概率论与数理统计

Probability and Statistics

—概率论与数理统计教学组—

哈尔滨工程大学

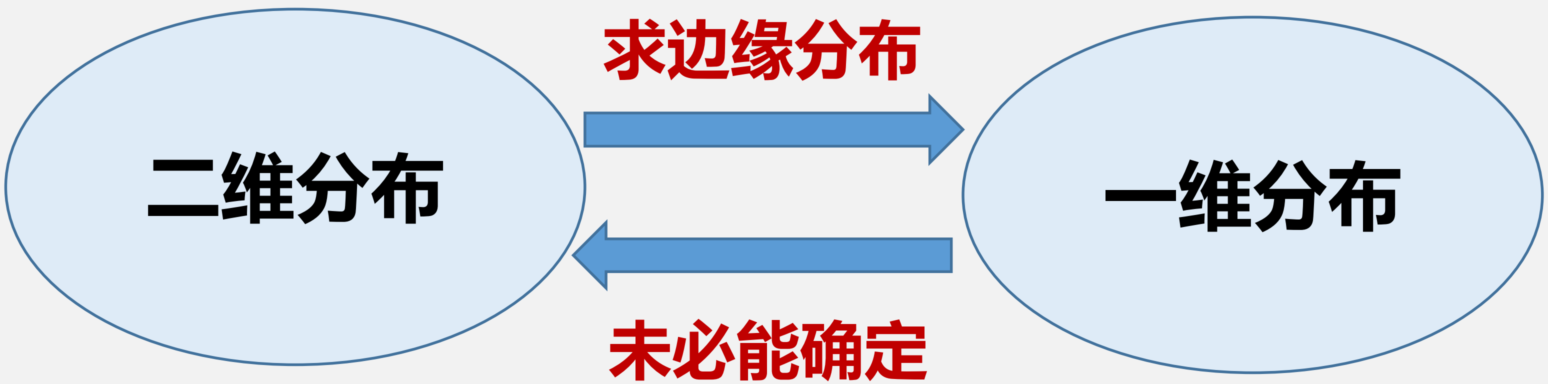
第3章　多维随机变量及其分布

3.4　随机变量的独立性

学习要点

- 二维离散型随机变量的独立性
- 二维连续型随机变量的独立性
- *n*维随机变量简介

一、 随机变量的独立性



需研究各随机变量的依赖关系！

定义 设$F(x,y)$和$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数和边缘分布函数. 如果对于任意实数x,y有

$$P\{X \le x,Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量X与Y是**相互独立**的.

若记$A=\{X \le x\}$、$B=\{Y \le y\}$, 则上式为$P(AB)=P(A)P(B)$,

即**随机变量相互独立**的定义与两个**事件相互独立**的定义一致.

二、二维离散型随机变量的独立性

若(X,Y)为二维离散型随机变量，则X与Y相互独立的充要条件为，对于(X,Y)的所有可能取值(x_i,y_j)，有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},i,j=1,2,\cdots$$

此时，

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=P\{X=x_i\},$$

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=P\{Y=y_j\},$$

$$(i,j=1,2,\cdots).$$

$$p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}$$

三、二维连续型随机变量的独立性

若(X,Y)为二维连续型随机变量，$f(x,y)$、$f_X(x)$、$f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度和边缘概率密度， 则X与Y相互独立的充要条件为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

判断依据

随机变量的独立性

例 1 设(X,Y)的分布律如下，

$Y \backslash X$	0	1
0	0.2	0.2
1	0.3	0.3

(1) 求X与Y的边缘分布律，

(2) 判断X与Y是否独立.

解 (1) 易知X与Y的边缘分布律为

X	0	1
$p_{i\cdot}$	0.5	0.5

Y	0	1
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6

也可将(X,Y)的分布律及边缘分布律合并：

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	0.2	0.2	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$p_{i\cdot}$	0.5	0.5	

例 1 设(X,Y)的分布律如下，

(1) 求X与Y的边缘分布律，

(2) 判断X与Y是否独立.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	0.2	0.2	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$p_{i\cdot}$	0.5	0.5	

解 (2)

$$p_{11}=0.2=0.5\times 0.4=p_{1\cdot}\times p_{\cdot 1}$$

$$p_{12}=0.3=0.5\times 0.6=p_{1\cdot}\times p_{\cdot 2}$$

$$p_{21}=0.2=0.5\times 0.4=p_{2\cdot}\times p_{\cdot 1}$$

$$p_{22}=0.3=0.5\times 0.6=p_{2\cdot}\times p_{\cdot 2}$$

综上， 对任意i,j有$p_{ij}=p_{i\cdot}\times p_{\cdot j}$，则$X$与$Y$相互独立.

例 2 设(X,Y)的分布律及边缘分布律如下，判断X与Y是否独立.

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	0.1	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.4
2	0.3	0.1	0.4
$p_{i\cdot}$	0.5	0.5	

解

$$p_{11} = 0.1 = 0.5 \times 0.2 = p_{1\cdot} \times p_{\cdot 1}$$

$$p_{22} = 0.3 \neq 0.5 \times 0.4 = p_{2\cdot} \times p_{\cdot 2}$$

则X与Y**不独立**.

注意：只要有一个$p_{ij} \neq p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$，则$X$与$Y$**不独立**.

例 3 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 4e^{-2x-2y}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

判断X,Y是否相互独立?

解 关于X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^{+\infty} 4e^{-2x-2y}dy = 2e^{-2x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

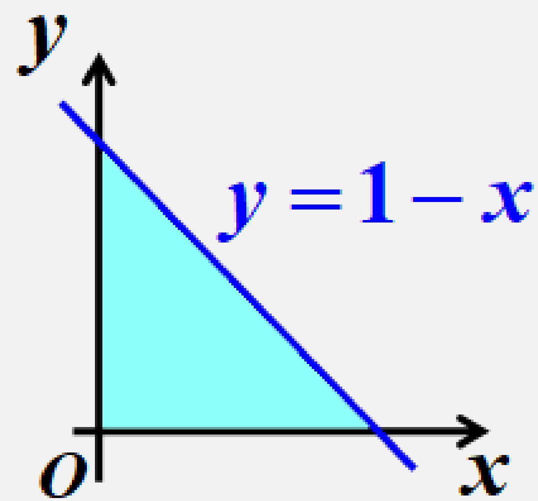
同理，Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

对任意的实数x,y，都有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，则X与Y相互独立.

例 4 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & x>0,\ 0<y<1-x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

判断X,Y是否相互独立?



解 关于X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}\int_0^{1-x}2\mathrm{d}y=2(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理，Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

例 4 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & x>0, 0<y<1-x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

判断X,Y是否相互独立?

解 $f_X(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故X与Y**不独立**.

说明 可带入特殊点说明不独立，如:

由$f(\frac{3}{4},\frac{3}{4})=0$, $f_X(\frac{3}{4})=\frac{1}{2}$, $f_Y(\frac{3}{4})=\frac{1}{2}$，则$X$与$Y$**不独立**.

例 5 设(X,Y)服从二维正态分布，即

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

证明：X与Y相互独立的充要条件是$\rho=0$.

证明 由 2.2 例 4，二维正态分布的**边缘分布均为一维正态分布**.

即 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

则 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$.

$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，有

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，有

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

当$\rho=0$时，对任意x,y，有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，即X与Y相互独立.

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，有

$$f(x,y)=\boxed{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\boxed{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}\right]\right\}$$

$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，有

$$f_X(x)f_Y(y)=\boxed{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\boxed{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}\right]\right\}$$

反之，若 X 与 Y 相互独立，则对任意 x,y 有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

令 $x=\mu_1,y=\mu_2$，则有 $\boxed{\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}}$，**即** $\rho=0$.

说明 若(X,Y)服从二维正态分布，即

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

则（1） $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

（2） X与Y相互独立的充要条件是$\rho=0$.

四、n 维随机向量简介

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e),\cdots,X_n=X_n(e)$ 是定义在 S 上的 n 个随机变量. 由它们构成的随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 n 维随机变量或 n 维随机向量，X_i 称为 X 的第 i 个分量（或坐标）.

二维随机变量 ⟶ n 维随机变量

（1）分布函数

对任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，称

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

为 n 维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的**分布函数**.

Harbin Engineering University 哈尔滨工程大学

(2) n 维离散型随机变量及其分布律

若 n 维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的所有可能取值是有限组或可列无穷多组，则称$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为 **n 维离散型随机变量**，能表示出$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的所有可能取值及取值概率的表达式，称为 n 维离散型随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的**分布律**.

（3）n 维连续型随机变量及其概率密度函数

若存在非负可积函数，使对任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

则称$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为 n 维连续型随机变量，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的概率密度函数.

(4) 边缘分布

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为已知，则$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的$k(1 \le k < n)$维边缘分布函数就随之确定.

例如，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的关于X_1与(X_1, X_2)的**边缘分布函数**分别为

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$$

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, +\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$$

例如，若$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为 n 维离散型随机变量则$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的关于X_1与(X_1, X_2)的**边缘分布律**分别为

$$P(X_1 = x_{1i_1}) = \sum_{i_2, i_3, \cdots, i_n} P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n}),$$

$$P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}) = \sum_{i_3, i_4, \cdots, i_n} P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n}).$$

例如，若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为 n 维连续型随机变量，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度，则$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的关于X_1与(X_1,X_2)的**边缘概率密度**分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_2dx_3\cdots dx_n$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_3dx_4\cdots dx_n$$

(5）相互独立

若对任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且同分布，简称**独立同分布**，若 $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的分布函数为 $F(x)$，概率密度为 $f(x)$，则

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

随机变量的独立性

若对于所有的$X_1,X_2,\cdots,X_m$，$Y_1,Y_2,\cdots Y_n$有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)$$
$$=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

其中F_1,F_2,F依次为随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$,$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$和$(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的分布函数，则称随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$是**相互独立的**.

随机变量的独立性

哈尔滨工程大学 Harbin Engineering University

定理 1 设$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立，则$X_i\,(i=1,2,\cdots,m)$与$Y_j\,(j=1,2,\cdots,n)$相互独立.

定理 2 设$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立，若$h(x_1,x_2,\cdots,x_m)$和$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是连续函数，则$h(x_1,x_2,\cdots,x_m)$和$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$相互独立.

小结 随机变量的独立性

- 二维随机变量相互独立的思想
- 二维离散型随机变量的独立性判别
- 二维连续型随机变量的独立性判别
- n维随机变量（向量）含义

谢谢您的观看

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY