: f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对 X 进行一次采用得到 X_1，假定当 $X_1\ge\frac{3}{2}$ 时拒绝假设 H_0，则此检验的显著性水平 $\alpha=$ ________.

解：由显著性水平的定义可知

$$\alpha=P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\}=P\left\{X_1\ge\frac{3}{2}|X\text{的概率密度为真}\right\}$$

$$=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

例 4

设某次考试考生的外语成绩 X 服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，得到样本均值 $\overline{x} = 66.5$，样本标准差 $s = 15$，问在显著性水平 α 下，能否可以认为这次考试全部考生的平均成绩为 70 分? $(t_{0.05}(35) = 1.6896, t_{0.05}(36) = 1.6883, t_{0.025}(35) = 2.0301, t_{0.025}(36) = 2.0281)$

例 4

设某次考试考生的外语成绩 X 服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，得到样本均值 $\overline{x}=66.5$，样本标准差 $s=15$，问在显著性水平 α 下，能否可以认为这次考试全部考生的平均成绩为 70 分? $(t_{0.05}(35)=1.6896, t_{0.05}(36)=1.6883, t_{0.025}(35)=2.0301, t_{0.025}(36)=2.0281)$

解：提出假设

$$H_0:\mu=70, H_1:\mu\neq 70$$

例 4

设某次考试考生的外语成绩 X 服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，得到样本均值 $\overline{x} = 66.5$，样本标准差 $s = 15$，问在显著性水平 α 下，能否可以认为这次考试全部考生的平均成绩为 70 分? $(t_{0.05}(35) = 1.6896, t_{0.05}(36) = 1.6883, t_{0.025}(35) = 2.0301, t_{0.025}(36) = 2.0281)$

解：提出假设

$$H_0 : \mu = 70, H_1 : \mu \neq 70$$

当 H_0 为真时，取检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，样本容量 $n = 36$ 可知临界值

$$\pm t_{0.025}(35) = 2.0301$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$**，样本容量** $n = 36$ **可知临界值**

$$\pm t_{0.025}(35) = 2.0301$$

于是拒绝域为

$$W = (-\infty, -2.0301) \bigcup (2.0301, +\infty)$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，样本容量 $n = 36$ 可知临界值

$$\pm t_{0.025}(35) = 2.0301$$

于是拒绝域为

$$W = (-\infty, -2.0301) \bigcup (2.0301, +\infty)$$

由样本均值 $\overline{x} = 66.5$，样本方差为 $s = 15$，计算出检验统计量 T 的观察值

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{66.5 - 70}{\frac{15}{\sqrt{36}}} = -1.4$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，样本容量 $n = 36$ 可知临界值

$$\pm t_{0.025}(35) = 2.0301$$

于是拒绝域为

$$W = (-\infty, -2.0301) \bigcup (2.0301, +\infty)$$

由样本均值 $\overline{x} = 66.5$，样本方差为 $s = 15$，计算出检验统计量 T 的观察值

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{66.5 - 70}{\frac{15}{\sqrt{36}}} = -1.4$$

因为 $t = -1.4 \notin W$ ，故接受原假设，认为这次考试全部考生的平均成绩为 70 分.

概率论与数理统计

概率论与数理统计教研团队[1]

[1] 数学科学学院
哈尔滨工程大学

2024 年　春

大工至善
大学至真

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY