

2.1 状态空间描述

➤(1) **输入—输出描述**: 描述系统输入—输出变量关系的模型, 如传递函数、微分方程等, 是一种外部、不完全描述描述, 仅描述系统的外部特性, 不能反映系统的内部结构特征。

➤(2) **状态空间描述**: 通过建立系统内部状态和系统的输入以及输出之间的数学关系, 来描述系统的行为。是一种内部、完全描述描述, 不仅描述系统的外部特性, 还能反映系统的内部结构特征。



关于状态变量的几点说明



哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

- **独立性：** 状态变量之间线性独立。
- **多样性：** 状态变量组选取上的不唯一性。
- **等价性：** 同一物理系统状态的向量间存在线性变换。
 - 状态变量不是所有变量的总和。
 - 输出量可以选作状态变量。
 - 输入量不允许选作状态变量。
 - 状态变量有时是不可测量的。
 - 状态变量是时间域的。
- **现实性：** 状态变量可以选为涵义明确的物理量，其数目等于且仅仅等于系统中包含独立贮能元件的数目。
- **抽象性：** 状态变量可以没有物理意义，凸显系统某一性质。



状态空间表达式： 状态方程与输出方程的组合称为状态空间表达式，又称为动态方程或状态空间描述。

连续时间系统：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{cases}$$

线性定常连续系统：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

$\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ ——系统矩阵

$\mathbf{B} \in R^{n \times p}$ ——控制矩阵

$\mathbf{C} \in R^{q \times n}$ ——观测矩阵

$\mathbf{D} \in R^{q \times p}$ ——前馈矩阵

(简记为 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$)



一、根据系统机理建立状态空间描述



- 1) 根据系统所遵循的物理规律，建立系统的微分方程；
- 2) 选取有关物理量作为状态变量，推导出系统的状态方程和输出方程。

例 建立右图所示机械系统的状态空间表达式

(注：质量块 m 的重量已经和弹簧 k 的初始拉伸相抵消)

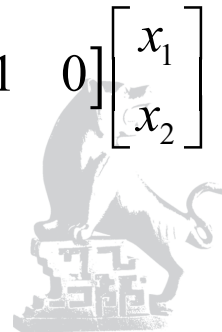
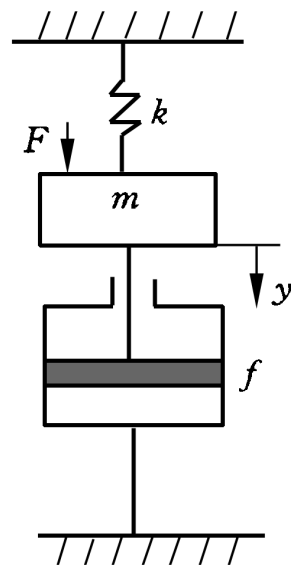
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = F$$

选择状态变量

$$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$$

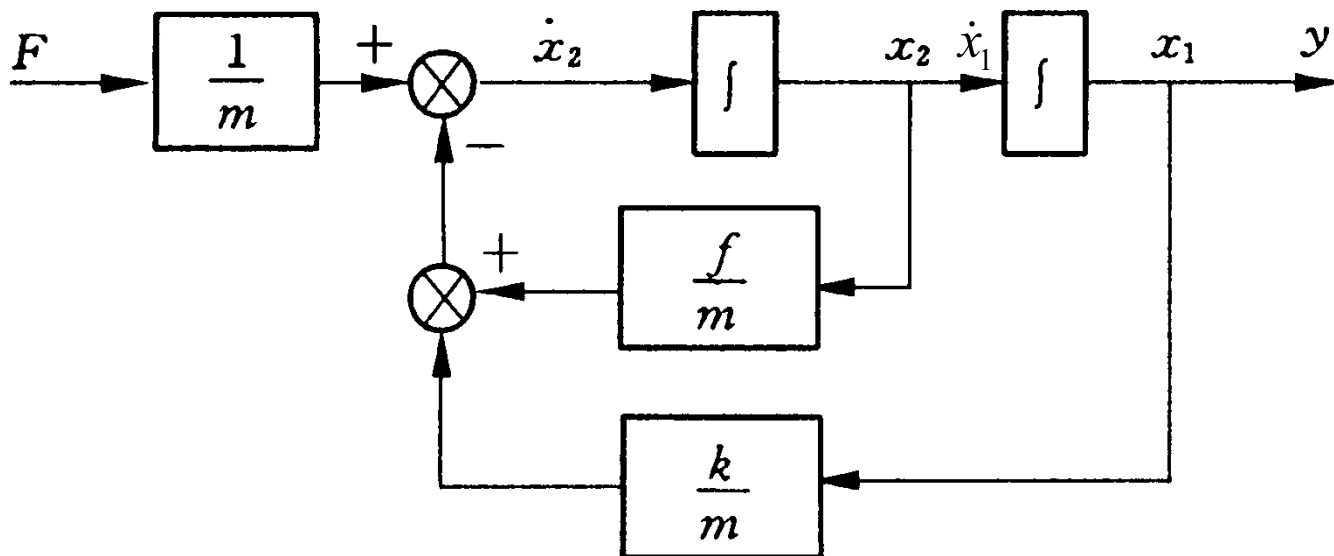
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_2 + \frac{1}{m}F \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F \quad y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

系统的结构图如下



二、由输入—输出描述导出状态空间描述



哈尔滨工程大学

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

状态实现：由输入-输出描述建立状态空间描述称为状态实现。

常用的标准实现

能控规范形实现

能观测规范形实现

对角形实现

约当规范形实现

最小实现：对于传递函数矩阵 $G(s)$ 的一个维数最低的实现，称为 $G(s)$ 的最小实现或不可约简实现。

定理：设 (A,B,C) 为传递函数矩阵的一个 n 维实现，则其为最小实现的充要条件是 $\{A,B\}$ 能控且 $\{A,C\}$ 能观测。



设单输入单输出线性定常系统(A,b,c)的传递函数为：

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{1}{\alpha(s)} c \cdot \text{adj}(sI - A) \cdot b = \frac{N(s)}{\alpha(s)}$$

式中： $\alpha(s) = \det(sI - A)$ 是特征多项式； $N(s) = c \cdot \text{adj}(sI - A) \cdot b$

$\text{adj}(sI - A)$ 为特征矩阵 $sI - A$ 的伴随矩阵。

定理：系统实现(A,b,c)为最小实现，即为能控且能观测的充要条件是， $\alpha(s)$ 与 $N(s)$ 互质。

对于传递函数矩阵 $G(s)$ ，在不同的实现之间，一般情况下不是代数等价的，但在不同的最小实现之间，则一定是代数等价的。





考虑一个单变量线性定常系统，其输入输出描述微分方程如下：

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1y^{(1)} + \alpha_0y = b_mu^{(m)} + \cdots + b_1u^{(1)} + b_0u$$

或： $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad m < n$
 $\beta_i = b_i$

$$m = n$$

$$\beta_i = b_i - a_ib_n \quad i = 0 \dots n-1$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ns^n + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + \cdots + a_1s + a_0} = b_n + \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \cdots + a_1s + a_0} = b_n + \bar{G}(s)$$

$$Y(s) = b_nU(s) + \bar{Y}(s) \quad y(t) = \bar{y}(t) + b_nu(t)$$



1. 能控规范形实现



设

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

则矩阵形式的能控规范形实现为

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

式中：

友矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

2 能观测规范形实现



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

则矩阵形式的状态方程和输出方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u$$

$$y = \mathbf{c} \mathbf{x}$$

式中：

友矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$



3 对角规范形实现

当系统传递函数只含单实极点时，还可作对角线规范形实现，该实现形式系统矩阵 A 是一个对角阵。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

传递函数作部分分式展开：
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

其中：
$$c_i = \left[\frac{N(s)}{D(s)} \cdot (s - \lambda_i) \right]_{s=\lambda_i}$$
 为 $G(s)$ 在极点 λ_i 处的留数。



4 约当规范形实现

当传递函数含有重极点时，可以化作分块对角形实现，称之为约当规范形实现。

例 系统传递函数 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s-2}{(s-3)^3} + \frac{s+1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s-1}$

求约当标规范形实现。

部分分式: $\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{(s-3)^3} + \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{0}{s-3} + \frac{-1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1}$

$$c_{im} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[\frac{Y(s)}{U(s)} (s - \lambda_i)^\sigma \right]$$

即: $c_{11} = 1, c_{12} = 1, c_{13} = 0, c_{41} = -1, c_{42} = 1, c_6 = 1$



例 系统传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s-2}{(s-3)^3} + \frac{s+1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s-1}$$

求约当标规范形实现。

部分分式改写为：

$$c_{im} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[\frac{Y(s)}{U(s)} (s - \lambda_i)^\sigma \right]$$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{(s-3)^3} + \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{0}{s-3} + \frac{-1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1}$$

即： $c_{11} = 1, c_{12} = 1, c_{13} = 0, c_{41} = -1, c_{42} = 1, c_6 = 1$



即约当规范形实现为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_{41} \\ \dot{x}_{42} \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{41} \\ x_{42} \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{41} \\ x_{42} \\ x_6 \end{bmatrix}$$



三、由方块图描述导出状态空间描述



例 设系统方块图如下，试列写其状态空间描述

解 上图等效为

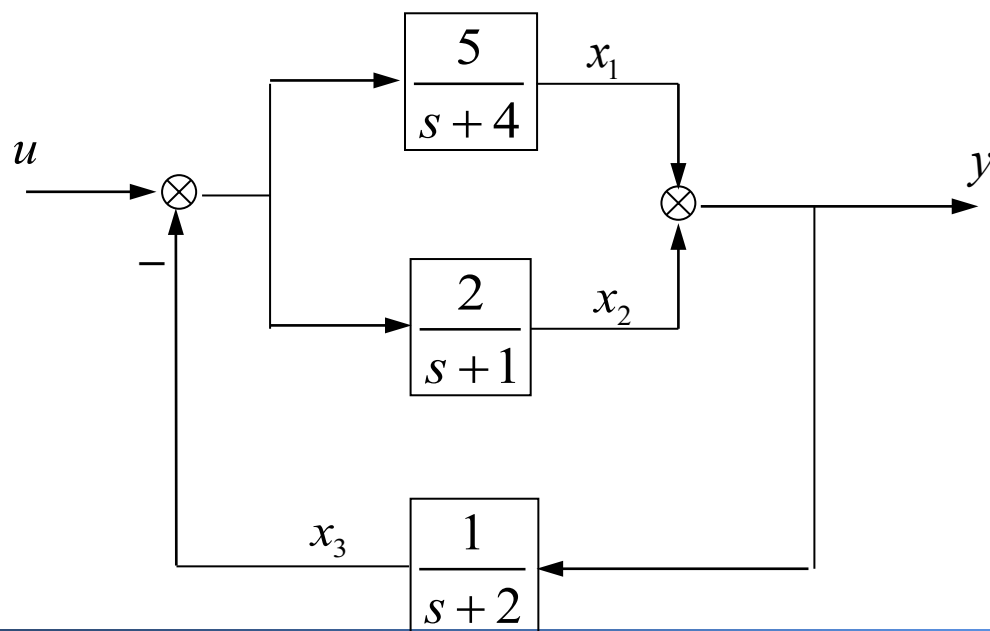
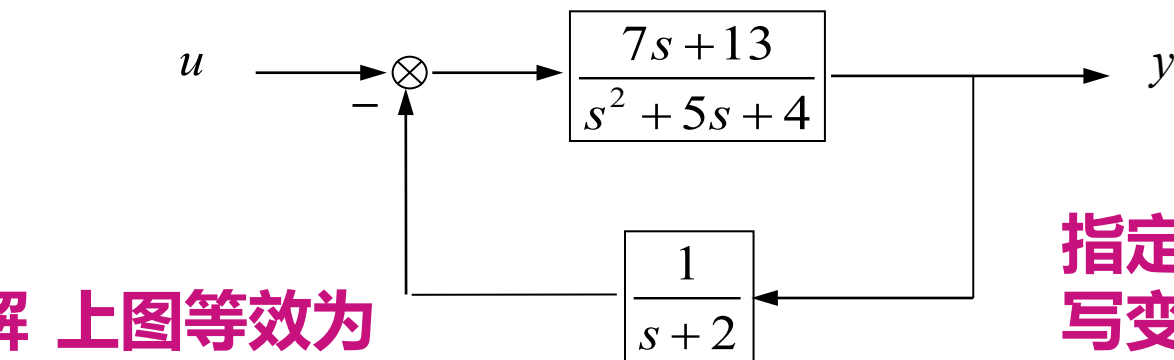
指定状态变量组后，列写变量间的关系方程：

$$x_1(s) = \frac{5}{s+4}(u(s) - x_3(s))$$

$$x_2(s) = \frac{2}{s+1}(u(s) - x_3(s))$$

$$x_3(s) = \frac{1}{s+2}y(s)$$

$$y = x_1(s) + x_2(s)$$





$$s x_1(s) = -4x_1(s) + 5(u(s) - x_3(s))$$

$$s x_2(s) = -x_2(s) + 2(u(s) - x_3(s))$$

$$s x_3(s) = -2x_3(s) + y(s)$$

$$y = x_1(s) + x_2(s)$$

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + 5(u - x_3)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + 2(u - x_3)$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + y$$

$$y = x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_1 = -4x_1 - 5x_3 + 5u$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - 2x_3 + 2u$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$y = x_1 + x_2$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



四、组合系统的状态空间描述



- 1、**组合系统**：由两个或两个以上的子系统按一定方式相互联接而构成的系统称为组合系统。
- 2、**基本的互联方式有三种：并联、串联和反馈。**

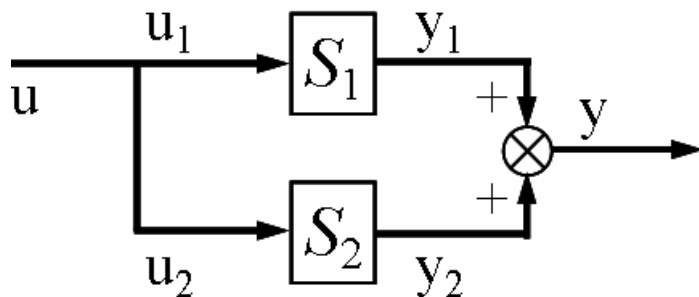
两个线性时不变子系统 S_1 和 S_2 的状态空间描述分别为：

$$S_1: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{y}_1 = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u}_1 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y}_2 = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{u}_2 \end{cases}$$



1、子系统并联



$$S_1: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{y}_1 = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u}_1 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y}_2 = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{u}_2 \end{cases}$$

状态空间描述:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] \mathbf{u}$$

传递函数矩阵:

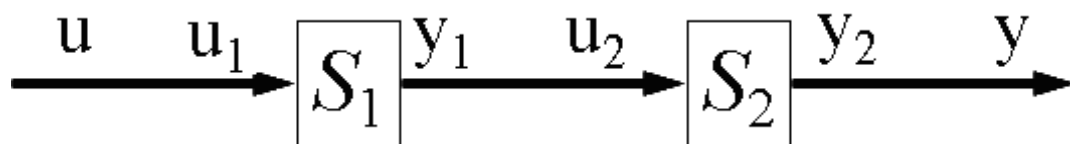
$$\mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^N \mathbf{G}_i(s)$$



2、子系统串联



两个子系统经串联构成的组合系统:



$$S_1: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{y}_1 = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u}_1 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y}_2 = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{u}_2 \end{cases}$$

注意：两个子系统串联的顺序

状态空间描述:

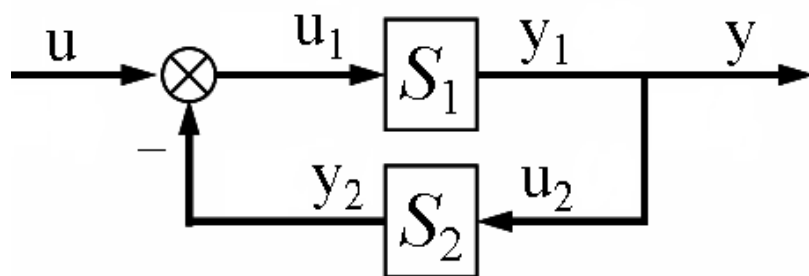
$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_2 D_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

传递函数矩阵:

$$\mathbf{G}(s) = G_N(s) G_{N-1}(s) \cdots G_1(s)$$



3、子系统反馈连接



$$S_1: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 u_1 \\ \mathbf{y}_1 = C_1 \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 u_2 \\ \mathbf{y}_2 = C_2 \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

图 反馈连接组合系统

状态空间描述:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

传递函数矩阵:

$$G(s) = [I + G_1(s)G_2(s)]^{-1} G_1(s)$$

$$G(s) = G_1(s) [I + G_2(s)G_1(s)]^{-1}$$



五、由状态空间描述导出传递函数矩阵



哈尔滨工程大学

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

1. 传递函数矩阵的定义和表达式

➤ **定义：**初始条件为零时，输出向量的拉氏变换式与输入向量的拉氏变换式之间的传递关系称为传递函数矩阵，简称传递矩阵。

➤ **表达式：**设线性定常连续系统的状态空间描述为：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

在初始条件为零时，系统的传递函数矩阵表达式为：

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$





① 系统的特征矩阵: $(sI-A)$

② 系统的特征多项式: $\det(sI-A)$, n 维系统的特征多项式为:

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0$$

③ 系统的特征根 (或特征值) : 特征方程 $\alpha(s) = 0$ 的根。

④ $G(s)$ 的特征多项式:

$G(s)$ 的特征多项式 $\alpha_G(s) =$

$G(s)$ 所有1阶、2阶、 \cdots 、 $\min(p, q)$ 阶子式的最小公分母

⑤ $G(s)$ 的极点: 特征方程 $\alpha_G(s) = 0$ 的根。

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{s+3}{s+2} & 0 \\ \frac{1}{s+2} & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

特征多项式: $\alpha_G(s) = (s+2)^2$



2.3 线性系统在坐标变换下的特性



$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}, \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

称两种状态空间描述是代数等价的，对于参数矩阵满足上述关系的系统称为代数等价系统。



系统经过线性非奇异变换后，不会改变系统原有特性(包括系统特征值、传递函数矩阵、可控性、可观性等)，这就是所谓的**线性非奇异变换的不变特性**。

- ✚ 两个系统为代数等价的必要条件是它们具有相同的维数。
- ✚ 同一系统采用不同的状态变量组所导出的两个状态空间描述之间，必然是代数等价的。
- ✚ 代数等价系统具有相同的传递函数矩阵，但相反的情况却不一定成立。





化状态空间描述对角规范形

化对角规范形条件

化对角规范形条件：系统矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量 v_1, v_2, \dots, v_n

1. 特征向量

已知 n 阶线性定常系统的状态方程为 $\dot{x} = Ax + Bu$

系统的特征值定义为如下特征方程 $\det(sI - A) = 0$

的根。对于矩阵 A 的第 i 个特征值 λ_i ，如果存在一个非零向量 v_i ，使下式成立， $\lambda_i v_i = Av_i$ 即 $(\lambda_i I - A)v_i = 0$

则称非零向量 v_i 为矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量。



2. 特征值的代数重数和几何重数

(1) 代数重数 设 λ_i 为系统矩阵 A 的一个特征值，且有

$$\begin{cases} \det(sI - A) = (s - \lambda_i)^{\sigma_i} \beta_i(s) \\ \beta_i(\lambda_i) \neq 0 \end{cases}$$

则称 σ_i 为特征值 λ_i 的**代数重数**。

说明：矩阵 A 的重特征值 λ_i 的重数 σ_i 就是特征值 λ_i 的代数重数。

(2) 几何重数

设 λ_i 为系统矩阵 A 的一个特征值， λ_i 的几何重数可

由下式计算

$$\alpha_i = n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$$



(3) 特征值的类型和重数的关系

对 n 阶线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$, 若系统特征值 λ_i 为单特征值, 则其代数重数和几何重数有:

$$\sigma_i = \alpha_i = 1$$

若系统特征值 λ_i 为重特征值, 则其代数重数和几何重数有:

$$1 \leq \alpha_i \leq \sigma_i$$

说明: 只有当所有特征值的代数重数等于其几何重数时, 矩阵 A 可以化为对角线规范形。





$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$





一不定项选择

1、线性定常系统下列论述正确的是（ D ）

- A 状态空间实现中状态变量选取唯一，状态变量个数也唯一；
- B 状态空间实现中状态变量选取不唯一，状态变量个数也不唯一；
- C 状态空间实现中状态变量选取唯一，状态变量个数不唯一；
- D 状态空间实现中状态变量选取不唯一，状态变量个数唯一。

2. 对于 n 阶线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 下列论述正确的是（ABD）

- A 当系矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，则矩阵 A 可化为对角线规范形；
- B 系统矩阵 A 的 n 个特征值两两互异，则矩阵 A 可化为对角线规范形；
- C 系统矩阵 A 有重特征值，则矩阵 A 不能化为对角线规范形；
- D 系统矩阵 A 有重特征值，但重特征值的几何重数等于其代数重，则矩阵 A 可以化为对角线规范形。





3、对代数等价的线性定常系统下列论述正确的是 (ABC)

A 它们具有相同的能控规范形

B 它们的稳定性相同

C 它们的传递函数矩阵相同

D 它们的特征值不相同。

4. 线性定常系统线性非奇异变换后 (ABCD)

A 系统的特征值不变;

B 系统的传递函数矩阵不变;

C 系统的能控性、能观性不变; D系统的稳定性不变。

5、线性时不变系统下列论述正确的是 (ACD)

A 对应同一系统的两个状态空间描述一定是代数等价的;

B 对应同一传递函数矩阵的两个状态空间实现一定是代数等价的;

C 对应同一传递函数矩阵的两个最小状态空间实现一定是代数等价的;

D 状态变量存在非奇异变换的两个状态空间描述一定是代数等价的。



例:已知某矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

下述说法正确的是 (A, D)

- A 特征值 λ_1 的代数重数为3, 几何重数为2;
- B 特征值 λ_1 的代数重数为3, 几何重数为3;
- C 特征值 λ_2 的代数重数为2, 几何重数为1;
- D 特征值 λ_2 的代数重数为2, 几何重数为2;



例:已知某矩阵的特征值为 λ_1 和 λ_2 , λ_1 的代数重数为3, 几何重数为1; λ_2 的代数重数为2, 几何重数为2, 试写出该矩阵的约当规范形。

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$



$$G(s) = \frac{3(s+5)}{(s+3)^2(s+1)}$$

系统的可控标准型状态空间表达式:

$$G(s) = \frac{3s+15}{s^3+7s^2+15s+9}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -15 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 15 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



$$G(s) = \frac{3(s+5)}{(s+3)^2(s+1)}$$

系统的可观标准型状态空间表达式:

$$G(s) = \frac{3s+15}{s^3+7s^2+15s+9}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$





例：两个子系统分别为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \\ \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

求其并联、串联和反馈连接组合系统的状态空间描述。

解：1) 并联：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$



$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

传递函数矩阵： $G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} + \frac{1}{s^2 - 3s - 2}$





两个子系统分别为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \\ \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

2) 串联:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$



$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

传递函数矩阵: $G(s) = G_2(s)G_1(s) = \frac{1}{s^2 - 3s - 2} \times \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$





两个子系统分别为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \\ \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

3) 反馈连接:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$



$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x};$$

传递函数矩阵: $\mathbf{G}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_1(s)\mathbf{G}_2(s)]^{-1} \mathbf{G}_1(s)$





例：已知系统传递函数为

$$G(s) = \frac{s+3}{s^3 + 10s^2 + 27s + 18}$$

试求出系统的一个最小实现。

解：

$$G(s) = \frac{s+3}{s^3 + 10s^2 + 27s + 18} = \frac{s+3}{(s+1)(s+3)(s+6)}$$
$$= \frac{1}{s^2 + 7s + 6}$$

写出其能控标准型实现，即为一个最小实现为：

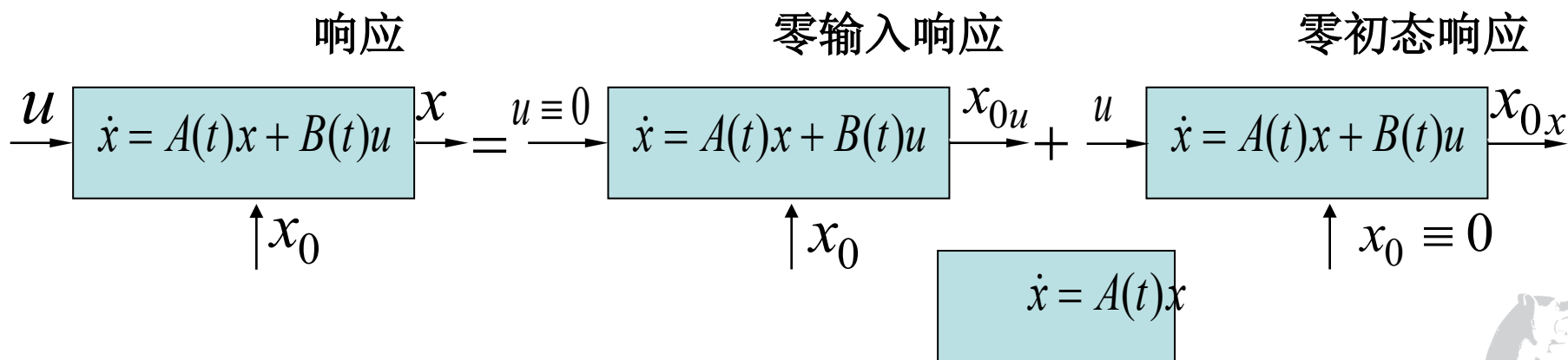
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$





一. 零输入响应和零初态响应

线性系统满足叠加原理，利用该属性可把系统在初始状态和输入向量作用下的运动分解为两个单独的分运动，即由初始状态引起的自由运动和由输入作用引起的强迫运动。





二、矩阵指数函数的计算方法

方法一：定义法

$$e^{At} = I + At + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

方法二：特征值法

$$\bar{X} = P X$$
$$A = P^{-1} \bar{A} P = P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} P$$

$$e^{At} = P^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P$$

*方法三：预解矩阵法(拉氏反变换法)

$$e^{At} = L^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right]$$

$$L[e^{-at}] = \frac{1}{s + a}$$



三. 线性定常系统的状态运动规律

初始状态 \mathbf{x}_0 和外输入作用 \mathbf{u} 共同作用下的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0$$

1. 积分法:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(t-\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

2. 拉氏变换法: *

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= L^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \right\} \\ &= L^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}_0 + L^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \end{aligned}$$



四. 系统的输出响应

线性定常系统在初始状态和外输入同时作用下的状态响应为： $x(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0$

则此时，系统的输出响应为：

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = Ce^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + Du(t)$$

*
$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}[C(sI - A)^{-1}] \mathbf{x}_0 + L^{-1}[C(sI - A)^{-1} B U(s)] \\ &= L^{-1} \left\{ C(sI - A)^{-1} [\mathbf{x}_0 + B U(s)] \right\} \end{aligned}$$





例：已知系统的状态空间描述和初始条件如下：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 6 & 1 \end{bmatrix} x$$

求系统在单位阶跃输入 $u(t) = 1(t)$ 作用下的状态响应和输出响应。

解：

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s + 5 \end{bmatrix}$$





$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ -\frac{6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \\ \frac{6}{s+3} - \frac{6}{s+2} & \frac{3}{s+3} - \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$L[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$$

1) 积分法:

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 6e^{-3t} - 6e^{-2t} & 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$





由于: $u(t) = 1$, 所以 $u(t - \tau) = 1$

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A\tau} B u(t - \tau) d\tau \\&= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 6e^{-3t} - 6e^{-2t} & 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{-2\tau} - 2e^{-3\tau} & e^{-2\tau} - e^{-3\tau} \\ 6e^{-3\tau} - 6e^{-2\tau} & 3e^{-3\tau} - 2e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 d\tau \\&= \begin{bmatrix} 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ 9e^{-3t} - 8e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2\tau} - e^{-3\tau} \\ 3e^{-3\tau} - 2e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ 9e^{-3t} - 8e^{-2t} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{2}e^{-2\tau} + \frac{1}{3}e^{-3\tau} \\ -e^{-3\tau} + e^{-2\tau} \end{array} \right]_0^t \\&= \begin{bmatrix} 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ 9e^{-3t} - 8e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6} \\ -e^{-3t} + e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6} \\ 8e^{-3t} - 7e^{-2t} \end{bmatrix} \\y(t) = cx(t) &= \begin{bmatrix} 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6} \\ 8e^{-3t} - 7e^{-2t} \end{bmatrix} = 1 + 14e^{-2t} - 8e^{-3t}\end{aligned}$$





2) 拉氏变换法:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \mathbf{x}(0) + (sI - A)^{-1} B U(s) = (sI - A)^{-1} \{ B U(s) + \mathbf{x}(0) \}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ -\frac{6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ -\frac{6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{s} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 6s + 1}{s(s+2)(s+3)} \\ \frac{s-5}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$





$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= L^{-1} \{X(s)\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 6s + 1}{s(s+2)(s+3)} \\ \frac{s-5}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} \\ \frac{8}{s+3} - \frac{7}{s+2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6} \\ 8e^{-3t} - 7e^{-2t} \end{bmatrix} \\ y(t) &= c\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6} \\ 8e^{-3t} - 7e^{-2t} \end{bmatrix} = 1 + 14e^{-2t} - 8e^{-3t} \end{aligned}$$





五、线性定常系统的状态转移矩阵

1、线性定常系统的状态转移矩阵

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0$$

称满足如下矩阵方程 $\dot{\Phi}(t - t_0) = A\Phi(t - t_0), \quad t \geq t_0$

$$\Phi(0) = I$$

的 $n \times n$ 矩阵 $\Phi(t - t_0)$ 为系统的状态转移矩阵。

线性定常系统的状态转移矩阵就是矩阵指数函数 e^{At}

$$\Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad t \geq t_0$$

当 $t_0 = 0$ 时

$$\Phi(t) = e^{At}, \quad t \geq 0$$

$$\Phi(t - t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0), \quad t \geq t_0$$



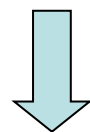


2. 用状态转移矩阵表示的系统运动规律表达式

$$x(t) = \Phi(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0$$

或

$$x(t) = \Phi(t) x_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$



变量替换

$$x(t) = \Phi(t) x_0 + \int_0^t \Phi(\tau) B u(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

该形式更
便于计算





3. 线性定常系统的状态转移矩阵的性质

1) $\Phi(0) = I$

2) $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$ $\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0) = \Phi(t-t_0)A$

3) $\Phi(t_1 \pm t_2) = \Phi(t_1)\Phi(\pm t_2) = \Phi(\pm t_2)\Phi(t_1)$

4) 状态转移矩阵的逆

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t), \quad \Phi^{-1}(-t) = \Phi(t)$$

$$\Phi^{-1}(t-t_0) = \psi(t_0)\psi^{-1}(t) = \Phi(t_0-t)$$

$$\Phi^{-1}(t-t_0) = [\psi(t)\psi^{-1}(t_0)]^{-1} = \psi(t_0)\psi^{-1}(t) = \Phi(t_0-t)$$





5) 状态转移矩阵的传递性

$$\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$$

6) 时间变量数乘的状态转移矩阵 $\Phi(kt) = [\Phi(t)]^k$

7) $\Phi(t - t_0)$ 由 Λ 唯一地确定, 当利用

$$\Phi(t - t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0), \quad (t \geq t_0)$$

计算时, $\Phi(t - t_0)$ 与所选择的 $\psi(t)$ 无关。





例：已知状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

试求： $\Phi^{-1}(t), A$

解： 1) $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$

2) 根据状态转移矩阵的运算性质有：

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \\ \Phi(0) = I \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\Phi}(0) = A\Phi(0) = A$$

所以： $A = \dot{\Phi}(t)|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$





习题：

• 已知某连续时间线性定常系统的系统矩阵为： $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

下述说法正确的是（ ABCD ）

A 状态转移矩阵为 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}, t \geq 0$

B 状态转移矩阵的逆矩阵 $\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$

C 该系统是稳定的；

D 系统的零输入响应为 $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} x(0), t \geq 0$





已知某连续时间线性定常系统的状态转移矩阵为： $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, t \geq 0$

下述说法正确的是 (ABC)

A 系统阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

B 状态转移矩阵的逆 $\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

C 该系统是内部稳定的;

D 矩阵 $\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ 也是该系的状态转移矩阵。





已知线性定常系统如下所示，其状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 是(A)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

A $\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2e^t - e^{-3t} & -2e^t + 2e^{-3t} \\ e^t - e^{-3t} & -e^t + 2e^{-3t} \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 2e^t - e^{-2t} & -2e^t + 2e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} & -e^t + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + e^{-2t} \\ e^{-t} - 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$





已知线性定常系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 如下 系统矩阵 (**A**)

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-5t} & -2e^{-2t} + 2e^{-5t} \\ e^{-2t} - e^{-5t} & -e^{-2t} + 2e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$





已知线性定常系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 如下，求系统阵 A 。

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-5t} & -2e^{-2t} + 2e^{-5t} \\ e^{-2t} - e^{-5t} & -e^{-2t} + 2e^{-5t} \end{bmatrix}$$

解：

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \\ \Phi(0) = I \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\Phi}(0) = A\Phi(0) = A$$

$$A = \dot{\Phi}(t) \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-5t} & -2e^{-2t} + 2e^{-5t} \\ e^{-2t} - e^{-5t} & -e^{-2t} + 2e^{-5t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$





已知系统的状态空间描述为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

(1) 求系统的状态转移矩阵。

(2) 初始条件为 $x(0) = [0 \ 1]^T$

$$y = [1 \ 0] x$$

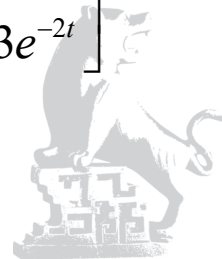
$u(t) = 1(t)$ 作用下的系输出 $y(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t} & t \geq 0 \end{cases} \quad ?$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \cdot \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -3 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-3}{(s+1)(s+2)} & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2} & \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \\ \frac{-3}{s+1} + \frac{3}{s+2} & \frac{-2}{s+1} + \frac{3}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$





$$\begin{aligned}x(t) &= \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-\tau} - 2e^{-2\tau} \\ -2e^{-\tau} + 3e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau \\&= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2e^{-t} + e^{-2t} + 1 \\ 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 1 \\ \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = -e^{-2t} + 1$$

$$\mathbf{x}(s) = [(sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)] = (sI - A)^{-1}[x(0) + BU(s)] = \begin{bmatrix} \frac{2}{s(s+2)} \\ \frac{s-1}{s(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = L^{-1}[Cx(S)] = L^{-1}\left[\frac{2}{s(s+2)}\right] = -e^{-2t} + 1$$





考虑如下两个矩阵

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

- 1) 其中哪一个可能成为系统的状态转移矩阵？请说明理由。
- 2) 根据选定的状态转移矩阵，确定系统矩阵A。

解：1) $\Phi_1(t)$ 可能成为系统的状态转移矩阵。

$\Phi_1(t)$ 满足初始条 $\Phi_1(0) = I$ 而 $\Phi_2(t)$ 不足

$$2) A = \dot{\Phi}_1(t) \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$





例：设一个线性定常系统的状态方程为 $\dot{x} = Ax$ 其中 $A \in R^{2 \times 2}$

若 $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **其响应** $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$ **若** $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **其响应** $x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$

试求统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 及A矩阵。

解：根据题意有 $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

合并得 $\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

状态移矩阵为 $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -2e^{-2t} + 2e^{-t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$

$$A = \dot{\Phi}(t) \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 4e^{-2t} - 2e^{-t} \\ -2e^{-2t} + e^{-t} & -4e^{-2t} + e^{-t} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$





或

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) - \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) - \varphi_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\varphi_{11}(t) - \varphi_{12}(t) \\ 2\varphi_{21}(t) - \varphi_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -2e^{-2t} + 2e^{-t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$A = \dot{\Phi}(t) \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 4e^{-2t} - 2e^{-t} \\ -2e^{-2t} + e^{-t} & -4e^{-2t} + e^{-t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$



一 线性定常系统的能控性判据

判据	判定方法	特点
秩判据	<p>能控判别阵满秩</p> $\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$ $\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-r}B \end{bmatrix} = n$	<ol style="list-style-type: none"> 1. 计算简便可行 2. 缺点为不知道状态空间中哪些特征值能控
PBH秩判据	<p>对于所有特征值</p> $\text{rank} [\lambda_i I - A, B] = n$	<ol style="list-style-type: none"> 1. 易于分析哪些特征值可控 2. 缺点为需要求系统的特征值
约当规范形判据	约当规范形中同一特征值对应的B矩阵分块的最后一行线性无关	<ol style="list-style-type: none"> 1. 易于分析哪些特征值能控 2. 缺点为需变换成规范形
对偶原理	Σ 完全能控 $\iff \Sigma^d$ 完全能观测 Σ 完全能观测 $\iff \Sigma^d$ 完全能控	针对特殊结构的系统



二 能控性指数

μ = 使“ $\text{rank} Q_k = n$ ”成立的 k 的最小正整数

$$Q_\mu = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_p & | & Ab_1 & \cdots & Ab_p & | & \cdots & | & A^{\mu-1}b_1 & \cdots & A^{\mu-1}b_p \end{bmatrix}$$

结论1：对完全能控的单输入连续时间线性时不变系统，状态维数为 n ，则系统能控性指数为 $\mu = n$ 。

结论2：能控性指数满足 $\frac{n}{p} \leq \mu \leq \min(\bar{n}, n - r + 1)$

其中， \bar{n} 为矩阵 A 的最小多项式次数， $r = \text{rank} B$ ， n 为系统的阶次。



能控性指数集

$$Q_\mu = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_p & | & Ab_1 & \cdots & Ab_p & | & \cdots & | & A^{\mu-1}b_1 & \cdots & A^{\mu-1}b_p \end{bmatrix}$$

从左至右依次找到 Q_μ 的 n 个线性无关列，并对其重新排序：

$$\underbrace{b_1, Ab_1, \dots, A^{\mu_1-1}b_1}_{\mu_1}; \quad \dots \quad \underbrace{b_r, Ab_r, \dots, A^{\mu_r-1}b_r}_{\mu_r}$$

能控性指数 $\mu = \max \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r \}$ 其中 $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n$

完全能控系统的能控性指数集定义为： $\{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r \}$

结论3： 线性定常系统的能控性指数在状态的非奇异变换下保持不变。





三 线性定常系统的能观测性判据

判据	判定方法	特点
秩判据	<p>能控判别阵满秩</p> $\text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n$ $\text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-m} C^T \end{bmatrix} = n$	<ol style="list-style-type: none">1. 计算简便可行2. 缺点为不知道状态空间中哪些特征值能观测
PBH秩判据	<p>对于所有特征值</p> $\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} = n$	<ol style="list-style-type: none">1. 易于分析哪些特征值可观测2. 缺点为需要系统的特征值
约当规范形判据	约当规范形中同一特征值对应的C矩阵分块的首列线性无关	<ol style="list-style-type: none">1. 易于分析哪些特征值能观测2. 缺点为需变换成规范形
对偶原理	Σ 完全能控 $\Leftrightarrow \Sigma^d$ 完全能观测 Σ 完全能观测 $\Leftrightarrow \Sigma^d$ 完全能控	针对特殊结构的系统



四、能观测性指数

能观测性指数的定义：对完全能观测连续时间线性时不变系统，定义系统的能观测性指数为：

$\nu = \text{使 } \text{rank } \bar{Q}_k = n \text{ 成立的 } k \text{ 的最小正整数}$

结论1：对完全能观测单输出连续时间线性时不变系统，状态维数为 n ，则系统能观测性指数为 $\nu = n$ 。

结论2：对完全能观测多输出连续时间线性时不变系统，状态维数为 n ，输出维数为 q ，设 $\text{rank } C = m$ ，则系统能观测性指数满足

$$\frac{n}{q} \leq \nu \leq \min(\bar{n}, n - m + 1)$$

$$\bar{Q}_\nu = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \\ \hline c_1 A \\ \vdots \\ c_q A \\ \hline \vdots \\ \hline c_1 A^{\nu-1} \\ \vdots \\ c_q A^{\nu-1} \end{bmatrix}$$

能观测性指数集的定义：对完全能观测多输出连续时间线性时不变系统，状态维数为 n ，输出维数为 q ，设 $\text{rank } C = m$ ，将 \bar{Q}_v 表为：

$$\bar{Q}_v = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \\ \hline c_1 A \\ \vdots \\ c_q A \\ \hline \vdots \\ \hline c_1 A^{v-1} \\ \vdots \\ c_q A^{v-1} \end{bmatrix}$$

v_1
{

\vdots
{

v_2
{

\vdots
{

v_m
{

c_1
 $c_1 A$
 \vdots
 $c_1 A^{v_1-1}$

c_2
 $c_2 A$
 \vdots
 $c_2 A^{v_2-1}$

\vdots
 \vdots

c_m
 $c_m A$
 \vdots
 $c_m A^{v_m-1}$

对能观测系统显然有

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m = n$$

能观测性指数 v 满足关系式

$$v = \max \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$$

称数集 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 为系统的能观测性指数集。

结论3： 线性定常系统的能观测性指数在状态的非奇异变换下保持不变。



六、对偶原理

$$\Sigma: \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x \end{aligned}$$

$$\Sigma_d: \begin{aligned} \dot{\psi}^T &= -A^T(t)\psi^T + C^T(t)\eta^T \\ \varphi^T &= B^T(t)\psi^T \end{aligned}$$

Σ 完全能控 $\Leftrightarrow \Sigma_d$ 完全能观测

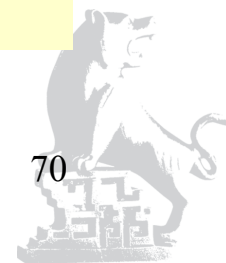
Σ 完全能观测 $\Leftrightarrow \Sigma_d$ 完全能控

线性时不变系统:

$$\Sigma: \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

$$\Sigma_d: \begin{aligned} \dot{\psi}^T &= A^T\psi^T + C^T\eta^T \\ \varphi^T &= B^T\psi^T \end{aligned}$$

可以认为是互为对偶系统，且满足对偶原理。



七、能控规范形和能观测规范形



1 能控规范形

能控规范形的构造条件：系统完全能控

对于一个单输入单输出的
n维完全能控系统

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$



$$\bar{x} = Px$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \bar{x} \end{aligned}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}$$

$$\begin{cases} \beta_{n-1} = cb \\ \beta_{n-2} = cAb + \alpha_{n-1}cb \\ \vdots \\ \beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_2cAb + \alpha_1cb \end{cases}$$



系统的特征多项式为 $\alpha(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0$

构造非奇异线性变换阵 P^{-1} : $\bar{x} = Px$

$$P^{-1} = Q_c \Lambda = \underbrace{\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}}_{Q_c} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & 1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

或者

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$



2 能观测规范形



能观测规范形的构造条件：系统完全能观测

对于一个单输入单输出的
n维完全能观测系统

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

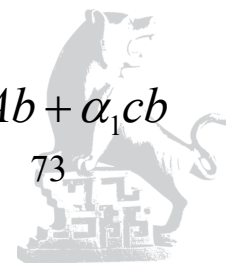


$$\hat{x} = Px$$

$$\hat{A} = PAP^{-1}, \quad \hat{B} = PB, \quad \hat{C} = CP^{-1}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] \hat{x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \beta_{n-1} = cb \\ \beta_{n-2} = cAb + \alpha_{n-1}cb \\ \vdots \\ \beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_2cAb + \alpha_1cb \end{cases}$$





系统的特征多项式为

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0$$

构造非奇异线性变换阵P：

$$\hat{x} = Px$$

$$P = \Lambda Q_o = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & 1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-2} \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

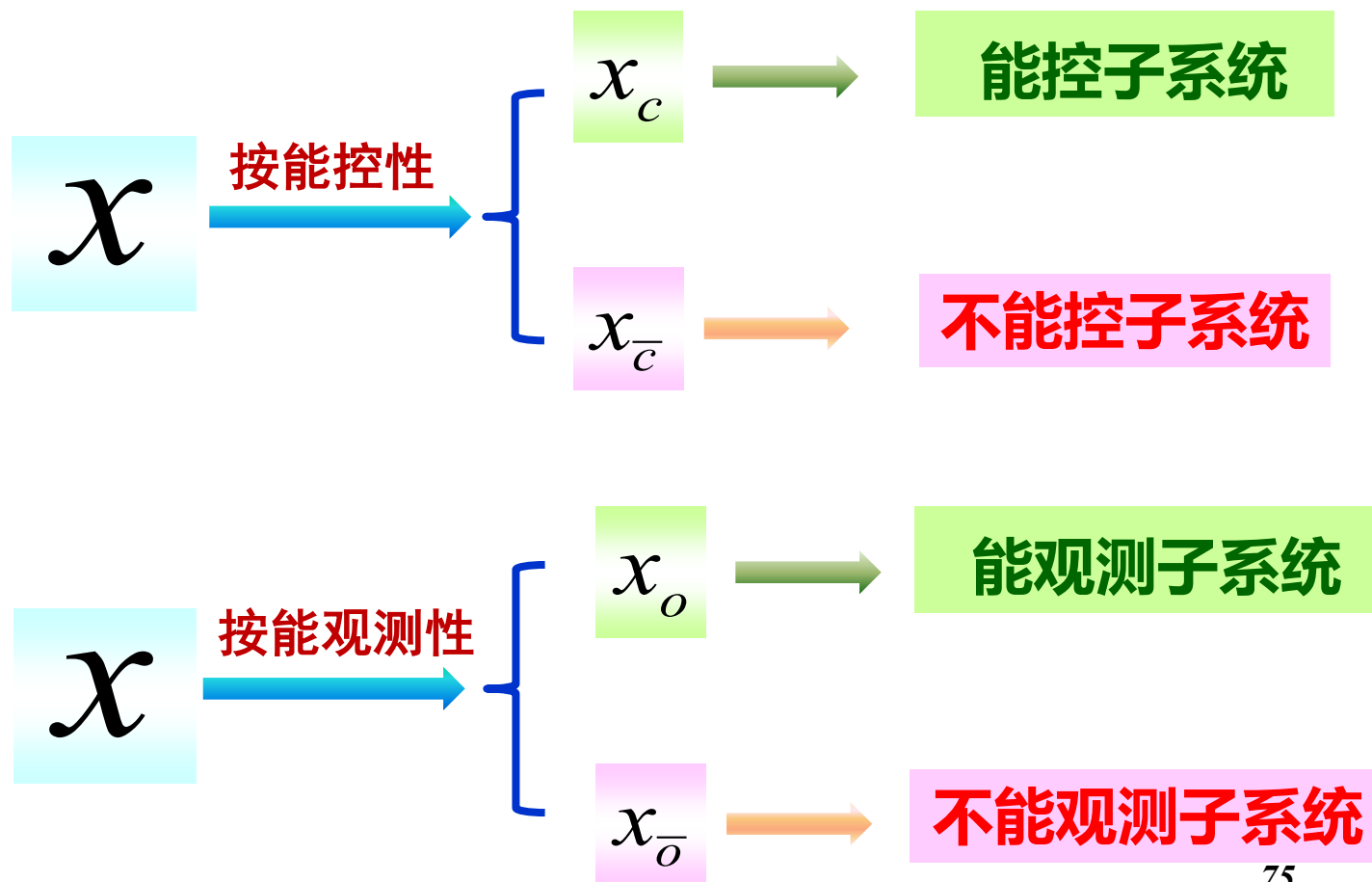
或者

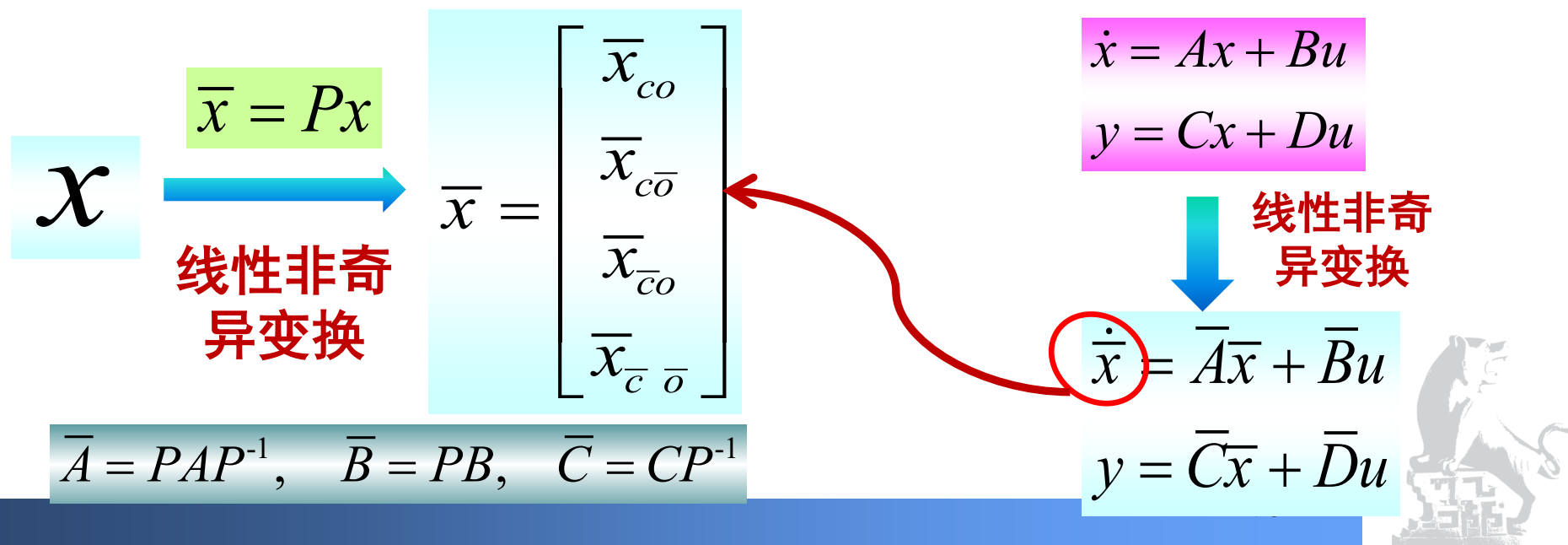
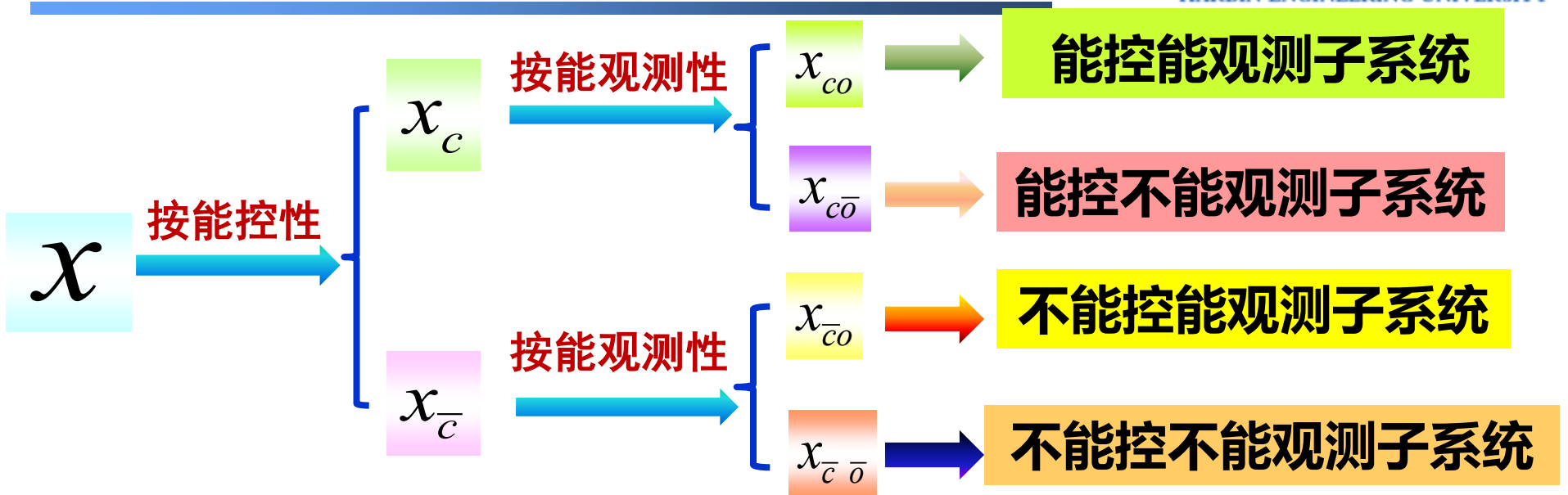
$$P = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cA^{n-1} \\ \vdots \\ cA \\ c \end{bmatrix}$$

Q_o



八、连续时间线性时不变系统的结构分解





1、线性定常系统按能控性的结构分解

对**不完全能控**的系统， $\text{rank} Q_c = k < n$ ，引入线性非奇异变换 $\bar{x} = Px$ ，系统按能控性结构分解的规范表达式为：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \textcircled{0} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \textcircled{\bar{x}}_c \\ \textcircled{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \textcircled{0} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{red arrow}} k \text{ 维能控分状态}$
 $\xrightarrow{\text{red arrow}} n-k \text{ 维不能控分状态}$

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}$$



➤ $n \times n$ 非奇异变换矩阵 P^{-1} 的构造方法:

- 1) 从能控判别阵 Q_c 中任意的选取 k 个线性无关的列向量, 记为 q_1, q_2, \dots, q_k 。
- 2) 在 n 维实数空间中任意选取尽可能简单的 $(n-k)$ 个列向量记为 $q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_n$, 使它们和 q_1, q_2, \dots, q_k 线性无关。

这样就可以构成 $n \times n$ 非奇异变换矩阵

$$\boxed{P^{-1}} = Q = \left[\begin{array}{cccc|cccc} q_1 & q_2 & \cdots & q_k & q_{k+1} & \cdots & q_n \end{array} \right]$$



$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \textcircled{0} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \textcircled{0} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_c &= \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{A}_{12} \bar{x}_{\bar{c}} + \bar{B}_c u \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} &= \bar{A}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}} \\ y &= \bar{C}_c \bar{x}_c + \bar{C}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}} \end{aligned}$$

令 $y = y_c + y_{\bar{c}}$, 则可定义:

能控子系统:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_c &= \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{A}_{12} \bar{x}_{\bar{c}} + \bar{B}_c u \\ y_c &= \bar{C}_c \bar{x}_c \end{aligned}$$

不能控子系统:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} &= \bar{A}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}} \\ y_{\bar{c}} &= \bar{C}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}} \end{aligned}$$



➤ 系统结构能控性分解特点

1) n维不完全能控系统与其能控子系统具有相同的传递函数矩阵

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = \bar{C}_c(sI_k - \bar{A}_c)^{-1}\bar{B}_c$$

2) 输入u只能通过能控子系统传递到输出，而与不能控子系统无关，故u至y之间的传递函数矩阵描述不能反映不能控部分的特性。

3) 由于在选取非奇异变换矩阵时

$$P^{-1} = [q_1 \quad \cdots \quad q_k \quad | \quad q_{k+1} \quad \cdots \quad q_n]$$

列向量 q_1, q_2, \cdots, q_k 和 $q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_n$ 的选取不具有唯一性，虽然能控性规范分解的形式不变，但各系数矩阵因 P^{-1} 的差异而不同，即能控性规范分解结果不唯一。





4) 系统的特征多项式可分解为:

$$\begin{aligned}\det(sI - A) &= \det(sI - \bar{A}) = \det \begin{bmatrix} sI - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ 0 & sI - \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \\ &= \det(sI - \bar{A}_c) \cdot \det(sI - \bar{A}_{\bar{c}})\end{aligned}$$

能控振型

不能控振型

表明不完全能控系统的特征值由两部分组成：一部分为 \bar{A}_c 的特征值，称为系统的能控振型；另一部分为 $\bar{A}_{\bar{c}}$ 的特征值，称为系统的不能控振型。外部输入 u 的引入只能改变能控振型的位置，而不能改变不能控振型的位置。



2. 线性定常系统按能观测性的结构分解

对不完全能观的系统, $\text{rank} Q_0 = m < n$, 引入线性非奇异变换 $\bar{x} = Px$, 系统按能观性结构分解的规范表达式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & \textcircled{0} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \bar{C}_o & \textcircled{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{m维能观测分状态}}$
 $\xrightarrow{\text{n-m维不能观测分状态}}$

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}$$



非奇异变换矩阵P的构造方法

1. 从 Q_0 中任意的选取 m 个线性无关的行向量，记为

$$h_1, h_2, \dots, h_m。$$

2. 在 n 维实数空间中任意选取尽可能简单的 $(n-m)$ 个 n 维行向量 $h_{m+1}, h_{m+2}, \dots, h_n$ ，使它们和 h_1, h_2, \dots, h_m 线性无关。构成 $n \times n$ 非奇异变换矩阵

$$P = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \\ h_{m+1} \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & \textcircled{0} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} \bar{C}_o & \textcircled{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_o &= \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o u \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} &= \bar{A}_{21} \bar{x}_o + \bar{A}_{\bar{o}} \bar{x}_{\bar{o}} + \bar{B}_{\bar{o}} u \\ y &= \bar{C}_o \bar{x}_o \end{aligned}$$

能观测子系统:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_o &= \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o u \\ y_o &= \bar{C}_o \bar{x}_o \end{aligned}$$

不能观测子系统:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} &= \bar{A}_{21} \bar{x}_o + \bar{A}_{\bar{o}} \bar{x}_{\bar{o}} + \bar{B}_{\bar{o}} u \\ \textcircled{y_{\bar{o}}} &= 0 \end{aligned}$$



➤ 系统结构能观测性分解特点



1) n维不完全能观测系统与其能观子系统具有相同的传递函数矩阵

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = \bar{C}_o(sI_m - \bar{A}_o)^{-1}\bar{B}_o$$

2) 系统的特征多项式可分解为：

$$\det(sI - A) = \det(sI - \bar{A}) = \det(sI - \bar{A}_o) \cdot \det(sI - \bar{A}_{\bar{o}})$$

能观振型

不能观振型

表明不完全能系统观的特征值由两部分组成：一部分为 \bar{A}_o 的特征值，称为系统的能观振型；另一部分为 $\bar{A}_{\bar{o}}$ 的特征值，称为系统的不能观振型。



3. 线性定常系统的一般结构分解

结论1: 对不完全能控和不完全能观测 n 维多输入多输出连续时间线性时不变系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

通过引入特定线性非奇异变换，可使系统结构实现规范分解，即有

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{co} \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{co} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{c\bar{o}} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{co} \\ \tilde{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{co} & 0 & \tilde{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{co} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$



线性定常系统的传递函数矩阵与其能控能观测子系统的传递函数矩阵相同：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} = G_{co}(s)$$



输入—输出描述只能反映系统的既能控又能观测部分，它是对系统的一个不完全描述。



已知系统状态空间描述为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 23 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 12 \quad 3] x$$

系统既能控又能观的状态是 (**C**)

A x_1

B x_2

C x_3

D x_1 和 x_2





系统传递函数为
$$g(s) = \frac{s + 2}{s^3 + s^2 - 14s - 24}$$

下述说法正确的是 (**A, C**)

- A 其三维的状态实现一定不是既可控又可观的;**
- B 其三维的状态实现可能是既可控又可观的;**
- C 其二维的状态实现一定是既可控又可观的;**
- D 其二维的状态实现可能是既可控又可观的。**





线性定常系统下列论述正确的是 (BC)

- A 若一个系统是能控的，则它的对偶系统一定是能控的；
- B 若一个系统是能控的，则它的对偶系统一定是能观的；
- C 若一个系统是能控的，则它的对偶系统一定是不能控的；
- D 若一个系统是能控的，则它的对偶系统一定是不能观的。



例：对于下列连续时间线性时不变系统，

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

下述说法正确的是（ **ABCD** ）

- A** 该系统是完全能控的；
- B** 该系统是完全能观的；
- C** 系统的能控性指数为2；
- D** 系统的能观测性指数为2。





例题. 判断下列系统的能控性和能观测性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

若做如下修改判断系统的能控性和能观测性。

解：系统为约当标准型。

1) 系统不能控，重特征值1对应的两个约当子块最后一行在B中对应的两行 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$ 行线性相关；

1) 系统能观测，重特征值1对应的两个约当子块首列在C中对应的两列 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 列线性无关，且单特征值3在C中对应的列不为零。



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解： $\text{rank}[B \quad AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 2$ **系统不可控。**

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 12 \end{bmatrix} = 3$$

系统可观测。





例：试确定参数a, b的取值范围，使下列系统完全能控且能观。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 1 \quad b] x$$

解：

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det Q_c \neq 0 \Rightarrow (a-1)^2 \neq 0$$



$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & b \\ -b & 1+b & b \\ -b & 1+2b & 0 \end{bmatrix}$$

令 $\det Q_o = b^2 + b^3 \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$ 且 $b \neq -1$

所以, 当 $a \neq 1$ $b \neq 0$ 且 $b \neq -1$

时, 系统式完全能控且能观测的。





例：确定使下列系统状态完全能控的待定参数的a，
b，c取值范围

$$(1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{bmatrix} u \quad (2) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 20 & -1 & 0 \\ 4 & 16 & 0 \\ 12 & -6 & 18 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} u$$

(1) 解：n=3，能控性判别阵为

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -b \\ 1 & -b & b^2 - a \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

系统状态完全能控必有 $\det Q_c \neq 0$ 成立，即



$$\det Q_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -b \\ 1 & -b & b^2 - a \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -ac \neq 0$$

系统状态完全可控参数取值范围： $ac \neq 0$ ， b 任意。

(2) 解： 该题若应用秩判据，通过计算 $\det Q_c \neq 0$ 来求理论上可行。由于很难从 $\det Q_c \neq 0$ 中解出 a, b, c 的取值范围，计算很困难，故考虑用 PBH秩判据来试一下：

$$[sI - A \quad B] = \left[\begin{array}{ccc|c} s-20 & 1 & 0 & a \\ -4 & s-16 & 0 & b \\ -12 & 6 & s-18 & c \end{array} \right]$$



令 $\det(sI-A)=0$ 求特征值得:

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-20 & 1 & 0 \\ -4 & s-16 & 0 \\ -12 & 6 & s-18 \end{vmatrix}$$
$$= (s-18)[(s-20)(s-16)+4] = (s-18)^3 = 0$$

特征值为: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 18$

当 $s = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 18$ 时, 有

$$\text{rank}[sI - A \quad B] = \text{rank} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & a \\ -4 & 2 & 0 & b \\ -12 & 6 & 0 & c \end{bmatrix} < 3$$

不管 a, b, c 取何值, $\text{rank}[sI-A \quad B]$ 最大为 2, 所以不管 a, b, c 取何值, 系统都不能控。



例：已知约当规范形如下：

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} u$$

试判断其能控性。

解： $\hat{B}_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $\hat{B}_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, 均行线性无关,

所以：系统完全能控。





例 给定一个连续时间线性时不变系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u, \quad n=3, \quad \text{rank} B = 2$$

解：通过简化秩判据

$$\text{rank} Q_{n-r+1} == \text{rank} \begin{bmatrix} B & \cdots & A^{n-r} B \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{matrix} b_1 & b_2 & Ab_1 \cdots \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & * \\ 0 & 1 & -1 & * \\ 1 & 1 & 1 & * \end{bmatrix} \end{matrix} = 3$$
$$\mu_1 - 1 = 1, \quad \mu_1 = 2, \quad \mu_2 - 1 = 0, \quad \mu_2 = 1$$

即系统完全能控，且能控性指数集和能控性指数为

$$\{\mu_1 = 2, \mu_2 = 1\} \text{ 和 } \mu = \max \{\mu_1 = 2, \mu_2 = 1\} = 2$$

$$\text{或 } \frac{n}{p} \leq \mu \leq n - r + 1 \quad \mu = 2$$





例：将如下系统转换为能控规范形

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 1 \quad 1]x$$

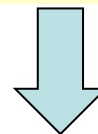
解：

$$Q_c = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

系统完全能控

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^3 - 5s + 4$$

$$\begin{cases} \beta_2 = cb = 3 \\ \beta_1 = cAb + \alpha_2 cb = 4 \\ \beta_0 = cA^2b + \alpha_2 cAb + \alpha_1 cb = 0 \end{cases}$$



$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 4 \quad 3]\bar{x}$$



或者:

$$P^{-1} = Q_c A = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{28} \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

能控规范形为

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}, \quad \bar{D} = D$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 4 \quad 3] \bar{x}$$





例：将如下系统转换为能观测规范形

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 1 \quad 1]x$$

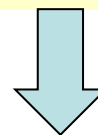
解：

$$Q_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

系统完全能观测

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^3 - 5s + 4$$

$$\begin{cases} \beta_2 = cb = 3 \\ \beta_1 = cAb + \alpha_2 cb = 4 \\ \beta_0 = cA^2b + \alpha_2 cAb + \alpha_1 cb = 0 \end{cases}$$



$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \bar{x}$$



或者:

$$\begin{aligned} P = \Lambda Q_o &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

能观测规范形为 $\hat{A} = PAP^{-1}$, $\hat{B} = PB$, $\hat{C} = CP^{-1}$, $\hat{D} = D$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 0 \quad 1] \bar{x} \end{aligned}$$





例：已知系统 (A, b, c) ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad -1 \quad 1]$$

试将系统作能控性规范分解。

解：1) 能控判别矩阵

$$Q_c = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{rank} Q_c = 2 < 3;$$

故系统不完全能控。





2) 从 Q_c 中选出两个线性无关的列向量 $[0 \ 0 \ 1]^T$ 和 $[0 \ 1 \ 0]^T$, 附加任意列向量 $[-1 \ 0 \ 3]^T$, 构成非奇异变换矩阵 P^{-1} :

则: $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$ $\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$P^{-1} \quad I \quad I \quad P$

初等行变换: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = Pb = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{c} = cP^{-1} = [1 \ 2 \ -1]$



系统按能控性分解的规范表达式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_c \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & | & 2 \\ 1 & 4 & | & -2 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

能控子系统动态方程为：

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_c &= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_c &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \end{aligned}$$

不能控子系统动态方程为：

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}} &= \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \\ y_{\bar{c}} &= -\bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{aligned}$$





已知系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

- (1) 判断系统能控性;
- (2) 若系统能控将其转化为能控标准型,
若不能控对其进行结构分解, 并找出能控子系统;
- (3) 判断系统的可镇定性并说明理由。

解: 1) 判断系统能控性

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} Q_c = 2 < 3 \quad \text{系统不控。}$$





2) 按能控性分解 构造线性非奇异变换矩阵

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{则} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

能控子系统 $\dot{\bar{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \bar{x}_c + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \bar{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

3) 系统的可镇定性
由于不能控子系统的状态变量对应的特征值为-1，因此系统可镇定。





例： 试将如下系统按能观测性进行分解。 已知系统(A,B,C)， 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad -1 \quad 1]$$

解： n=3， 系统的能观测性判别矩阵为：

$$Q_o = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{rank } Q_o = 2 < 3$$

故系统不完全能观。





从中选取两线性无关行向量 $[1 \ -1 \ 1]$ 和 $[2 \ -3 \ 2]$,
再选取一个与之线性无关的行向量 $[0 \ 0 \ 1]$, 构成非
奇异线性变换矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则:

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ \hline -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = Pb = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \hline 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{c} = cP^{-1} = [1 \ 0 \ 0]$$



系统按能观测性分解的规范表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}_o} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}_o^-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ -2 & 3 & | & 0 \\ \hline -5 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o \\ \bar{\mathbf{x}}_o^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o \\ \bar{\mathbf{x}}_o^- \end{bmatrix}$$

能观测子系统动态方程为：

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}_o} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o$$

不能观测子系统动态方程为：

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}_o^-} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o + 2\bar{\mathbf{x}}_o^- + u, \quad y_o^- = 0$$



5.1 外部稳定性和内部稳定性

外部稳定性 (BIBO稳定) : 通过系统的输入-输出关系来描述系统的稳定性。

线性定常系统外部稳定BIBO稳定判据:

$G(s)$ 的所有极点均具有负实部。

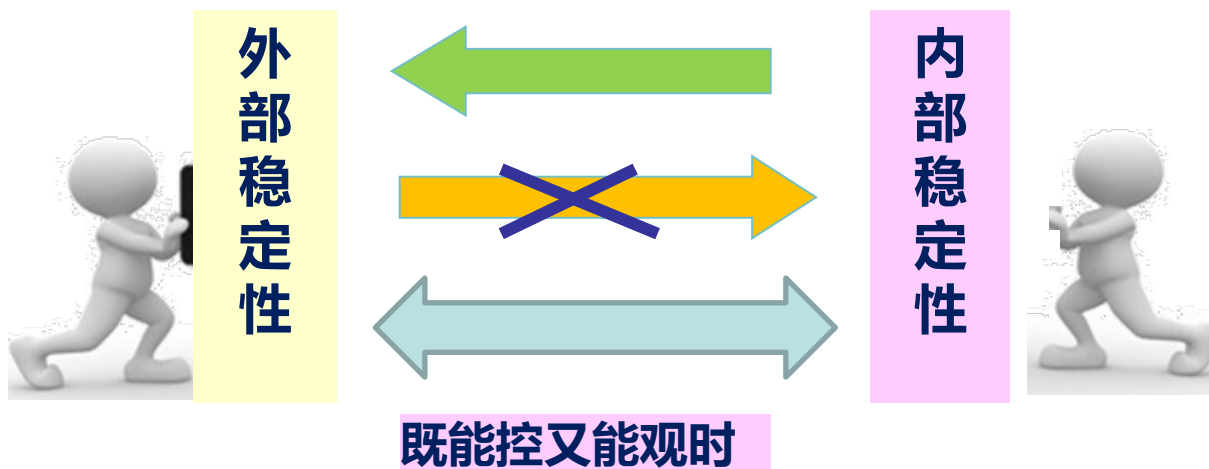
内部稳定性 (渐近稳定) : 通过零输入下的状态运动响应来描述系统的稳定性。

线性时不变系统内部稳定判据: 对 n 维连续时间线性时不变自治系统, 系统是内部稳定的充要条件为: 系统矩阵 A 所有特征值均具有负实部, 即成立

$$\text{即: } \operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$



线性定常系统内部稳定性和外部稳定性的关系



5.2 李亚普诺夫意义下运动稳定性的基本概念

1. 自治系统: $\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, t \in [t_0, \infty)$

2. 受扰运动: 系统由 t_0 初始时刻的初始状态 x_0 所引起的运动(即状态方程的解) 表为: $x_{ou}(t) = \phi(t; x_0, t_0), \quad t \in [t_0, \infty]$

则初始状态 x_0 必满足 $\phi(t_0; x_0, t_0) = x_0$ 。由于这一运动是由初始状态的扰动引起的, 因此常称其为系统的受扰运动。

3. 平衡状态: 满足 $\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0$ 的状态 x_e 称为平衡状态。

系统的平衡状态一般不唯一。

$$\dot{x} = Ax$$



$$Ax_e = 0$$



$\begin{cases} \text{唯一零平衡态 (A为非奇异)} \\ \text{无穷多个平衡态 (A为奇异)} \end{cases}$

□ 系统运动的稳定性, 就是研究其平衡状态的稳定性。



4. 李雅普诺夫意义下的稳定

若对于任意实数 $\varepsilon > 0$ ，都存在一个实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ ，使得从满足不等式 $\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$

的任一初始状态 x_0 出发的受扰运动都满足不等式

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

则称系统平衡状态 x_e 在 t_0 是李亚普诺夫意义下稳定的。

式中： $\|\cdot\|$ 为欧几里得范数，其几何意义是空间距离的尺度。



5. 渐近稳定性

若系统的平衡状态 x_e 不仅具有李亚普诺夫意义下的稳定性，
且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| = 0$ 则称此平衡状态 x_e 是渐近稳定的。

□ 经典控制理论中的稳定性定义与渐近稳定性对应。

□ 若 δ 与 t_0 无关，且上式的极限过程与 t_0 无关，则称平衡状态是一致渐近稳定的。

□ 从工程观点而言，渐近稳定更为重要。渐近稳定即为工程意义下的稳定，而李亚普诺夫意义下的稳定则是工程意义下的临界不稳定。



6. 大范围(全局)渐近稳定性

如果对于任意初始状态 x_0 ，都能保证 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| = 0$ 成立，则称系统的平衡状态 x_e 是大范围渐近稳定的，也称为全局渐近稳定。

也就是说当初始条件扩展至整个状态空间，且平衡状态 x_e 均具有渐近稳定时，称此平衡状态 x_e 是大范围渐近稳定的。

*** 大范围渐近稳定系统只能有一个平衡状态!!!**

7. 不稳定性

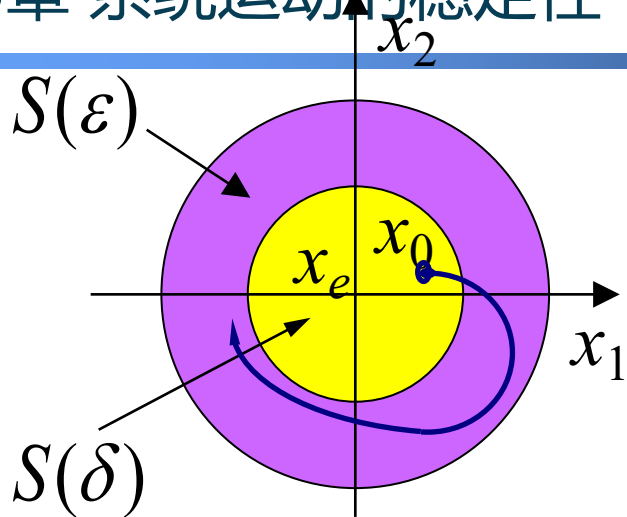
如果对于某个实数 $\varepsilon > 0$ 和任一实数 $\delta > 0$ ，不管 ε 有多么大，也不管 δ 有多么小，在 $S(\delta)$ 内总存在着一个状态 x_0 ，使得由这一状态出发的轨迹超出 $S(\varepsilon)$ ，则平衡状态 x_e 就称为是不稳定的。



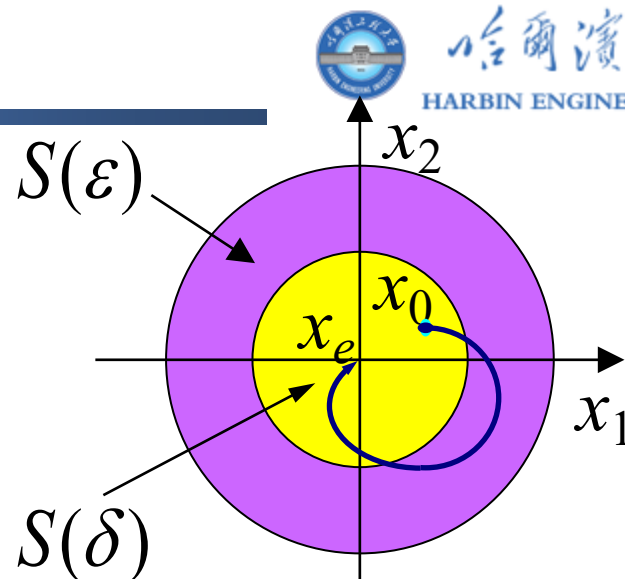
第5章 系统运动的稳定性



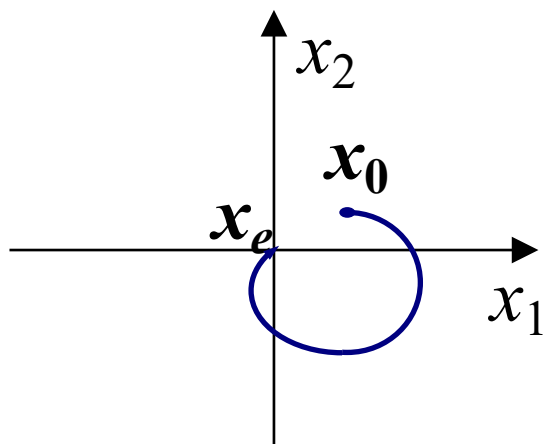
哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY



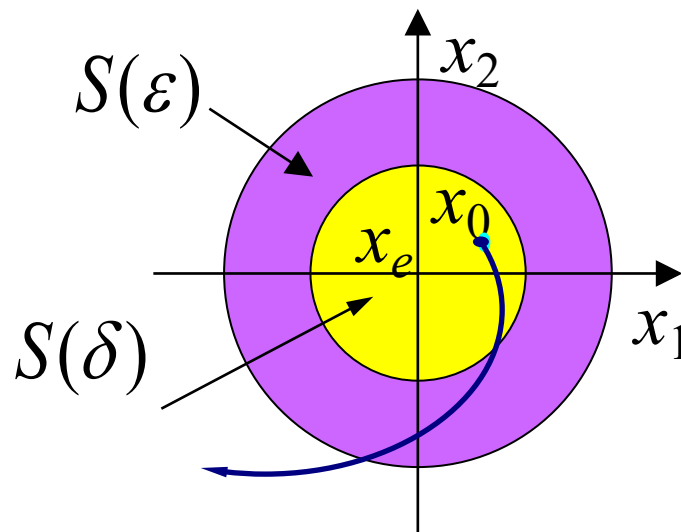
x_e 李亚普诺夫意义下稳定



x_e 渐近稳定



x_e 全局渐近稳定



x_e 不稳定



5.3 李亚普诺夫第二法的主要定理

李亚普诺夫第一法

李亚普诺夫第二法

间接法

直接法

利用状态方程的解的性质来分析系统的稳定性，适用于线性和可线性化的非线性系统。

间接法需求解状态方程，对于高维系统并非易事，其应用受到一定限制。

构造能反映系统能量变化情况的李亚普诺夫函数，利用其自身及其导数的符号特征来判断系统稳定性。

直接法不需求解系统运动方程，获得广泛应用。



一、李亚普诺夫第二法主要定理

充分条件

1. 定理 (定常系统大范围渐近稳定判别定理1)

对于定常系统

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0$$

其中 $f(0)=0$ ，如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数 $V(x)$ ， $V(0) = 0$ ，并且对于状态空间中的一切非零 x 满足如下条件：

1) $V(x)$ 为正定；

2) $\dot{V}(x)$ 为负定；

3) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $V(x) \rightarrow \infty$ 。

满足条件1和2,
即为渐近稳定

全局性

则系统的原点平衡状态是**大范围渐近稳定**的。

充分条件

2. 定理 (定常系统大范围渐近稳定判别定理2)

对于定常系统 $\dot{x} = f(x)$, $t \geq 0$

其中 $f(0)=0$, 如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数 $V(x)$, $V(0) = 0$, 并且对于状态空间 X 中的一切非零点 x 满足如下条件:

1) $V(x)$ 为正定;

2) $\dot{V}(x)$ 为负半定;

3) 对于任意初始状态, $\dot{V}(\phi(t; x_0, 0)) \neq 0$

4) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $V(x) \rightarrow \infty$ 。

则系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。



4. 定理 (不稳定的判别定理)

对于定常系统

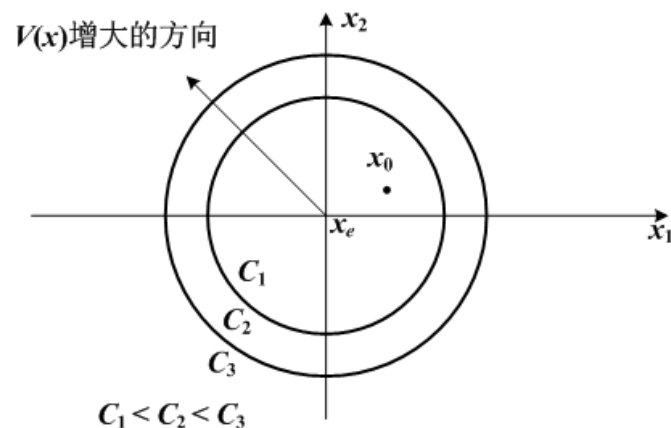
$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0, \quad \text{其中 } f(0) = 0$$

如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数 $V(x)$ ，其中 $V(0)=0$ ，和围绕原点的域 Ω ，使得对于一切非零状态 $x \in \Omega$ 和一切 $t \geq 0$ 满足如下条件：

1) $V(x)$ 为正定；

2) $\dot{V}(x)$ 为正定；

则系统平衡状态为**不稳定**。



5.4 连续时间线性系统的状态运动稳定性判据

一、线性时不变系统的特征值稳定判据

[特征值判据]：考虑线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0,$$

◆ 系统的每一平衡态是李亚普诺夫意义下稳定的充要条件是：系统矩阵A的所有特征值均具有非正（负或零）实部，且具有零实部的特征值为A的最小多项式的单根；

◆ 系统的唯一平衡态 $\mathbf{x}_e = 0$ 是渐近稳定的充要条件是：系统矩阵A的所有特征值均具有负实部。

最小多项式

化零多项式：对于任意一个 n 阶方阵 A ，总存在一个多项式 $f(s)$ 满足 $f(A)=0$ ，这样的多项式称为 A 的一个化零多项式。

例如： $\alpha(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0$

矩阵 A 的特征多项式是 A 的一个化零多项式。方阵 A 的化零多项式不唯一，有无穷多个。

最小多项式：在所有化零多项式中，次数最低且最高次幂项系数为1的多项式称为 A 的最小多项式。

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\alpha(s)} = \frac{P(s)}{\phi(s)}$$

设 $m(s)$ 为 $\text{adj}(sI - A)$ 中所有元素的首1最大公约式,则 $\phi(s) = \frac{\alpha(s)}{m(s)}$ 为矩阵 A 的最小多项式。

1、线性定常系统既可控又可观，系统是BIBO稳定的等价描述 (ABCD)

- A 系统是渐近稳定的； B系统矩阵的特征值都具有负实部；
C 系统是内部稳定的； D系统传递函数矩阵的极点都具有负实部。

2、线性定常系统 $\dot{x} = Ax$ ，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

系统的最小多项为 (B)

- A $\alpha(s) = (s-1)(s-3)$ B $\alpha(s) = (s-1)^2(s-3)$
C $\alpha(s) = (s-1)$ D $\alpha(s) = (s-3)$



3、下述关于渐近稳定性的说法正确的是（ A B C ）

- A 系统的渐近稳定性是由系统的结构和参数决定的；
- B 完全能控且能观测的线性定常系统的渐近稳定性和BIBO稳定性是等价的；
- C 李亚普诺夫方程判据是判断线性定常系统渐近稳定性的充分必要条件；
- D 克拉索夫斯基定理是判断定常系统渐近稳定性的充分必要条件。



4、以下说法正确的是（ABC）

A 线性时不变系统的渐近稳定性和全局渐近稳定性是等价的；

B 线性系统大范围渐近稳定的前提为该系统只有一个平衡状态；

C 一个线性定常系统是内部稳定的，这个系统必为BIBO稳定；

D 一个线性定常系统是BIBO稳定的，这个系统必为内部稳定。



5、已知系统状态空间描述为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} u$$

下述说法正确的是（ BD ）

A 该系统只有唯一的零平衡态；

B 该系统是李雅普诺夫意义下稳定的；

C 该系统是李雅普诺夫意义下渐近稳定的；

D 无论a、b、c取何值该系统一定是不能控的。



例：系统状态空间描述如下，判断是否渐进稳定，是否BIBO稳定？

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解：1、 $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$

系统的特征值为-4, 1, 系统非渐进稳定（不是内部稳定）。

2、系统的传递函数为：

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{u(s)} &= c(\mathbf{S}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -4 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}{(s-1)(s+4)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-1+s}{(s-1)(s+4)} = \frac{1}{(s+4)} \end{aligned}$$

系统既约传递函数有负实根，系统BIBO稳定。





第5章 系统运动的稳定性

例：判断下述线性定常系统的稳定性

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解：1) 系统矩阵 A 为奇异矩阵，故系统存在无穷多个平衡状态。系统的平衡状态为 $\mathbf{x}_e = [x_1 \ x_2 \ 0]^T$ ，其中 x_1 和 x_2 为任意实数，即状态空间中 x_1 — x_2 平面上的每一个点均为平衡状态。

2) 系统的特征方程

$$\det(sI - A) = s^2(s + 1) = 0$$

特征值分别为： $\lambda_1 = -1$ ， $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$



第5章 系统运动的稳定性

3)

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2(s+1)} \begin{bmatrix} s(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}\end{aligned}$$

故最小多项式为 $f(s)=s(s+1)$ 。系统所有特征值均具有非正实部，且具有零实部的特征值是最小多项式的单根，因此系统的每一个平衡状态都是李亚普诺夫意义下稳定的。



第5章 系统运动的稳定性

例：判断下述线性定常系统的稳定性

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x$$

解：A为非奇异，原点 $x = 0$ 是系统的唯一平衡状态。

$$\det(sI - A) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = (s+1)(s+2)(s+3) = 0$$

特征值分别为： $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$

或基于劳斯判据： $\det(sI - A) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

系统的所有特征值都具有负实部，所以系统的唯一平衡状态 $x_e = 0$ 是渐近稳定的。

例：系统状态方程和输出方程如下

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -K & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad -2 \quad 1] x$$

分别给出满足下列条件时，实数 K 的取值范围。

(1) 系统渐近稳定； (2) 系统BIBO稳定。

解： (1) $x = 0$ 是系统的唯一平衡态，且特征多项式为

$$\det(sI - A) = s^3 + 2s^2 + ks + 4$$

列出劳斯表：

s^3	1	k
s^2	2	4
s^1	$\frac{2k-4}{2}$	0
s^0	4	

$$\Rightarrow \frac{2k-4}{2} > 0$$

故 $k > 2$ 时，所有特征值均具有负部，系统是渐近稳定的。



(2) 计算传递函数 $G(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{(s-1)^2}{s^3 + 2s^2 + ks + 4}$

分情况讨论：

无零极点对消的情况： $k > 2$ 时，BIB稳定；

有零极点对消的情况： $k = -7$ 时， $G(s) = \frac{1}{s+4}$ BIB稳定；

即 $k > 2$ 或 $k = -7$ 时，系统时BIBO定的。





例：设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

试确定系统的稳定性。

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

解：

1) 令

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

→ $x_1 = 0, x_2 = 0$ ，即原点是该系统唯一的平衡状态。

2) 选取正定标量函数：

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2,$$

$$V(0) = 0$$

3) 确定 $V(x)$ 对时间的导数并判断其定号性：

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$= 2x_1x_2 - 2x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 - 2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

是负定的。

4) 由于当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $V(x) \rightarrow \infty$ 故系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2 x_2$$

已知系统的状态方程为：

判断系统平衡状态是否为大范围渐近稳定的。

解： $x_1=0, x_2=0$ ，即原点是该系统唯一的平衡状态。

1) 取李雅普诺夫函数 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ 显然是正定函数；

2) 计算 $\dot{V}(x)$ 并判断其定号性。

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_1^2 x_2^2 \quad \dot{V}(x) \text{ 负半定。}$$

3) 判断 $\dot{V}(x)$ 不恒为零

将 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 分别代入状态方程，可以判断均不为状态方程的解，因此 $\dot{V}(x)$ 不恒为零。

4) 当 $\|x\| \rightarrow \infty \quad V(x) \rightarrow \infty$

所以该系统在坐标原点处大范围渐近稳定。





例 系统的状态方程为 $\dot{x}_1 = x_2$
 $\dot{x}_2 = -x_1 + x_2$

分析系统平衡状态的稳定性。

解 系统的平衡状态为 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$

选取李氏函数: $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$

显然它是正定的, 即满足
$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 & \mathbf{x} \neq 0 \\ V(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} = 0 \end{cases}$$

而 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 2x_2^2$
所以系统不稳定的。



综合问题的提法

系统的综合问题由受控系统，性能指标和控制输入三个要素组成。

所谓系统综合，就是对给定受控系统，确定反馈形式的控制，使所导出闭环系统的运动行为达到或优于指定的期望性能指标。





性能指标的类型

- 以渐近稳定作为性能指标——**镇定问题**
- 以期望闭环特征值作为性能指标——**极点配置问题**
- 以使多输入多输出系统化为多个单输入单输出系统作为性能指标——**解耦控制问题**
- 以使系统输出无静差地跟踪参考信号作为性能指标 —— **跟踪问题**



— 两种常用反馈结构

1 状态反馈

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

受控系统

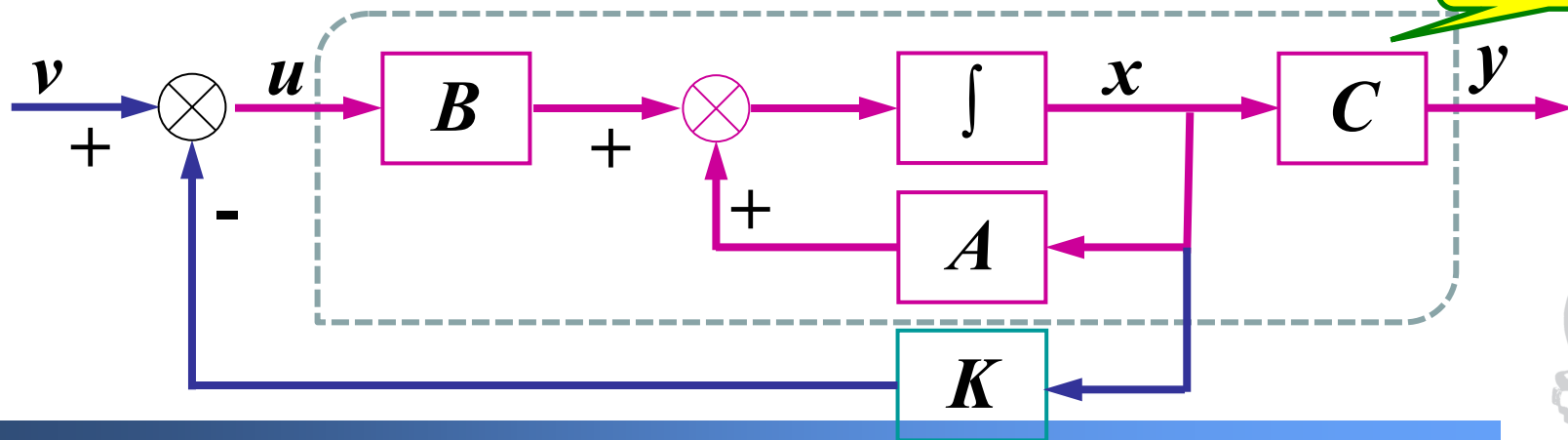
引入状态的线性反馈

$$u = v - Kx$$

线性状态反馈，
简称状态反馈

式中 v 是 p 维参考输入； K 是 $p \times n$ 维定常反馈矩阵。

受控系统

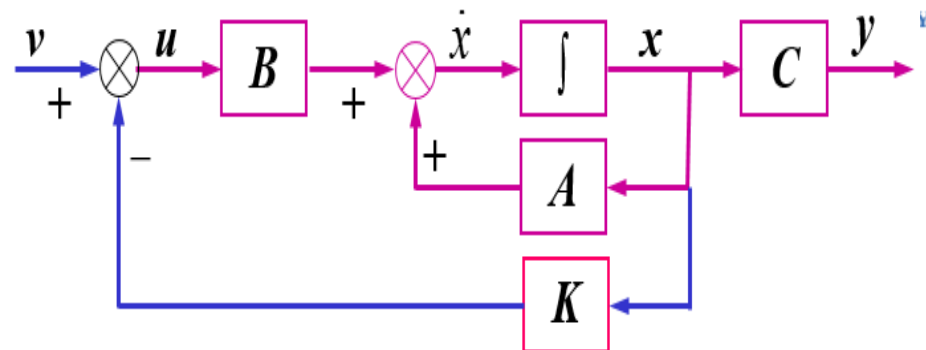




受控系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$



状态反馈(闭环)系统的状态空间描述为:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(v - Kx) \\ &= (A - BK)x + Bv \\ y &= Cx\end{aligned}$$

特征多项式:

$$\alpha_k(s) = \det(sI - A + BK)$$

传递函数矩阵:

$$G_K(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$$





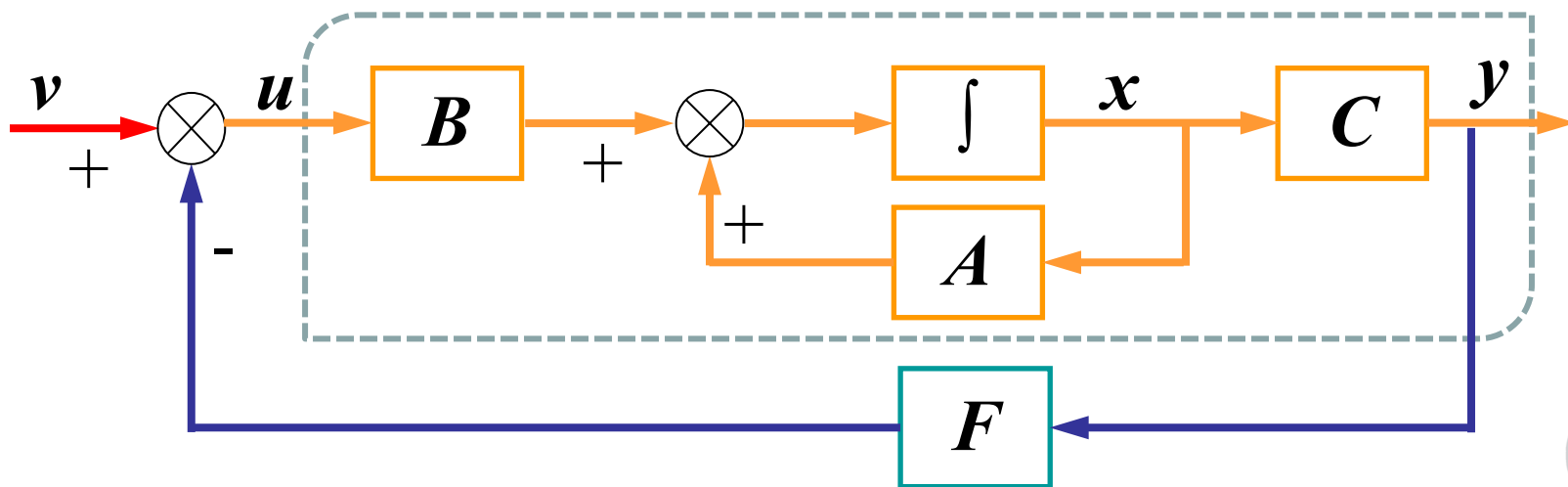
2. 输出反馈

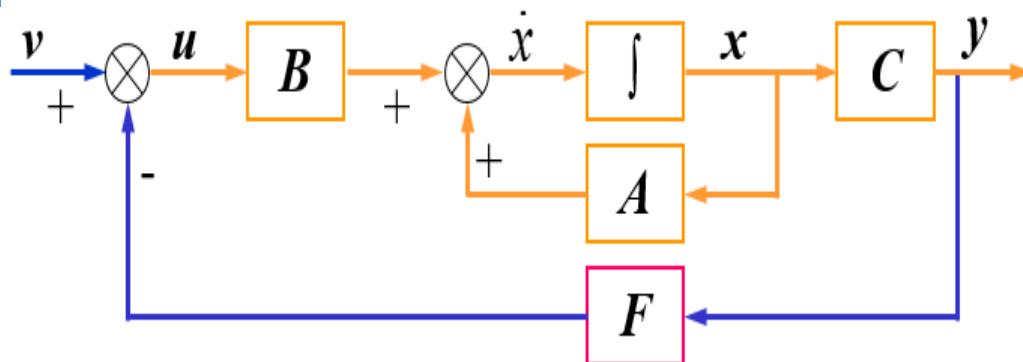
$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

引入输出 y 的线性反馈

$$u = v - Fy = v - FCx$$

式中： v 是 p 维参考输入向量； F 是 $p \times q$ 维实反馈增益矩阵。





输出反馈(闭环)系统的状态空间描述为:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(v - FCx) \\ &= (A - BFC)x + Bv \\ y &= Cx\end{aligned}$$

特征多项式:

$$\alpha(s) = \det(sI - A + BFC)$$

传递函数矩阵:

$$G_F(s) = C(sI - A + BFC)^{-1}B$$





3. 状态反馈结构与输出反馈结构比较

(1)反馈属性上:

状态反馈是一种完全的系统信息反馈;

输出反馈是系统结构信息的一种不完全反馈。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + Bv \\ y &= Cx\end{aligned}$$

状态反馈

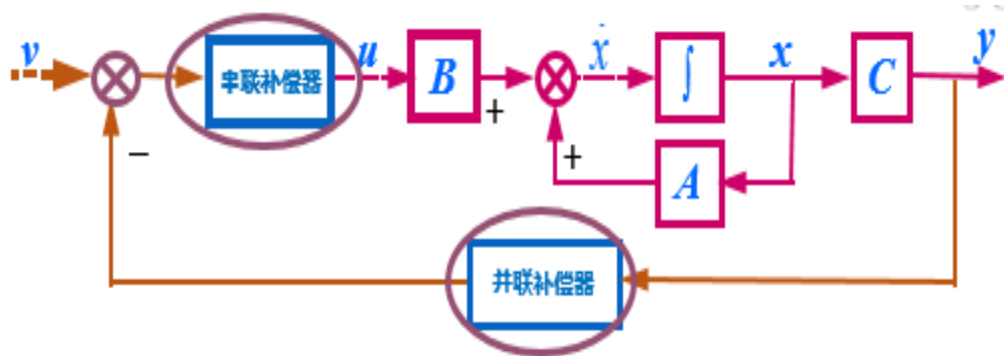
$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BFC)x + Bv \\ y &= Cx\end{aligned}$$

输出反馈



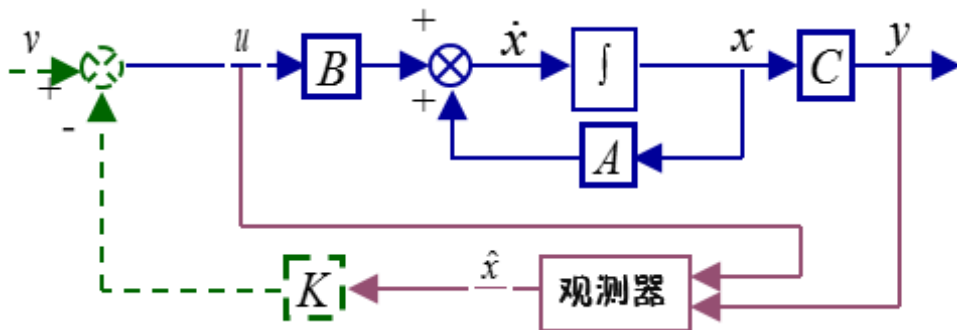
(2) 反馈功能上:

状态反馈在功能上远优于输出反馈。使输出反馈达到状态反馈功能的一个途径是采用如右图所示的动态输出方案。



(3) 反馈实现上:

输出反馈在实现上要优于状态反馈。使状态反馈物理上可实现的一个有效途径是引入状态观测器，如右图所示。





二. 反馈结构对系统性能的影响

1. 状态反馈对系统能控性和能观测性的影响

定理：状态反馈不改变系统的能控性，但可能改变系统的能观测性。

2. 输出反馈对系统能控性和能观测性的影响

定理：输出反馈不改变系统的能控性和能观测性。





状态反馈系统，不一定能保持观测性。由于状态反馈改变系统的极点(特征值)，若发生零点与极点抵消情况，则改变系统的能观测性。

例：已知能控能观测系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

原系统的传递函数：

$$G(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-3)}$$

若采用的状态反馈是： $K = [0 \quad 4]$

$$u = v - K x = v - [0 \quad 4] x$$





则闭环系统为：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + Bv \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

闭环系统能观测性判别矩阵为：

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{rank } Q_o = 1 < 2;$$

所以闭环系统是不完全能观测，其传递函数为

$$G_K(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s-1}$$

有零极点对消！！





3. 反馈结构对系统稳定性的影响

什么是状态反馈镇定



对于线性定常受控系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$

找到状态反馈控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}\mathbf{x}$

使得通过反馈构成的闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}$$

是渐近稳定的，即 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ 的特征值均具有负实部，则称系统实现了状态反馈镇定。

可镇定条件：当线性定常系统的不可控部分渐近稳定时，系统是状态反馈可镇定的。



考虑系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

能否通过状态反馈镇定？请说明理由。

解：不能状态变量对应的特征值为 -2 ，
即不能状态变量是渐近稳定的，而能控子系统可
通过状态反馈实现闭环极点的任意配置，故用状
态反馈可以使闭环系统稳定。





例 系统方程如下，讨论能否用状态反馈使闭环系统稳定。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解 $\text{rank } Q_c = \text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2 < n = 3$

从 Q_c 中任选两个线性无关的列向量，例如 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ 再补充一个与之线性无关的列向量 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 构成非奇异变换阵 P^{-1} 。

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1}$$

$$\bar{B} = PB \quad \bar{C} = CP^{-1}$$





线性变换后
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad -1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix}$$

可控子空间
$$\dot{x}_C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x_C + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{C}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y_1 = [1 \quad -1] x_C$$

可见，不能控子系统对应的特征值为 $\lambda_3 = -1$

即不能控子系统是渐近稳定的，而能控子系统可通过状态反馈实现闭环极点的任意配置，故用状态反馈可以使闭环系统稳定。





例 系统方程如下，讨论能否用状态反馈使闭环系统稳定。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解

$$\text{rank } Q_c = \text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} = 2 < n = 3$$

从 Q_c 中任选两个线性无关的列向量，例如 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 和 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ 再补充一个与之线性无关的列向量 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 构成非奇异变换阵 P^{-1} 。

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1}$$

$$\bar{B} = PB \quad \bar{C} = CP^{-1}$$





线性变换后
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 2 \quad -1] \begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_C = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x_C + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{C}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y_1 = [1 \quad 2] x_C$$

可见，不能控子系统对应的特征值为 $\lambda_3 = 1$

即不能控子系统是不稳定的，虽然能控子系统可通过状态反馈实现闭环极点的任意配置，故用状态反馈不能使闭环系统稳定。



6.2 状态反馈极点配置



哈尔滨工程大学

HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

一、极点配置问题的提法

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv$$

$$y = Cx$$

以一组期望极点即特征值为性能指标，利用状态反馈和输出反馈，使综合导出的控制系统的闭环极点配置到复平面上的期望位置，称为**极点配置**。极点配置能够改善系统的稳定性、动态性能和稳态精度。

二、利用状态反馈的极点可配置条件

结论:利用状态反馈**任意配置**全部闭环极点即特征值的**充分必要条件**是被控系统完全能控。



说明1： 状态反馈 K 不能改变不能控部分的极点，
但能够任意配置能控部分的极点。

说明2： 输出反馈 F 也只能配置能控部分的极点，
但不一定能实现期望极点的任意配置；一定不能
将极点配置到系统的零点处。

结论： 对于完全能控线性时不变受控系统，采用
输出反馈一般不能任意配置系统的全部极点。



例：设不完全可控系统 (A, B, C) 为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

是否存在状态反馈矩阵 K ，使期望闭环特征值配置到下列

位置：	$\{-2, -2, -1, -1\};$	存在
	$\{-2, -2, -2, -1\};$	存在
	$\{-2, -2, -2, -2\}。$	不存在

一般的根据系统状态方程进行判断（或对系统作可控性结构分解），可知系统有一个不可控特征值-1。



例：已知线性定常系统，设计状态反馈矩阵 K ，能使闭环特征值配置到（ C ）

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

A {-5, -6, -9, -1}

B {-2, -1, -4, -2}

C {-2.5, -2, -1, -1}

D {-1.2, -5.4, -6, -7}



例：通过状态反馈可以使闭环系统的特征值配置在 $\{-1, -2, -3\}$ 的受控系统状态空间描述为（ A C D ）

$$\mathbf{A} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{C} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{D} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$





**例：判断下述哪些系统可以通过状态反馈
任意配置所有特征值（ ABD ）**

$$\mathbf{A} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{B} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{C} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{D} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -9 & -5 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$



三. 单输入—单输出系统的极点配置算法



给定可控系统 (A, b, c) 和一组期望的闭环特征值 $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$, 要确定 $(1 \times n)$ 维的反馈增益向量 k , 使闭环系统矩阵 $(A - bk)$ 的特征值为 $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$ 。

1. 系数比较法

设 $k = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$

(1) 计算期望的特征多项式:

$$\alpha^*(s) = (s - \lambda_1^*) \cdots (s - \lambda_n^*) = s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^*$$





(2) 用待定系数计算闭环系统的特征多项式:

$$\alpha(s) = \det(sI - A + bk) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

(3) 由下列 n 个方程计算反馈矩阵 k 的元素:

$$a_{n-1} = a_{n-1}^*, \quad a_{n-2} = a_{n-2}^*, \quad \cdots, \quad a_1 = a_1^*, \quad a_0 = a_0^*$$





例：已知完全能控的线性定常系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

求反馈向量 k ，使系统的闭环特征值为：

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1 + j, \quad \lambda_3 = -1 - j$$

解：

(1) 计算期望的特征多项式：

$$\alpha^*(s) = (s + 2)(s + 1 - j)(s + 1 + j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

(2) 设 $k = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$ ，用待定系数计算闭环系统的特征多项式：





$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \det(sI - A + bk) = \det \begin{bmatrix} s + k_1 & k_2 & k_3 \\ -1 & s + 6 & 0 \\ 0 & -1 & s + 12 \end{bmatrix} \\ &= (s + k_1)(s + 6)(s + 12) + k_3 + k_2(s + 12) \\ &= s^3 + (k_1 + 18)s^2 + (18k_1 + k_2 + 72)s + 72k_1 + 12k_2 + k_3;\end{aligned}$$

(3) 系数对应相等:

$$k_1 + 18 = 4; \quad 18k_1 + k_2 + 72 = 6; \quad 72k_1 + 12k_2 + k_3 = 4;$$

$$\text{解得: } k_1 = -14; \quad k_2 = 186; \quad k_3 = -1220;$$

$$\text{即: } k = [-14 \quad 186 \quad -1220];$$





2. 完全能控系统极点配置的规范算法

(1) 计算 A 的特征多项式:

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

(2) 计算期望的特征多项式:

$$\begin{aligned}\alpha^*(s) &= (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) \cdots (s - \lambda_n^*) \\ &= s^n + a_{n-1}^*s^{n-1} + \dots + a_1^*s + a_0^*\end{aligned}$$

(3) 计算(能控规范形)反馈矩阵 \bar{k} :

$$\bar{k} = [a_0^* - a_0 \quad a_1^* - a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}^* - a_{n-1}]$$





(4) 计算 $\bar{x} = P\chi$ 中能控规范型形换矩阵 P^{-1} :

$$P^{-1} = Q_c A = [\mathbf{b} \quad A\mathbf{b} \quad \cdots \quad A^{n-2}\mathbf{b} \quad A^{n-1}\mathbf{b}] \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \ddots & & 1 & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix};$$

(5) 计算 P :

$$P = (P^{-1})^{-1};$$

(6) 计算原系统的反馈增益阵:

$$k = \bar{k}P$$



例 已知线性定常系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

用规范计算方法求反馈向量 k ，使系统的闭环特征值为：

$$\lambda_1^* = -2, \quad \lambda_2^* = -1 + j, \quad \lambda_3^* = -1 - j$$

解：1) 系统的能控性判别阵为：

$$Q_c = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{rank} Q_c = 3 = n$$

系统是完全可控的，满足可配置条件。



2) 系统的特征多项式为:

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s+6 & 0 \\ 0 & -1 & s+12 \end{bmatrix} = s^3 + 18s^2 + 72s$$

3) 系统的期望特征多项式为:

$$\alpha^*(s) = (s+2)(s+1-j)(s+1+j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

4) 计算 \bar{k} :

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \begin{bmatrix} \alpha_0^* - \alpha_0 & \alpha_1^* - \alpha_1 & \alpha_2^* - \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 - 0 & 6 - 72 & 4 - 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -66 & -14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$





5) 变换矩阵为:

$$P^{-1} = Q_c A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 18 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6) 求P:

$$P = \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix}$$

7) 计算反馈增益向量:

$$k = \bar{k}P = \begin{bmatrix} -14 & 186 & -1220 \end{bmatrix}$$



四. 状态反馈对传递函数矩阵的影响

1. 单输入单输出线性定常系统

结论：对完全能控 n 维单输入单输出线性时不变系统，引入状态反馈任意配置闭环系统传递函数极点的同时，零点一般不发生改变。

注：强调“一般”是因为可能会出现状态反馈将闭环系统极点配置为与零点相重合从而构成对消而对零点产生影响的情况。



思考题：已知系统的传递函数为

$$g(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s-2)(s+4)}$$

求状态反馈矩阵 k ，使闭环系统的传递函数为

$$g_k(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+4)}$$

解： 1. 系统的传递函数化简为：

$$g(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 3s^2 - 6s - 8}$$





2. 系统的能控规范形实现为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [6 \quad 5 \quad 1] x$$

系统能控，可通过状态反馈实现极点任意配置。

3. 状态反馈不改变系统传递函数的零点，所以期望的闭环系统的传递函数为：

$$g_k(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{(s+2)(s+4)(s+2)}$$



故闭环系统期望的特征多项式为：

$$\alpha^*(s) = (s+2)(s+4)(s+2) = s^3 + 8s^2 + 20s + 16 \quad (1)$$

4. 设 $k = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$ ，得到的闭环系统实际的特征多项式为：

$$\alpha(s) = \det[sI - A + bk] = s^3 + (3 + k_3)s^2 + (-6 + k_2)s + (-8 + k_1) \quad (2)$$

比较(1)和(2)，可得

$$\begin{cases} -8 + k_1 = 16 \\ -6 + k_2 = 20 \\ 3 + k_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 24 \\ k_2 = 26 \\ k_3 = 5 \end{cases}$$

所求的状态反馈增益矩阵： $k = [24 \quad 26 \quad 6]$



一、问题的提出

n 维的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0$$

$$y = Cx$$

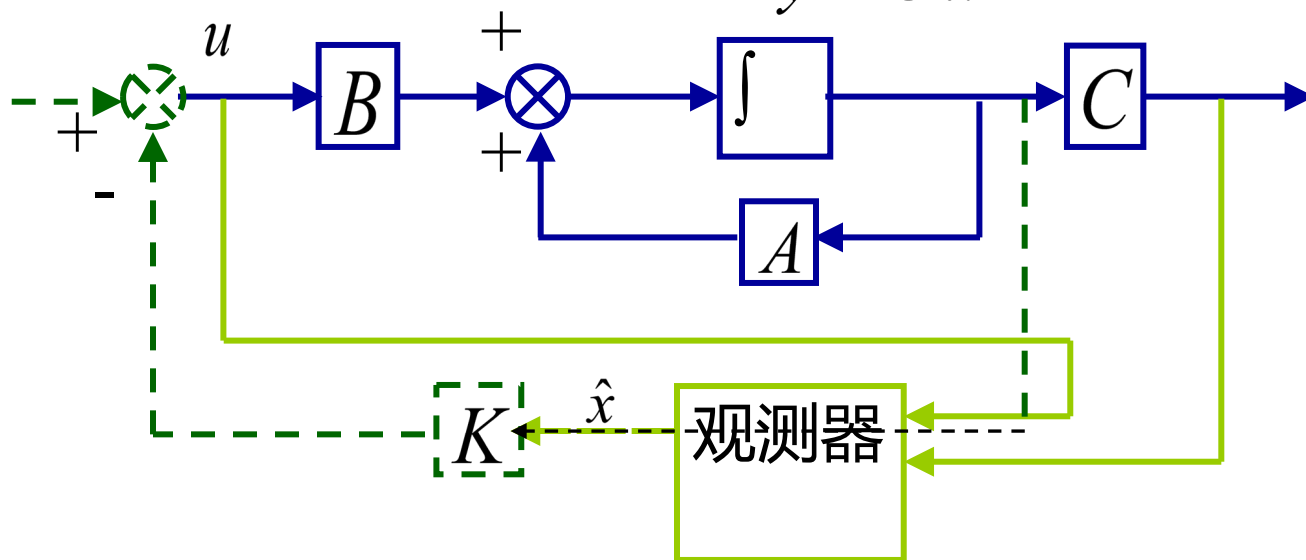


图1 状态重构问题的直观说明

状态观测器： 输出 $\hat{x}(t)$ 渐近等价于原系统状态 $x(t)$ 的观测器，
即以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ 为性能指标综合得到的观测器。



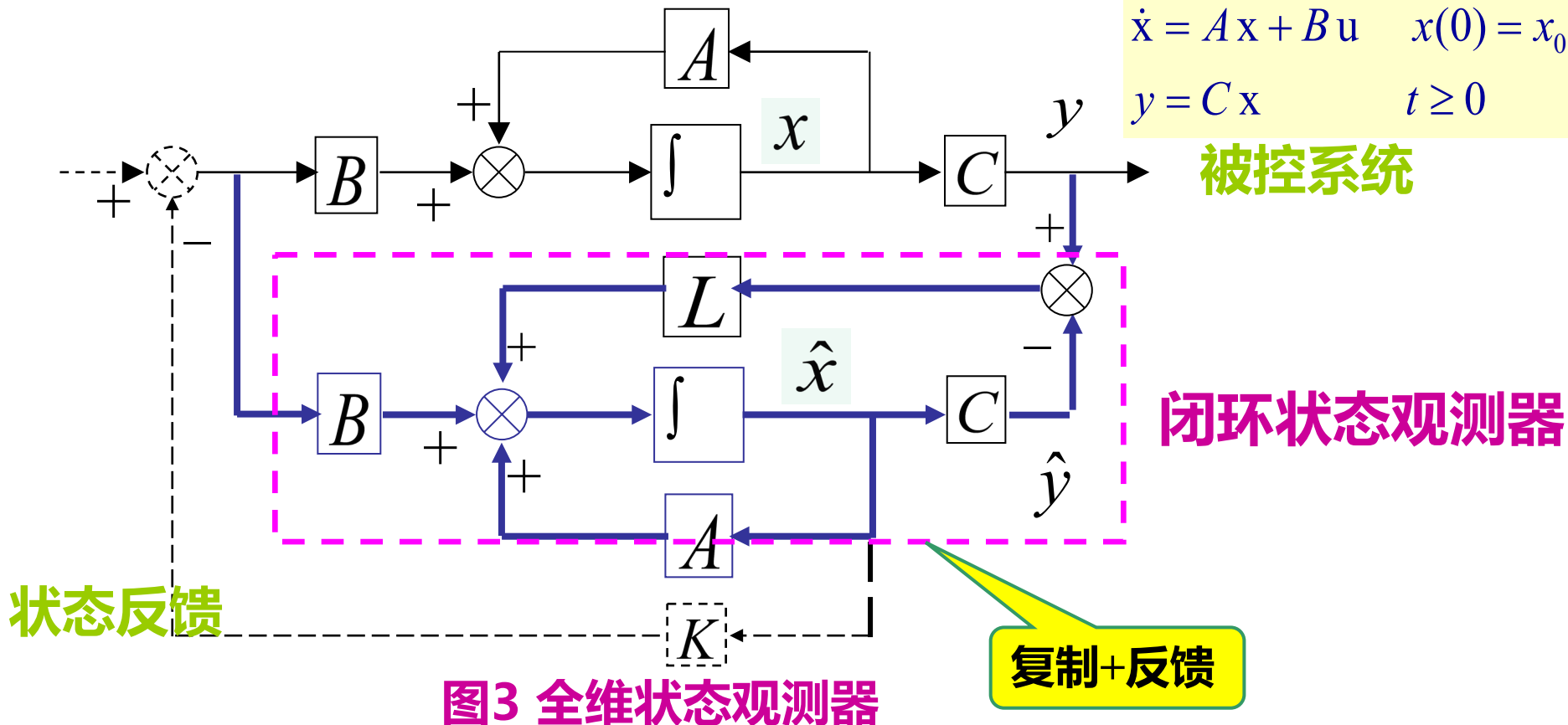
2) 全维闭环状态观测器



$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0$$

$$y = Cx \quad t \geq 0$$

被控系统



全维闭环状态观测器状态空间描述为:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

观测器输出反馈阵





$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}$$



$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly, \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

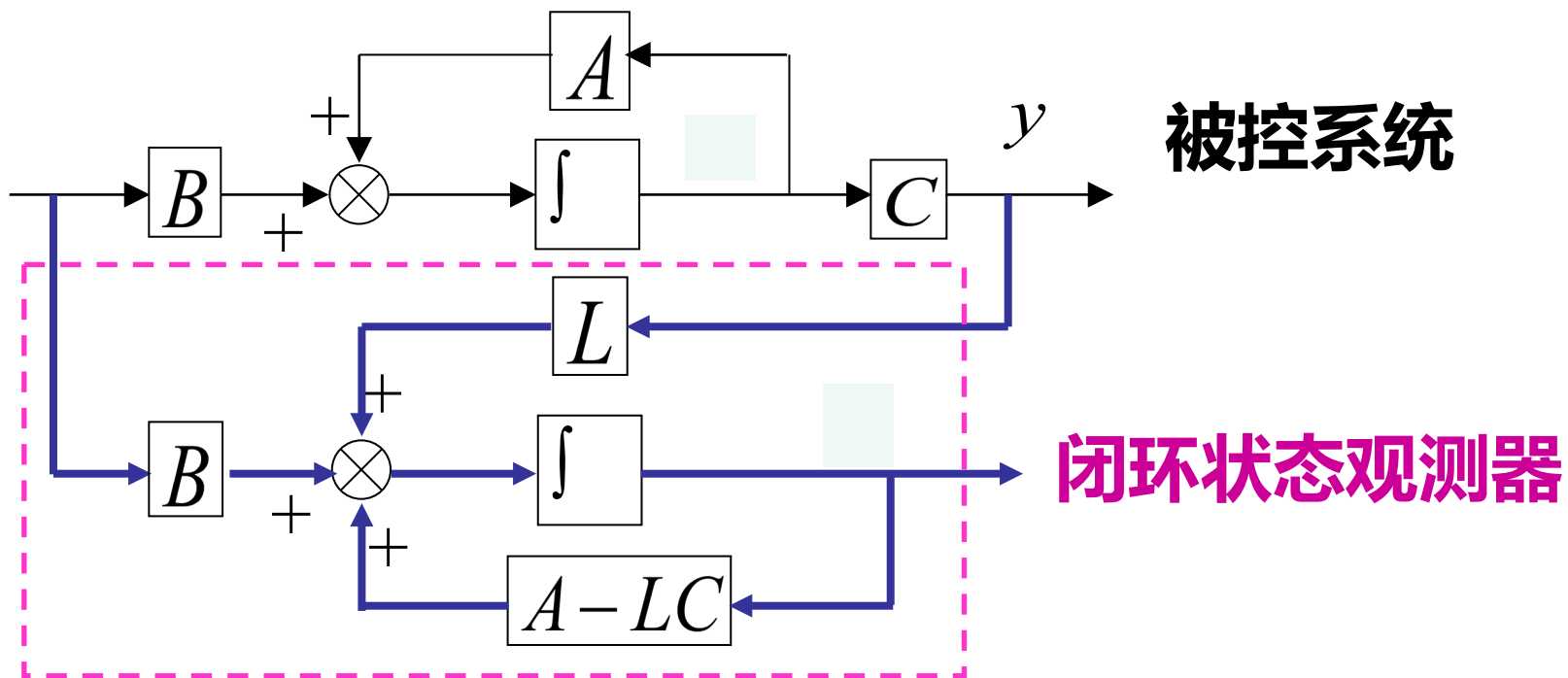


图4 全维状态观测器





2、观测器的存在条件

定理：系统的渐近状态观测器存在的充分必要条件是系统能观测，或者系统虽然不能观测，但是其不能观测的子系统的特征值具有负实部。

由对偶原理：

系统 (A, B, C)
能观测



对偶系统
 (A^T, C^T, B^T) 能控

针对 (A, C) 设计状态观测器增益矩阵 L ，等价于

针对 (A^T, C^T) 设计状态反馈增益矩阵 L^T 。

$$\det(sI - A + LC) = \det(sI - A + LC)^T = \det(sI - A^T + C^T L^T) = \alpha^*(s)$$

基于系统镇定问题的相关讨论可以得到定理的结论。





观测器的特征值可任意配置条件

定理：若被控系统 (A, C) 可观测，则必可采用

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

所示的全维状态观测器来重构其状态，并且必可通过选择增益阵 L 而任意配置 $(A - LC)$ 的全部特征值。



3、观测器综合算法



对于给定的 n 维被控系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu & x(0) &= x_0 & t &\geq 0 \\ y &= Cx\end{aligned}$$

设系统 (A, B, C) 可观测，给定全维状态观测器的一组期望的特征值： $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ ，设计如下所示的全维状态观测器。

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$



方法一：系数比较法



1) 计算期望的特征多项式

$$\begin{aligned}\alpha^*(s) &= (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) \cdots (s - \lambda_n^*) \\ &= s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \cdots + a_1^* s + a_0^*\end{aligned}$$

2) 设反馈增益阵 $l = [l_1 \quad l_2 \quad \cdots \quad l_n]^T$, 用待定系数计算闭环观测系统特征多项式

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \det(sI - A + LC) \\ &= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\end{aligned}$$

其中：系数 $\{a_i\}$ 中包含未知元素 $\{l_i\}$ 。





3) 求解下列 n 个方程，计算出反馈矩阵 L 的元素

$$a_{n-1} = a_{n-1}^*, \quad \cdots, \quad a_1 = a_1^*, \quad a_0 = a_0^*$$

4) 计算 $(A-LC)$ ，则所要设计的全维状态观测器就为

$$\dot{\hat{x}} = (A-LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

而 \hat{x} 即为 x 的估计状态。





方法二：规范算法

- 1) 导出被控系统 (A, B, C) 的对偶系统 (A^T, C^T, B^T) ;
- 2) 利用完全可控系统极点配置的规范算法，计算系统 (A^T, C^T, B^T) 的反馈增益阵 L^T ;
- 3) 计算 $(A - LC)$ ，则所要设计的全维状态观测器就为

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

而 \hat{x} 即为 x 的估计状态。



例：给定系统



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0] x$$

观测器系统的特征值为： $\lambda_{1,2}^* = -10 \pm 10j$ ，试构造全维状态观测器。

解：方法一

$$\text{rank} \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

该系统能观测，可任意配置全维状态观测器的极点。

1) 期望特征多项式：

$$\alpha^*(s) = (s + 10 + 10j)(s + 10 - 10j) = s^2 + 20s + 200$$





2) 设增益阵 $L = [l_1 \quad l_2]^T$, 闭环观测系统特征多项式为

$$\alpha(s) = \det(sI - A + LC) = \begin{vmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 - 9 & s \end{vmatrix} = s^2 + l_1 s + (l_2 - 9)$$

3) 得到方程组:

$$\begin{cases} l_1 = 20 \\ l_2 - 9 = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 20 \\ l_2 = 209 \end{cases} \therefore L = \begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix}$$

4) 设计的全维状态观测器为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - Lc)\hat{x} + bu + Ly \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0] \right) \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix} y \\ &= \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -200 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$





方法二:

$$1) \because \text{rank} \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2, \text{ 该系统可观测,}$$

\therefore 其对偶系统 (A^T, c^T, b^T) 完全可控, 故可以任意配置极点

2) 用系统极点配置的规范算法, 计算反馈增益阵 L^T

① 观测器期望特征多项式:

$$\alpha^*(s) = (s + 10 + 10j)(s + 10 - 10j) = s^2 + 20s + 200$$

② 可控系统 (A^T, c^T, b^T) 的特征多项式:

$$\alpha(s) = \det(sI - A^T) = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -9 & s \end{vmatrix} = s^2 - 9$$

③ 计算 \bar{k} : $\bar{k} = [a_0^* - a_0 \quad a_1^* - a_1] = [209 \quad 20]$





④ 变换矩阵 P^{-1} :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} c^T & A^T c^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⑤ 系统 (A^T, c^T, b^T) 的反馈增益矩阵 L^T :

$$L^T = \bar{K}P = \begin{bmatrix} 209 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 209 \end{bmatrix}$$

3) $L = \begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix}$ 设计的全维状态观测器为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - Lc)\hat{x} + bu + Ly \\ &= \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -200 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$





例：已知系统的微分方程为 $\frac{d^3 y}{dt^3} + 5\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u$

设计全维状态观测器反馈矩阵 $L = [l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T$

使观测器的极点为-2, -3, -5, 并写出维状态观测器的状态方程。

解： $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 0 \quad 1]$

能观，可实现闭环状态观测器极任意配置。

期望特征多项式： $(s+2)(s+3)(s+5) = s^3 + 10s^2 + 31s + 30$

设 $L = [l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T$

实际特征多项式： $\det(sI - A + LC) = s^3 + (l_3 + 5)s^2 + (l_2 + 3)s + (l_1 + 2)$

比较，得 $L = [28 \quad 28 \quad 5]^T$

$$\dot{\hat{x}} = (A - Lc)\hat{x} + bu + Ly = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -30 \\ 1 & 0 & -31 \\ 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 28 \\ 28 \\ 5 \end{bmatrix} y$$



三 分离特性



考虑 n 维的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

假设系统是可观测的，则可设计全维状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

得到真实状态 x 的估计值 \hat{x} ，引入状态反馈 $u = v - K\hat{x}$

此时状态反馈子系统的状态空间描述为：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(v - K\hat{x}) = Ax - BK\hat{x} + Bv \\ y &= Cx\end{aligned}$$

全维状态观测器的状态空间描述为：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - LC)\hat{x} + B(v - K\hat{x}) + LCx \\ &= (A - BK - LC)\hat{x} + LCx + Bv\end{aligned}$$





带有观测器的状态反馈组合系统的特征多项式为：



$$\alpha_k(s) = \det(sI - A + BK) \bullet \det(sI - A + LC)$$

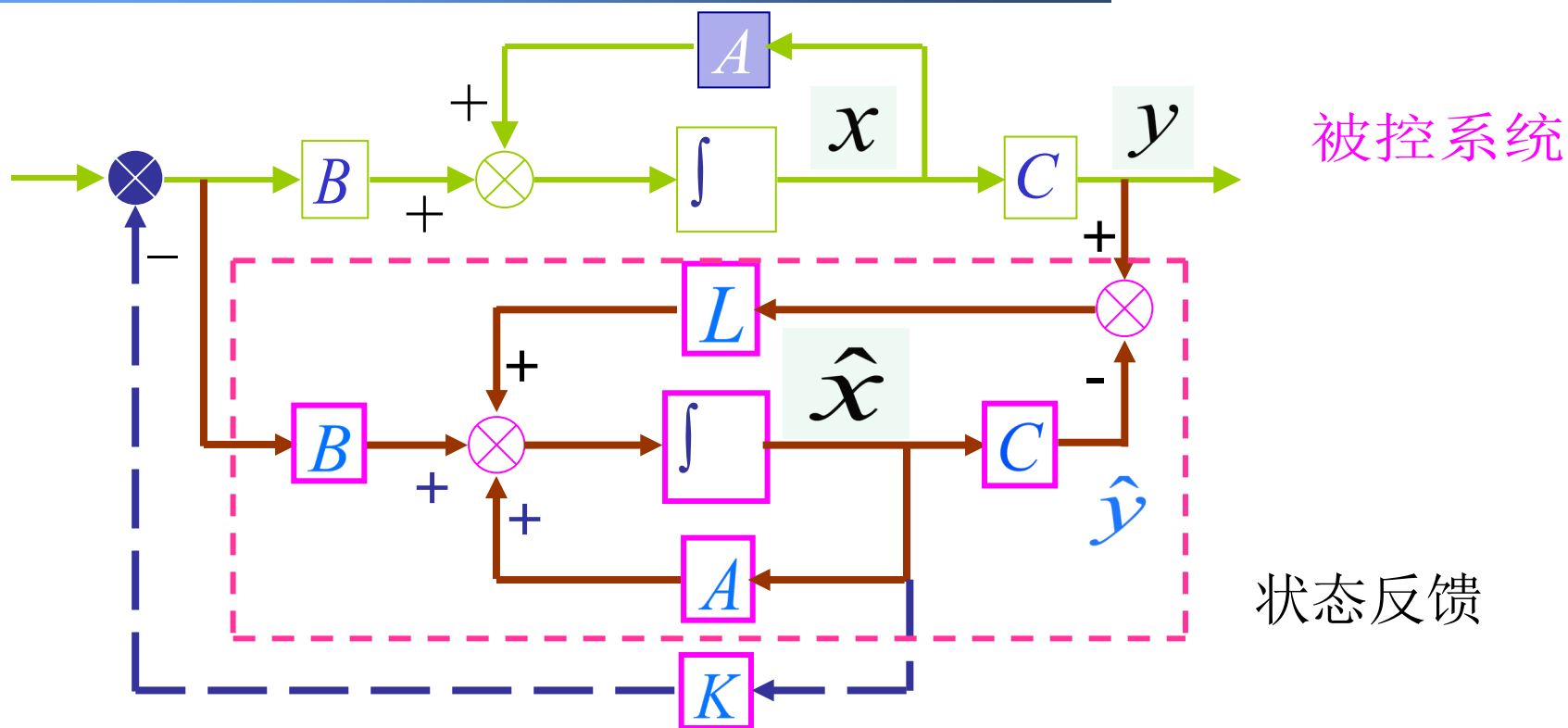
带有观测器的状态反馈组合系统的传递函数为：



$$g_K(s) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A + bK & -bK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = C[sI - A + bK]^{-1} b$$

注：引入观测器不改变直接状态反馈控制系统的传递函数矩阵





含有全维状态观测器的状态反馈系统





分离定理: 若被控系统 $\{A, B, C\}$ 完全能控且完全能观测，利用状态观测器的状态估计值实现状态反馈控制系统时，状态反馈矩阵 K 的设计和观测器中输出反馈矩阵 L 的设计可以独立进行。





例:设系统动态方程为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} x$

- 1) 设计一状态观测器估计系统的状态, 观测器的特征值为-3、-5。
- 2) 用估计出的状态进行状态反馈, 设计一状态反馈矩阵, 使系统的闭环特征值为 $-1 \pm j$ 。
- 3) 画出整个闭环系统的结构框图。

解: 1) $\text{rank} \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} = 2$ **系统状态完全能观。**

期望特征多项式: $\alpha^*(s) = (s+3)(s+5) = s^2 + 8s + 15$

令 $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ **实际特征多项式:** $\det(sI - A + Lc) = s^2 + (3l_2 + 2l_1)s + 2 + 2l_2$

比较, 得 $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.25 \\ 6.5 \end{bmatrix}$





状态观测器为：

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + bu + Ly = \begin{bmatrix} 14.5 & 22.75 \\ -15 & -2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -7.25 \\ 6.5 \end{bmatrix} y$$

$$2) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 2$$

系统状态完全能控，可以实现极点任意配置。

期望特征多项式： $(s + 1 - j)(s + 1 + j) = s^2 + 2s + 2$

令 $k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$

实际特征多项式： $\det(sI - A + bk) = s^2 + (3 + k_2)s + 2 + k_1$

比较，得 $k = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$





$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(v - K\hat{x}) = Ax - BK\hat{x} + Bv \\ y &= Cx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - LC)\hat{x} + B(v - K\hat{x}) + LCx \\ &= (A - BK - LC)\hat{x} + LCx + Bv\end{aligned}$$

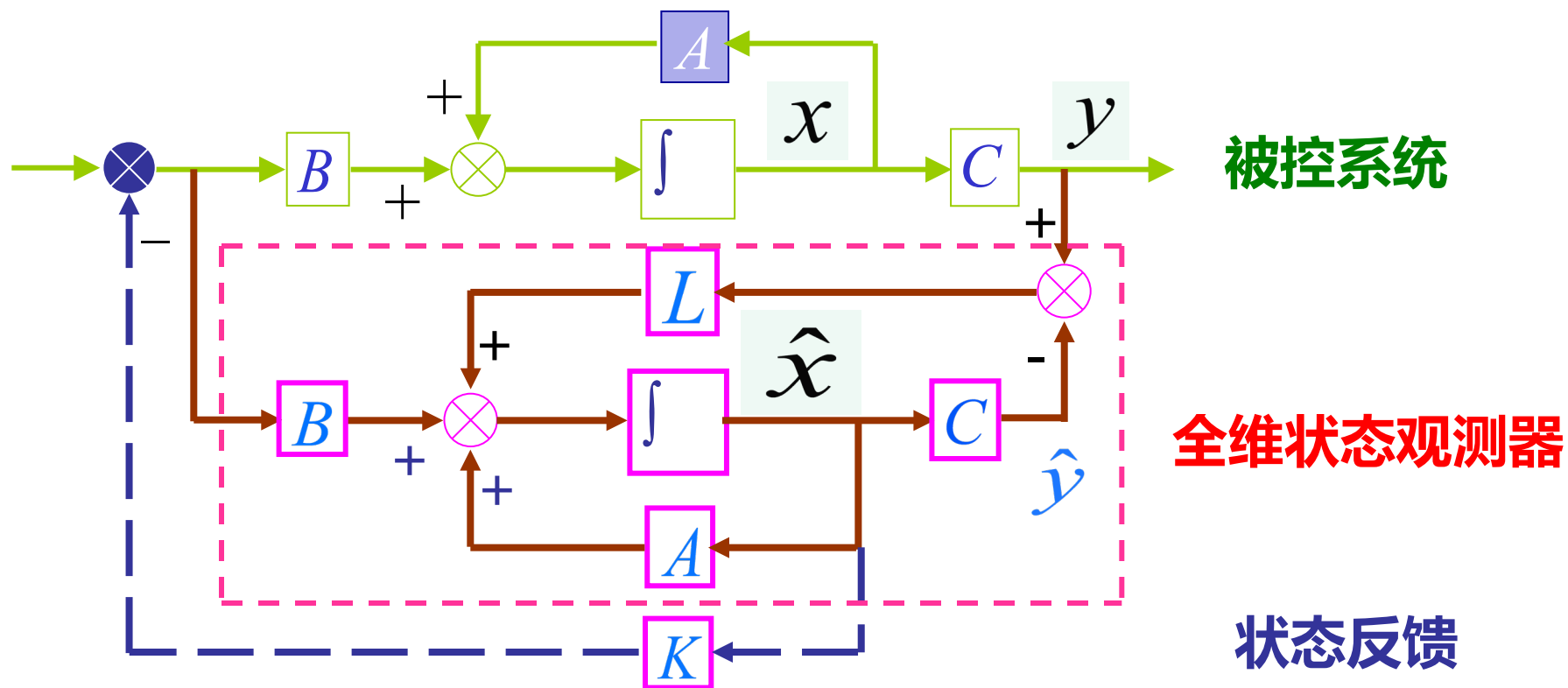
帶有观测器的状态反馈组合系统的传递函数为：

$$\begin{aligned}g_K(s) &= c[sI - A + bk]^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 2}\end{aligned}$$





3) 整个闭环系统的结构框图如下:



含有全维状态观测器的状态反馈系统



原系统及其状态观测器结构图如下

