概率论与数理统计

Probability and Statistics

—概率论与数理统计教学组—

哈尔滨工程大学

第3章 多维随机变量及其分布

3.1 二维随机变量

学习要点

- 二维随机变量及其分布函数
- 二维离散型随机变量
- 二维连续型随机变量

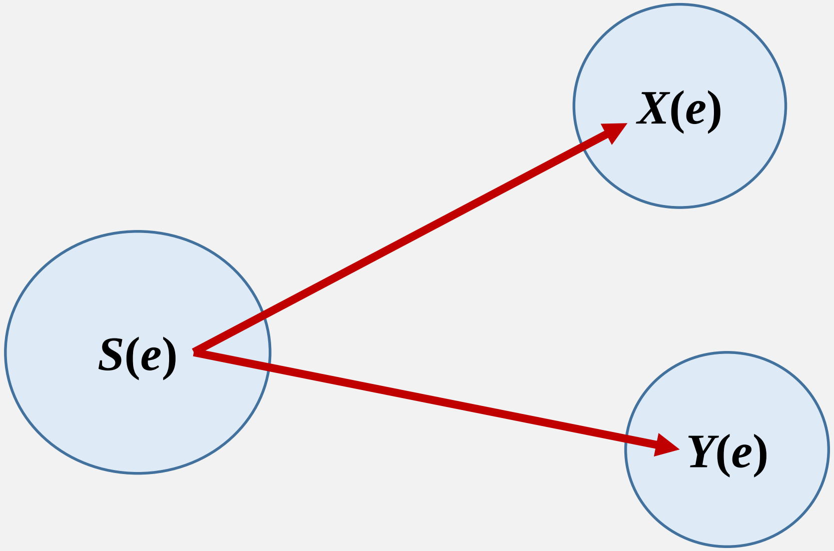
二维随机变量

一、多维随机变量引言（一维描述不够）

- **船舶运动姿态**—六自由度.
- **卫星设备定位**—经度、纬度、高度.
- **企业经济效益**—劳动生产率、资金产值率、资金利润等更多个.

二、二维随机变量定义

定义 1 设 E 是一个随机试验，样本空间 $S=\{e\}$，$X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，则称向量 $\big(X(e),Y(e)\big)$ 为 S 上的二维随机变量或二维随机向量，简记为 (X,Y).

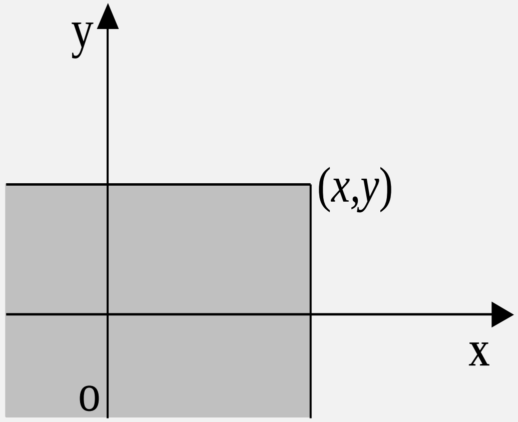


三、二维随机变量分布函数

定义 2 设(X,Y)为二维随机变量，对$\forall x, y \in \mathrm{R}$，二元函数

$$F(x,y) = P\left\{\left(X \le x\right)\cap\left(Y \le y\right)\right\} = P\{X \le x, Y \le y\}$$

称为二维随机变量(X,Y) 的**分布函数**，或称为**随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.**



$F(x,y)$几何意义：

点(X,Y)落在左下方的无穷矩形域内的概率.

四、二维随机变量分布函数性质

(1) $0 \le F(x,y) \le 1$,

不可能事件： 对任意实数 x 和 y，有

$$F(-\infty,y)=0;\ \ F(x,-\infty)=0;\ \ F(-\infty,-\infty)=0.$$

必然事件： $F(+\infty,+\infty)=1.$

(2) $F(x,y)$是变量 x 和变量 y 的**单调不减**函数.

当$x_2 > x_1$时，$F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$；当$y_2 > y_1$时，$F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

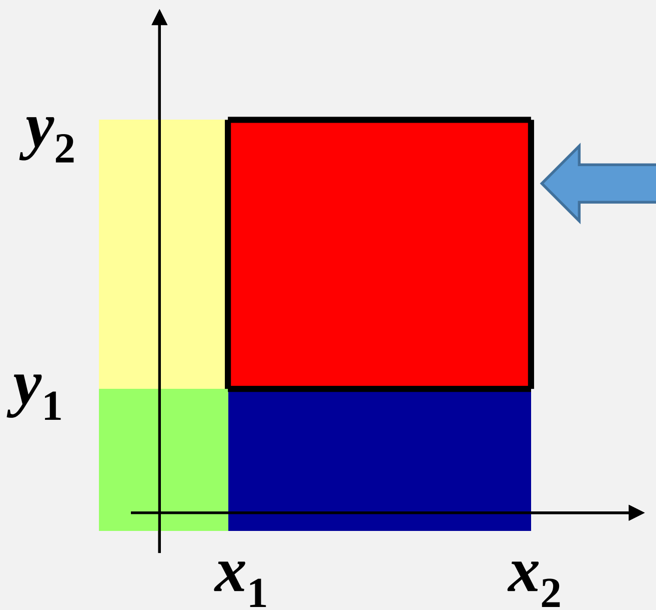
(3) $F(x,y)$对每个自变量**右连续**.

$$F(x,y)=F(x+0,y);\quad F(x,y)=F(x,y+0).$$

评注： 性质（1）-（3）是判断$F(x,y)$是否为某二维随机变量的分布函数的**充要条件**.

(4) 对于任意(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，当$x_1<x_2$，$y_1<y_2$时，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$$



随机向量(X,Y)落在矩形域

$$\{(X,Y)\mid x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\}$$

的概率.

五、二维离散型随机变量

定义 3 设二维随机变量(X,Y)所有可能取值为有限对或可列无穷多对，则称(X,Y)为二维离散型随机变量.

设二维离散型随机变量(X,Y)的一切可能取值为$(x_i,y_i),(i,j=1,2,\cdots)$，记

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},(i,j=1,2,\cdots)$$

称为二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布或分布律，或随机变量X和Y的联合分布律.

联合分布律

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

满足： (1) $p_{ij} \geq 0;$ (2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

分布函数： $F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x}\sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

例 1 设盒子中有 7 张卡片，其中 2 张一等奖，2 张二等奖，3 张三等奖，现从中任取 4 张，以随机变量 X 表示取到一等奖的张数，随机变量 Y 表示取到三等奖的张数，(1) 求 (X,Y) 的分布律；(2) 求 $F(1,1)$.

解 (1) X 的可能取值为 $0,1,2$，Y 的可能取值为 $0,1,2,3$，且分别计算每一种事件发生的概率，如

$$P\{X=0,Y=0\}=0;\quad P\{X=0,Y=1\}=0;$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{3}{35};\quad P\{X=1,Y=2\}=\frac{C_2^1C_3^2C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35},\quad \cdots$$

因此分布律为 X

Y \ X	0	1	2
0	0	0	$1/35$
1	0	$6/35$	$6/35$
2	$3/35$	$12/35$	$3/35$
3	$2/35$	$2/35$	0

(2) $F\left(1,1\right)=P\left\{X\le 1,Y\le 1\right\}=\sum_{i\le 1}\sum_{j\le 1}p_{ij}=\frac{6}{35}.$

六、二维连续型随机变量

定义 4 二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，如果存在非负函数$f(x,y)$,使得对于任意实数x,y有

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量,函数$f(x,y)$称为二维随机变量(X,Y)的概率密度或密度函数，也称为随机变量X和Y的联合概率密度.

性质:

(1) $f(x,y)\geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = F(+\infty,+\infty)=1.$

(3) $f(x,y)$的连续点处，有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}= f(x,y).$

(4) 设G为任意平面区域，则

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy\ .$$

评注: 性质（1)、(2）是判断$f(x,y)$是否为某二维随机变量概率密度的**充要条件**.

例 2 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1)常数k；(2)分布函数$F(x,y)$；(3) 概率$P\{Y \le X\}$.

解 (1) 由性质

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} k\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}y$$

$$=k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=k\cdot\frac{1}{12}$$

因此$k=12$.

例 2 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求： (1)常数k； (2)分布函数$F(x,y)$； (3) 概率$P\{Y\le X\}$.

(2) $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{y}\mathrm{d}v\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u$

$$=\begin{cases} \int_0^y \mathrm{d}v\int_0^x 2\mathrm{e}^{-(3u+4v)}\mathrm{d}u, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}), & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 2 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

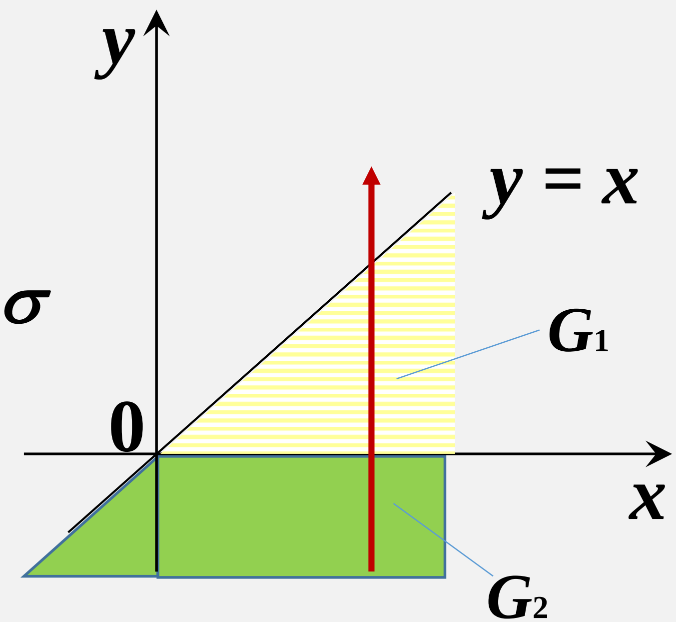
$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求： (1)常数k； (2)分布函数$F(x,y)$; (3) 概率$P\{Y\le X\}$.

(3) $P\{Y\le X\}=\iint\limits_{G_1+G_2} f(x,y)d\sigma$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{x}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}y+\iint\limits_{G_2}0d\sigma$$

$$=\frac{4}{7}.$$



小结 二维随机变量

- 二维随机变量及分布函数定义及性质
- 二维离散型随机变量
- 二维连续型随机变量

谢谢您的观看

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY