第6章 线性反馈系统的时间域综合

在控制理论中，反馈结构是系统设计的主要方式。

对输入输出模型，只能采用输出反馈；

状态空间模型能够提供系统内部的状态信息，所以，能够采用状态反馈，对系统进行更细致的控制。

系统的综合：已知系统的结构和参数，设计控制规律u，使系统在其作用下的行为满足所给出的期望的性能指标。

性能指标可分为非优化型性能指标和优化型性能指标。

6.1 状态反馈和输出反馈

一 两种常用反馈结构

1 状态反馈

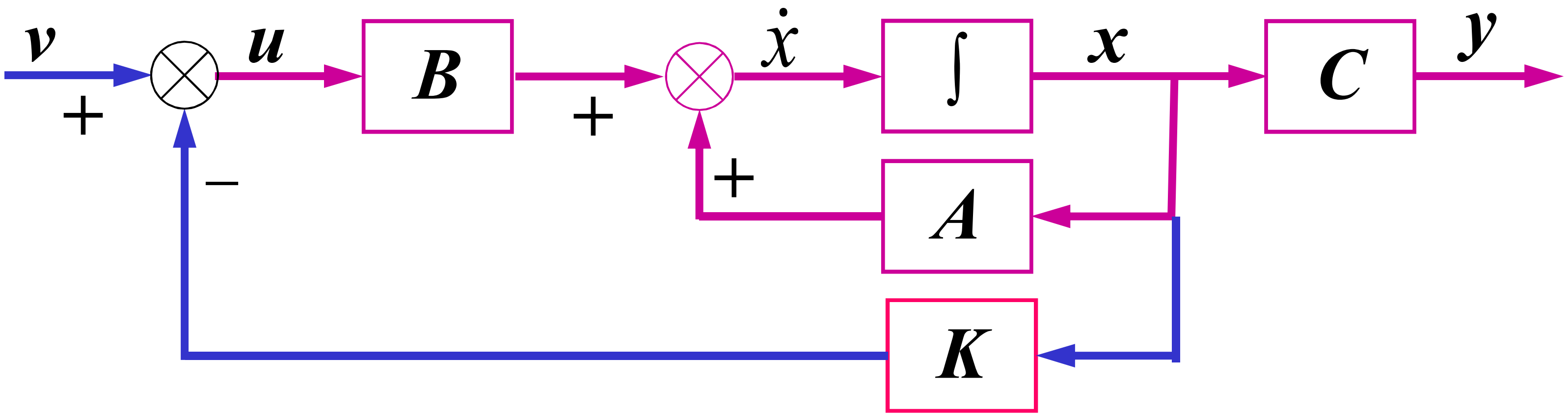
设系统为 $\dot{x} = Ax + Bu;\ y = Cx;$

引入状态的线性反馈 $u = v - Kx$。

线性状态反馈，
简称状态反馈

式中 v是p维参考输入；$K \in R^{p\times n}$是$p\times n$维定常反馈矩阵。

状态反馈系统的结构图



状态反馈(闭环)系统的状态空间描述为：

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv, \qquad y = Cx$$

特征多项式： $\alpha(s) = \det(sI - A + BK)$

传递函数矩阵： $G_K(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$

2. 输出反馈

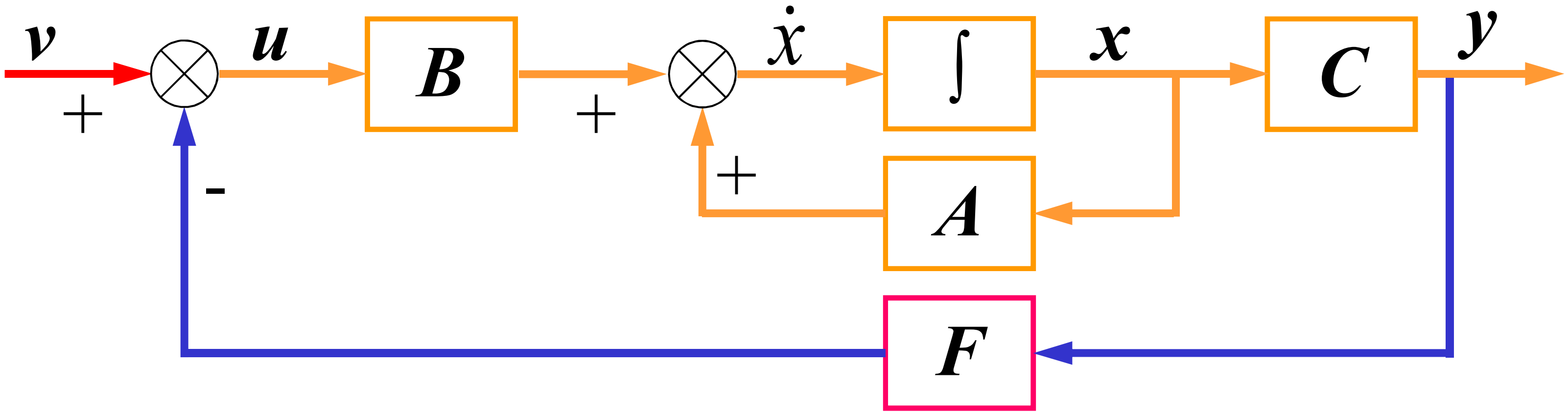
当将系统的控制量$\boldsymbol{u}$取为输出$\boldsymbol{y}$的线性函数

$$\boldsymbol{u} = v - F\boldsymbol{y} = v - FC\,x$$

时，称之为线性输出反馈，常简称为输出反馈。

式中：$\boldsymbol{v}$是$\boldsymbol{p}$维参考输入向量；$\boldsymbol{F}$是$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}$维实反馈增益矩阵。

输出反馈系统的结构图



输出反馈(闭环)系统的状态空间描述为:

$$\dot{x} = (A - BFC)x + Bv, \quad y = Cx$$

特征多项式: $\alpha(s) = \det(sI - A + BFC)$

传递函数矩阵: $G_F(s) = C(sI - A + BFC)^{-1}B$

3. 状态反馈结构与输出反馈结构比较

(1)反馈属性上: 状态反馈是一种完全的系统信息反馈，输出反馈则是系统结构信息的一种不完全反馈。

(2)反馈功能上:状态反馈在功能上要远优于输出反馈。

(3)反馈实现上：输出反馈要优于状态反馈。

二. 反馈结构对系统性能的影响

1. 对系统可控性和可观测性的影响

定理：状态反馈不改变系统的可控性，
但可能改变系统的可观测性。

证明：证可控性不变。

$$[(sI-A)\quad B]=[(sI-A+BK)\quad B]\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -K & I_p \end{bmatrix};$$

显然对于任意的***K***阵以及所有的**s**，有

$$\operatorname{rank}[(sI-A+BK)\quad B]=\operatorname{rank}[(sI-A)\quad B]$$

根据系统可控性的**PBH**秩判据可知，其可控性在状态反馈前后保持不变。

再来证状态反馈系统，不一定能保持可观测性。由于状态反馈改变系统的极点(特征值)，若发生零点与极点抵消情况，则改变系统的可观性。

例：已知可控可观测系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

原系统的传递函数：

$$G(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s-3)}$$

没有零极点对消！

若采用的状态反馈是：

$$u=v-Kx=v-\begin{bmatrix}0 & 4\end{bmatrix}x$$

则闭环系统的系统矩阵为：

$$A-bK=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

则闭环系统为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}v，\quad y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

闭环系统可观测性判别矩阵为：

$$Q_o=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}；\quad \text{rank}\ \ Q_o=1<2；$$

所以闭环系统是不完全可观测，其传递函数为

$$G_K(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s+1)}=\frac{1}{s-1}$$

有零极点
对消！！

定理：输出反馈不改变系统的可控性和可观测性。

证明：证可控性不变。

$$\left[(s\mathrm{I}-A)\quad B\right]=\left[(s\mathrm{I}-A+BFC\ )\quad B\right]\begin{bmatrix}\mathrm{I}_n & 0\\ -FC & \mathrm{I}_p\end{bmatrix}$$

可见对于任意的***F***阵以及所有的***s***，有

$$\operatorname{rank}\ \left[(s\mathrm{I}-A+BFC\ )\quad B\right]=\operatorname{rank}\left[(s\mathrm{I}-A)\quad B\right]$$

根据系统可控性的**PBH**秩判据可知，其可控性在输出反馈前后保持不变。

证可观性不变：

$$\begin{bmatrix} C \\ sI-A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -BF & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ sI-A+BFC \end{bmatrix};$$

可见对于任意的***F***阵以及所有的**s**，有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ sI-A+BFC \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ sI-A \end{bmatrix}$$

根据系统可观测性的**PBH**秩判据可知，其可观测性在输出反馈前后保持不变。

2. 反馈结构对系统稳定性的影响

状态反馈和输出反馈都改变系统的特征值，故都影响系统的稳定性。

镇定：加入反馈，使得通过反馈构成的闭环系统成为稳定系统，称之为镇定。

可镇定性：如果采用反馈措施能够使闭环系统稳定，称该系统是反馈可镇定的。

由于状态反馈具有许多优越性，而且输出反馈总可以找到与之性能等同的状态反馈系统，故在此只讨论状态反馈的可镇定性问题。

对于线性定常受控系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

如果可以找到状态反馈控制律

$$u = v - Kx$$

使得通过反馈构成的闭环系统

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv$$

是渐近稳定的，即（***A-BK***）的特征值均具有负实部，则称系统实现了状态反馈镇定。

定理：当线性定常系统的<u>*不可控*</u>部分渐近稳定时，系统是状态反馈可镇定的。

证明：由于系统{A, B}不完全可控，其结构分解为

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\left[\begin{array}{c:c}\bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \hdashline 0 & \bar{A}_{\bar{c}}\end{array}\right];\quad \bar{B}=PB=\left[\begin{array}{c}\bar{B}_c \\ \hdashline 0\end{array}\right];$$

对于任意的状态反馈矩阵 $\bar{K}=[\bar{K}_c \quad \bar{K}_{\bar{c}}]$，可导出

$$\det(sI-A+BK)=\det(sI-\bar{A}+\bar{B}\bar{K})$$

$$=\det(sI_r-\bar{A}_c+\bar{B}_c\bar{K}_c)\cdot\det(sI_{n-r}-\bar{A}_{\bar{c}});$$

其中： $K=\bar{K}P$; $\bar{K}=KP^{-1}$

即状态反馈不能改变不可控极点，因此使闭环系统稳定的必要条件是不可控部分是渐近稳定的。

考虑系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

能否通过状态反馈镇定？请说明理由。

考虑系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

(1) 求出系统的传递函数

（2）引入状态变量的线性反馈，反馈增益矩阵为 $K=\begin{bmatrix}4 & 8 & 2\end{bmatrix}$，反馈后闭环系统的可控性和可观性是否改变，请说明理由。

6.2 系统的极点配置(※)

- 利用状态反馈和输出反馈使闭环系统的极点位于所希望的极点位置，称为极点配置。状态反馈和输出反馈都能配置闭环系统的极点。

- 状态反馈K不能改变不可控部分的极点，但能够任意配置可控部分的极点。

- 输出反馈F也只能配置可控部分的极点，但不一定能实现期望极点的任意配置；不能将极点配置到系统的零点处。

一 单输入系统的极点配置

1. 极点可配置条件

定理：利用状态反馈任意配置闭环极点的充分必要条件是被控系统可控。

例如下列系统：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}u;$$

能否使闭环极点配置到这些位置？

$\{-2, -2, -1, -1\}$

$\{-2, -2, -2, -2\}$

$\{-2, -2, -2, -1\}$

证明：以单输入系统来证明该定理。

1）充分性：若系统完全可控，则通过非奇异线性变换

$\bar{\boldsymbol{x}} = P\boldsymbol{x}$ 可变换为可控标准型：$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{b}}u$

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

引入状态反馈：

$$u = v - \boldsymbol{k}\boldsymbol{x} = v - \boldsymbol{k}P^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} = v - \bar{\boldsymbol{k}}\bar{\boldsymbol{x}}$$

其中：$\bar{k} = kP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{k}_0 & \bar{k}_1 & \cdots & \bar{k}_{n-1} \end{bmatrix}$

则引入状态反馈后闭环系统的系统矩阵为：

$$\bar{A}-\bar{b}\,\bar{\boldsymbol{k}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \underline{-a_0-\bar{k}_1} & \underline{-a_1-\bar{k}_2} & \underline{-a_2-\bar{k}_3} & \cdots & \underline{-a_{n-1}-\bar{k}_n} \end{bmatrix}$$

闭环特征方程为：

$$\det(s\mathrm{I}-\bar{A}+\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{k}})$$
$$=s^n+(a_{n-1}+\bar{k}_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(a_1+\bar{k}_1)s+(a_0+\bar{k}_0)=0$$

闭环特征方程为：

$$\det(sI-\bar{A}+\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{k}})$$
$$=s^n+(a_{n-1}+\bar{k}_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(a_1+\bar{k}_1)s+(a_0+\bar{k}_0)=0$$

该***n***阶特征方程中的***n***个系数，可通过 $\bar{k}_0,\bar{k}_1,\cdots,\bar{k}_{n-1}$ 来独立设置，也就是说$(\bar{A}-\bar{\boldsymbol{b}}\,\bar{\boldsymbol{k}})$的特征值可以任意选择，即系统的极点可以任意配置。

2）必要性：如果系统（***A***, ***b***）不可控，说明系统的有些状态将不受***u***的控制，则引入状态反馈时就不可能通过控制 ***k*** 来影响不可控的极点。

二. 单输入—单输出系统的极点配置算法(※)

给定可控系统(A,b,c)和一组期望的闭环特征值$\{\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_n^*\}$, 要确定$(1\times n)$维的反馈增益向量$k$, 使闭环系统矩阵$(A-bk)$的特征值为$\{\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_n^*\}$。

1. 通用的计算方法(※):

设 $k=[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]$

(1) 计算期望的特征多项式:

$$\alpha^*(s)=(s-\lambda_1^*)\cdots(s-\lambda_n^*)=s^n+a_{n-1}^*s^{n-1}+\cdots+a_1^*s+a_0^*$$

(2) 用待定系数计算闭环系统的特征多项式:

$$\alpha(s)=\det(sI-A+bk)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

(3) 由下列***n***个方程计算反馈矩阵***k***的元素:

$$a_{n-1}=a_{n-1}^*,\quad a_{n-2}=a_{n-2}^*,\quad \cdots,\quad a_1=a_1^*,\quad a_0=a_0^*$$

注意：系统完全可控，单输入系统的极点配置有唯一解；系统不完全可控，若期望极点中包含所有不可控极点，极点配置有解，否则无解。

例 已知线性定常系统状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -6 & 0\\ 0 & 1 & -12\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

求反馈向量***k***，使系统的闭环特征值为：

$$\lambda_1=-2,\quad \lambda_2=-1+j,\quad \lambda_3=-1-j$$

解： **(1)** 计算期望的特征多项式：

$$\alpha^*(s)=(s+2)(s+1-j)(s+1+j)=s^3+4s^2+6s+4$$

(2) 设$k=[k_1\quad k_2\quad k_3]$,用待定系数计算闭环系统的特征多项式：

$$\alpha(s)=\det(sI-A+bk)=\det\begin{bmatrix} s+k_1 & k_2 & k_3 \\ -1 & s+6 & 0 \\ 0 & -1 & s+12 \end{bmatrix}$$

$$=(s+k_1)(s+6)(s+12)+k_3+k_2(s+12)$$

$$=s^3+(k_1+18)s^2+(18k_1+k_2+72)s+72k_1+12k_2+k_3;$$

(3) 系数对应相等：

$$k_1+18=4;\quad 18k_1+k_2+72=6;\quad 72k_1+12k_2+k_3=4;$$

解得： $k_1=-14$； $k_2=186$； $k_3=-1220$；

即： $k=[-14 \quad 186 \quad -1220]$;

2. 完全可控系统极点配置的规范算法

(1) 计算*A*的特征多项式:

$$\alpha(s)=\det\ (sI-A)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

(2) 计算期望的特征多项式:

$$\begin{aligned}\alpha^*(s)&=(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2^*)\cdots(s-\lambda_n^*)\\&=s^n+a_{n-1}^*s^{n-1}+\cdots+a_1^*s+a_0^*\end{aligned}$$

(3) 计算(可控标准型)反馈矩阵$\bar{\boldsymbol{k}}$:

$$\bar{\boldsymbol{k}}=[\ a_0^*-a_0\quad a_1^*-a_1\quad\cdots\quad a_{n-1}^*-a_{n-1}\ ]$$

(4) 计算变换矩阵P^{-1}:

$$P^{-1}=Q_c\Lambda=[\,b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-2}b \quad A^{n-1}b\,]\cdot\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \iddots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ \cdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix};$$

(5) 计算P:

$$P=(P^{-1})^{-1};$$

(6) 计算原系统的反馈增益阵:

$$k=\bar{k}P$$

上例的规范计算方法

解：系统的可控性判别阵为：

$$Q_c=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & A^2\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -6\\0 & 0 & 1\end{bmatrix};\quad rankQ_c=3=n$$

系统是完全可控的，满足可配置条件。

1）系统的特征多项式为：

$$\alpha(s)=\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s & 0 & 0\\-1 & s+6 & 0\\0 & -1 & s+12\end{bmatrix}$$

$$=s^3+18s^2+72s$$

2）系统的期望特征多项式为：

$$\alpha^*(s)=(s+2)(s+1-j)(s+1+j)=s^3+4s^2+6s+4$$

3）计算 $\bar{\boldsymbol{k}}$ ：

$$\bar{\boldsymbol{k}}=\begin{bmatrix} a_0^*-a_0 & a_1^*-a_1 & a_2^*-a_2 \end{bmatrix}$$

$$=[4-0 \quad 6-72 \quad 4-18]=\begin{bmatrix} 4 & -66 & -14 \end{bmatrix}$$

4）变换矩阵为：

$$P^{-1}=Q_c\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 18 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5）求*P*:

$$P=\begin{bmatrix}72 & 18 & 1\\ 12 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -12\\ 1 & -18 & 144\end{bmatrix}$$

6）计算反馈增益向量:

$$\boldsymbol{k}=\bar{\boldsymbol{k}}P=\begin{bmatrix}-14 & 186 & -1220\end{bmatrix}$$

二 多输入系统的状态反馈极点配置

1 直接法

循环矩阵定义：矩阵A的特征多项式等于其最小多项式

循环矩阵性质：

- 当且仅当A的约当标准型中相应于每个不同的特征值仅有一个约当小块时，A为循环矩阵。
- 若A的n个特征值两两互异，则A为循环矩阵；
- 若A为循环矩阵，则至少存在一个n维列向量b，使{A, b}可控

循环矩阵相关定理：

定理1：若系统{A, B}完全能控，且A为循环矩阵，则几乎对任意的实向量 $\rho_{p\times 1}$，单输入系统{A, Bρ}状态完全能控.

定理2: 若A不是循环矩阵，且系统{A, B}完全能控，则几乎对任意的矩阵 $K_{p\times n}$，A-BK的全部特征值均不相同，因而A-BK是循环矩阵。

定理3: 对n阶多输入线性定常系统，通过状态反馈，实现系统全部n个极点任意配置的充要条件是系统状态完全能控。

多输入系统极点配置算法[直接法]

第1步：判断矩阵A是否为循环矩阵

若不是，则引入一状态反馈 $u = w - K_1 x$

使得系统 $\dot{x} = (A - BK_1)x + Bw$ 的系统矩阵 $A - BK_1$ 为循环矩阵，即

$$\overline{A} = \begin{cases} A - BK_1 & \text{若 A 不是循环矩阵} \\ A & \text{若 A 是循环矩阵} \end{cases}$$

第2步：对循环矩阵 $\overline{A}$，适当选取实常向量 $\rho_{p\times 1}$，

令：$b_{n\times 1} = B_{n\times p}\rho_{p\times 1}$，使 $\{\overline{A}, b\}$ 为状态完全能控。

第3步：对于等价单输入系统$\{\bar{A}, b\}$，利用单输入极点配置问题的算法，求出状态增益向量$k_{1\times n}$

第4步：当A为循环矩阵时，所求的增益矩阵为：

$$K_{p\times n} = \rho_{p\times 1} \cdot k_{1\times n}$$

当A为非循环矩阵时，所求的增益矩阵为：

$$K_{p\times n} = \rho_{p\times 1} \cdot k_{1\times n} + K_1$$

2 李亚普诺夫方程法

给定完全能控的多输入线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

和一组任意的期望闭环特征值 $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*$，要求通过状态反馈 $u = v - Kx$，使闭环系统的特征值 $\lambda_i(A - BK) = \lambda_i^*, i = 1, 2, \cdots, n$。同时要求：

$$\lambda_i(A) \neq \lambda_i^*, i = 1, 2, \cdots, n$$

第1步：任选n×n矩阵F，要求F的特征值为期望的特征值。 $\lambda_i(F)=\lambda_i^*, i=1,2,\cdots,n$

第2步：选取一个p×n实常值矩阵 $\bar{K}$ ，使 $\{F,\bar{K}\}$ 为状态完全能观。

第3步：对给定矩阵A，B，F和 $\bar{K}$，解李亚普诺夫方程： $AT-TF=B\bar{K}$

确定出唯一n×n的解矩阵T。

第4步：若T为非奇异的，则所确定的状态反馈矩阵K为：$\mathrm{K}=\overline{\mathrm{K}}\mathrm{T}^{-1}$

若T为奇异矩阵，则返回步骤2重新选择$\overline{\mathrm{K}}$。

3 能控规范形法

给定完全能控的多输入线性定常系统

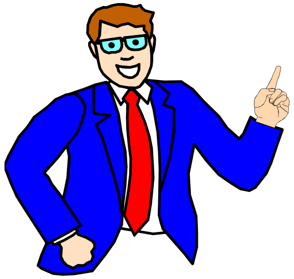
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

和一组任意的期望闭环特征值 $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*$ ，要求通过状态反馈 $u = v - Kx$ ，使闭环系统的特征值

$$\lambda_i(A - BK) = \lambda_i^*, i = 1,2,\cdots,n$$

。



以n=9，p=3为例。

第1步：将系统{A, B}化为龙伯格能控规范形。

$$\bar{A} = S^{-1}AS = \left[\begin{array}{ccc|cc|cccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\alpha_{10} & -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \beta_{14} & \beta_{15} & \beta_{16} & \beta_{17} & \beta_{18} & \beta_{19} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & -\alpha_{20} & -\alpha_{21} & \beta_{26} & \beta_{27} & \beta_{28} & \beta_{29} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & -\beta_{34} & -\beta_{35} & -\alpha_{30} & -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33}
\end{array}\right]$$

$$\overline{B}=S^{-1}B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&\gamma&0\\\hdashline 0&0&0\\0&1&0\\\hdashline 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

第2步：将期望的闭环特征值，按龙伯格能控规范形中 $\overline{A}$ 的对角块个数和维数，分组，并计算每组对应多项式。

第3步：对龙伯格能控规范形$\{\bar{A},\bar{B}\}$，按如下形式选取p×n状态反馈矩阵$\bar{K}$。

$$\bar{K}=\begin{bmatrix} \alpha_{10}^*-\alpha_{10} & \alpha_{11}^*-\alpha_{11} & \alpha_{12}^*-\alpha_{12} & \beta_{14}-\gamma(\alpha_{20}^*-\alpha_{20}) & \beta_{15}-\gamma(\alpha_{21}^*-\alpha_{21}) & \beta_{16}-\gamma\beta_{26} & \beta_{17}-\gamma\beta_{27} & \beta_{18}-\gamma\beta_{28} & \beta_{19}-\gamma\beta_{29} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{20}^*-\alpha_{20} & \alpha_{21}^*-\alpha_{21} & \beta_{26} & \beta_{27} & \beta_{28} & \beta_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{30}^*-\alpha_{30} & \alpha_{31}^*-\alpha_{31} & \alpha_{32}^*-\alpha_{32} & \alpha_{33}^*-\alpha_{33} \end{bmatrix}$$

第4步：计算所求状态反馈增益矩阵K。

$$K=\bar{K}S^{-1}$$

三 状态反馈对传递函数矩阵的影响

1 单输入单输出线性定常系统

<u>*结论*</u>：对状态完全能控的单输入单输出系统，引入状态反馈后，闭环系统传递函数的零点不发生改变，极点可能发生改变。

2 多输入多输出线性定常系统

G(s)的零点：对既能控又能观的系统，满足

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n+\min(p,q)$$

的所有s的值。

结论：对状态完全能控的多输入多输出线性定常系统，状态反馈在配置传递函数矩阵全部n个极点的同时，一般不影响G(s)的零点。

6.3 全维状态观测器

- 问题的提出
- 全维状态观测器
  - ✓观测器的结构形式
  - ✓ 观测器的存在条件
  - ✓ 观测器综合算法

一、问题的提出

n 维的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0$$

$$y = Cx$$

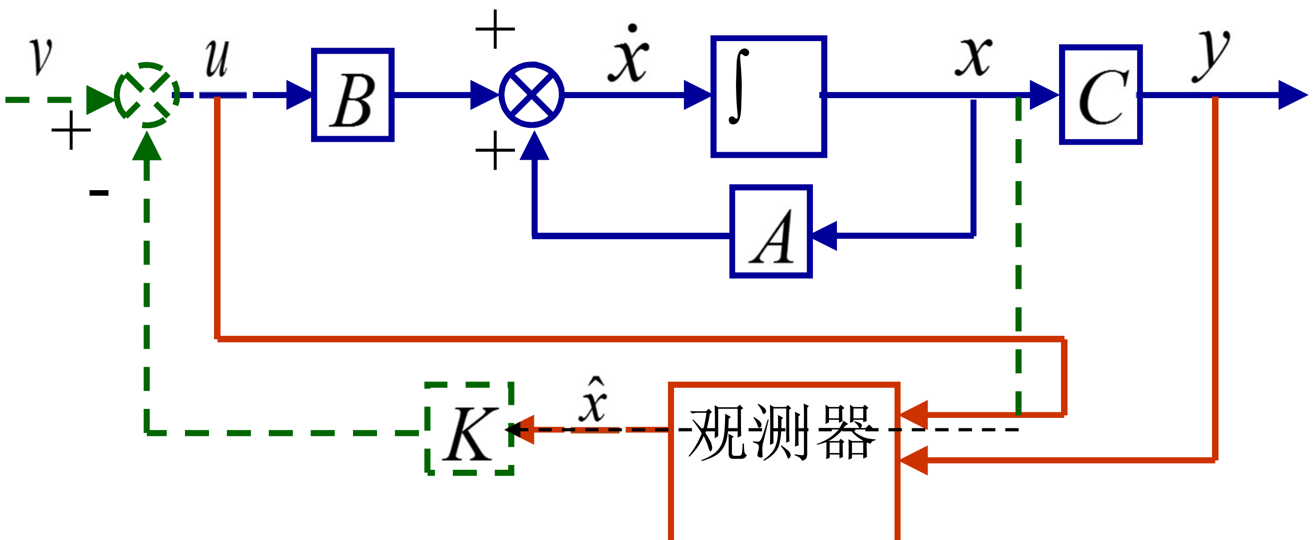


图1 状态重构问题的直观说明

图1 加入状态反馈后的系统结构图

状态观测器：输出$\hat{x}(t)$渐进等价于原系统状态$\boldsymbol{x(t)}$的观测器，即以

$$\lim_{t\to\infty}\hat{x}(t)=\lim_{t\to\infty}x(t)$$

为性能指标综合得到的观测器。

状态观测器
- 全维状态观测器：重构状态向量的维数等于被控对象状态向量的维数.
- 降维状态观测器：重构状态向量的维数小于被控对象状态向量的维数

二、全维状态观测器

1、观测器的结构形式

考虑n维线性时不变系统

$$\dot{\mathrm{x}} = A\mathrm{x} + B\mathrm{u} \qquad x(0) = x_0$$
$$\mathrm{y} = C\mathrm{x} \qquad t \geq 0$$

要求观测器系统的输出满足如下关系：

$$\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

1) 开环观测器

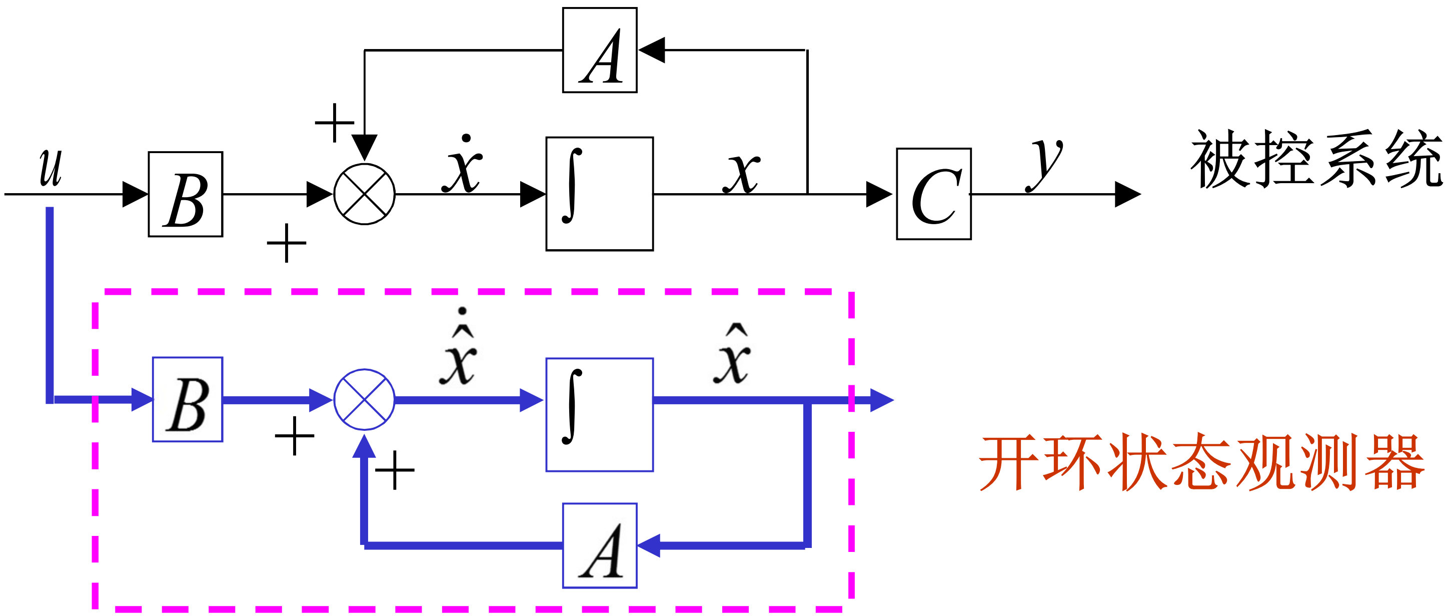


图2 开环状态观测器

开环观测器的状态方程为:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \qquad t \geq 0$$

式中： 是被控对象状态向量***x***的估计值.

2) 全维状态观测器

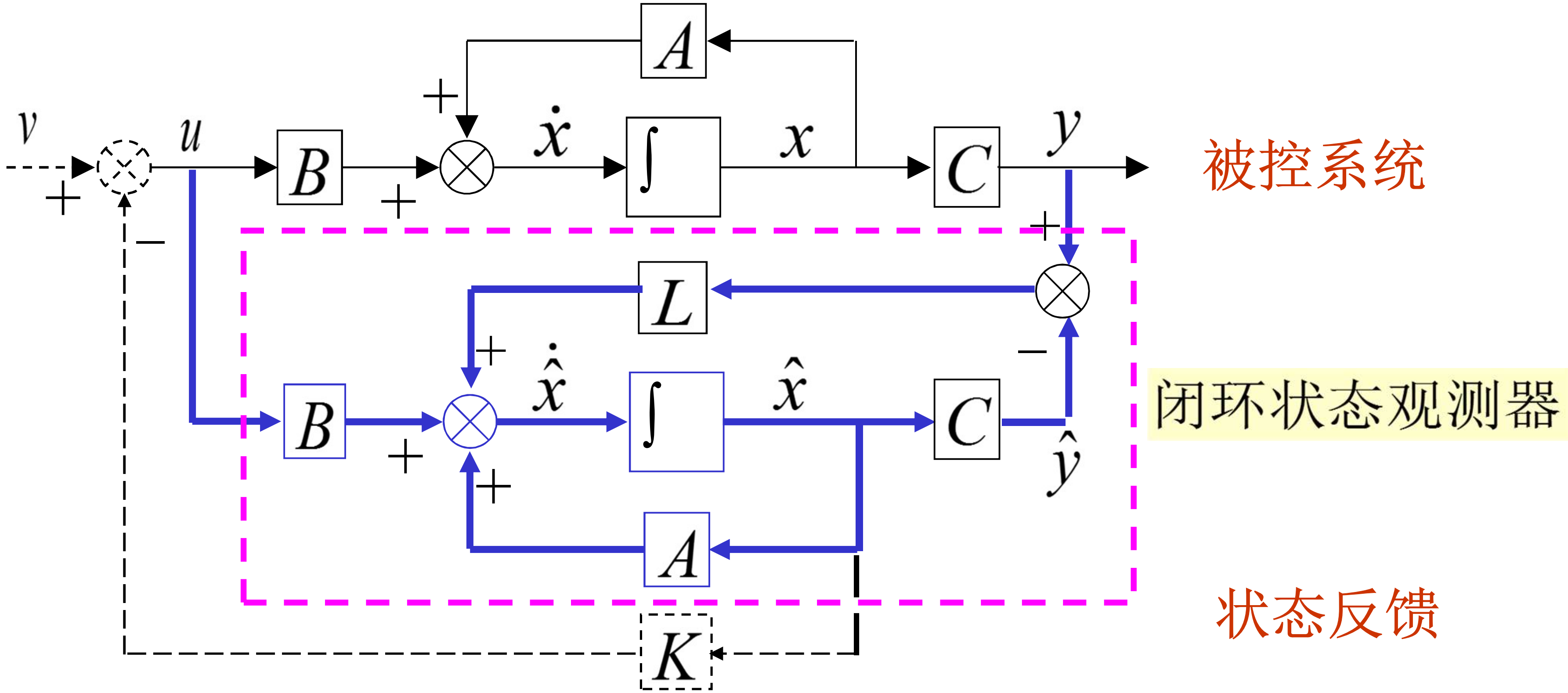


图3 全维状态观测器

全维状态观测器状态空间描述为:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \qquad (3)$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

观测器输出反馈阵

(3)式可改写为:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \qquad (4)$$

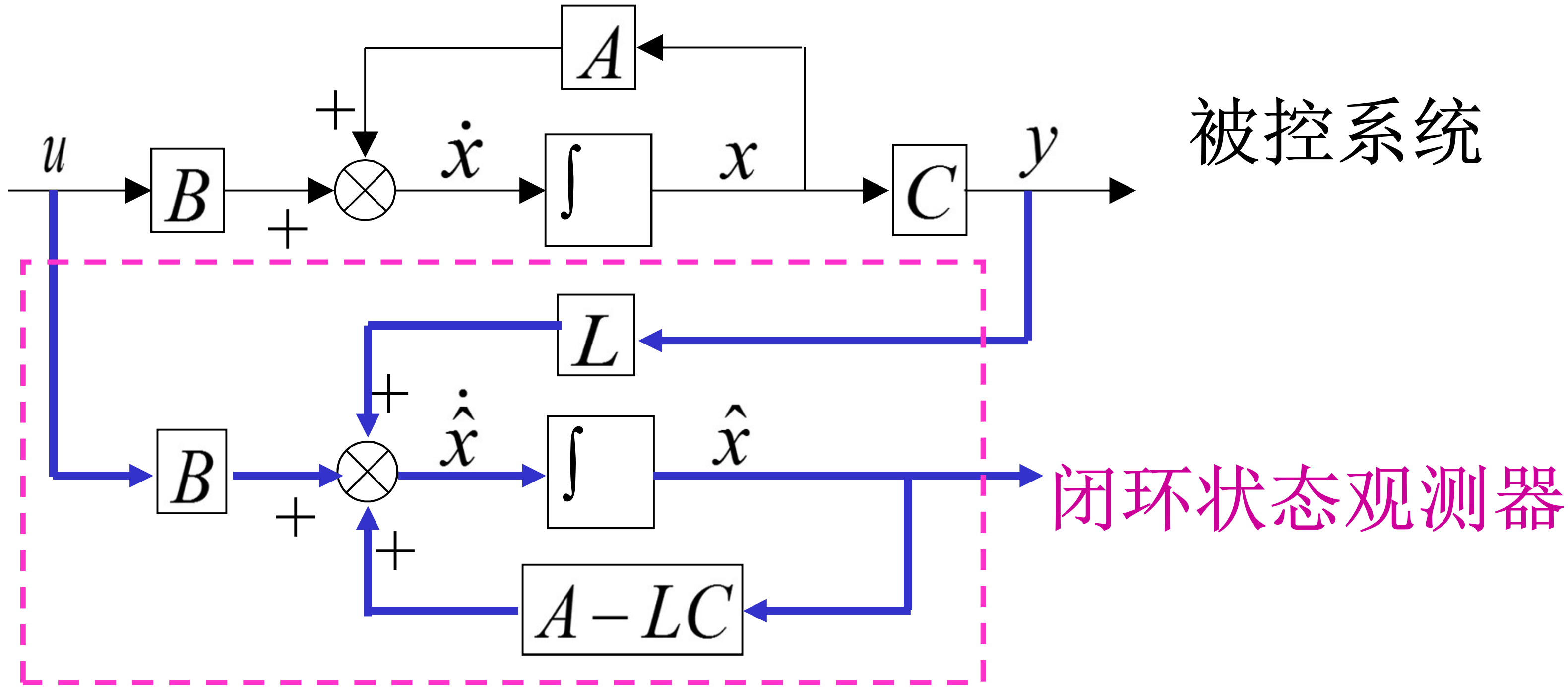


图4 全维状态观测器

2、观测器的存在条件

状态观测器分析设计的关键问题是能否在任何初始条件下，即尽管 $\hat{x}_0$ 与 x_0 不同，但总能保证

$$\lim_{t\to\infty}\hat{x}(t)=\lim_{t\to\infty}x(t) \qquad \textbf{(2)}$$

成立。只有满足上式，状态反馈系统才能正常工作，

$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+L(y-\hat{y}) \qquad \hat{x}(0)=\hat{x}_0 \qquad \textbf{(3)}$$

或

$$\dot{\hat{x}}=(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly \qquad \hat{x}(0)=\hat{x}_0 \qquad \textbf{(4)}$$

所示系统才能作为实际的状态观测器。

那么，如何通过选取***L***，使得由式**(3)**或**(4)**反映的观测器能满足式**(2)**呢？

观测器的存在条件（即观测器任意极点配置的条件）

定理：若被控系统(A,C)可观测，则必可采用

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

所示的全维状态观测器来重构其状态，并且必可通过选择增益阵L而任意配置$(A-LC)$的全部特征值。

证：利用对偶原理，系统(A,B,C)可观测意味着其对偶系统(A^T,C^T,B^T)可控。由极点配置的结论：利用状态反馈任意配置闭环极点的充要条件是被控系统可控。所以对于可控系统(A^T,C^T,B^T)来说，对于任意给定的n个特征值，必可以找到一个状态反馈增益阵L^T，使反馈后的系统特征值等于指定的特征值$\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_n^*$，即使下式成立：

$$\det\left(sI-A^T+C^TL^T\right)=\alpha^*(s) \qquad \textbf{(5)}$$

其中：$$\begin{aligned}\alpha^*(s)&=(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2^*)\cdots(s-\lambda_n^*)\\&=s^n+a_{n-1}^*s^{n-1}+\cdots+a_1^*s+a_0^*\end{aligned}$$

$$\alpha^*(s)=(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2^*)\cdots(s-\lambda_n^*)=s^n+a_{n-1}^*s^{n-1}+\cdots+a_1^*s+a_0^*$$

是由期望特征值所确定的闭环系统特征多项式。

由于矩阵的转置不改变矩阵的特征值，故

$$\det\left(sI-A+LC\right)=\alpha^*(s) \qquad \textbf{(6)}$$

这就意味着($A-LC$)的特征值可由L任意配置。因此，只要给定的系统（**A, B, C**）可观测，必然可以通过选择增益阵L将(A-LC)配置到特定的特征值上，从而使设计的全维状态观测器满足观测器存在条件，可以实际运用。

3、观测器综合算法

对于给定的n维被控系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0 \qquad t \geq 0$$
$$y = Cx$$

设系统(A,B,C)可观测，再对要设计的全维状态观测器给定一组期望的特征值：$\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*$，设计全维状态观测器。

方法一：原理性算法

方法二：规范算法

方法一：原理性算法（※）

1) 计算期望的特征多项式

$$\alpha^*(s)=(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2^*)\cdots(s-\lambda_n^*)$$
$$=s^n+a_{n-1}^*s^{n-1}+\cdots+a_1^*s+a_0^*$$

2）设反馈增益阵 $l=\begin{bmatrix}l_1 & l_2 & \cdots & l_n\end{bmatrix}^T$，用待定系数计算闭环观测系统特征多项式

$$\alpha(s)=\det(sI-A+LC)$$
$$=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

其中：系数$\{a_i\}$中包含未知元素$\{l_i\}$。

3）求解下列***n***个方程，计算出反馈矩阵***L***的元素

$$a_{n-1}=a_{n-1}^{*},\quad \cdots,\quad a_1=a_1^{*},\quad a_0=a_0^{*}$$

4）计算**(*A-LC*)**，则所要设计的全维状态观测器就为

$$\dot{\hat{x}}=(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly$$

而 $\hat{x}$ 即为***x***的估计状态。

方法二：规范算法（※）

1）导出被控系统(A,B,C)的对偶系统(A^T,C^T, B^T)；

2）利用完全可控系统极点配置的规范算法，计算系统(A^T,C^T, B^T)的反馈增益阵L^T;

3）计算$(A-LC)$，则所要设计的全维状态观测器就为

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

而 $\hat{x}$ 即为x的估计状态。

例：给定系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 9 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

观测器系统的特征值为：$\lambda_{1,2}^{*}=-10\pm 10j$ ，

试构造全维状态观测器.

解：方法一

$$rank\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$$

该系统可观测，可任意配置全维状态观测器的极点。

1) 期望特征多项式：

$$\alpha^{*}(s)=(s+10+10j)(s+10-10j)=s^{2}+20s+200$$

2）设增益阵 $L=\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^T$，闭环观测系统特征多项式为

$$\alpha(s)=\det(sI-A+LC)=\begin{vmatrix} s+l_1 & -1 \\ l_2-9 & s \end{vmatrix}=s^2+l_1 s+(l_2-9)$$

3）得到方程组：

$$\begin{cases} l_1=20 \\ l_2-9=200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1=20 \\ l_2=209 \end{cases} \qquad \therefore \quad L=\begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix}$$

4）设计的全维状态观测器为：

$$\dot{\hat{x}}=(A-Lc)\hat{x}+bu+Ly$$

$$=\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\hat{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix}y$$

$$=\begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -200 & 0 \end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 20 \\ 209 \end{bmatrix}y$$

方法二：

1) $\because rank\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$，该系统可观测，

$\therefore$其对偶系统(A^T, c^T, b^T)完全可控，故可以任意配置极点

2）用系统极点配置的规范算法，计算反馈增益阵L^T

① 观测器期望特征多项式：

$$\alpha^*(s) = (s+10+10j)(s+10-10j) = s^2 + 20s + 200$$

② 可控系统(A^T, c^T, b^T)的特征多项式：

$$\alpha(s) = \det(sI - A^T) = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -9 & s \end{vmatrix} = s^2 - 9$$

③ 计算$\bar{k}$： $\bar{k} = \begin{bmatrix} a_0^* - a_0 & a_1^* - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209 & 20 \end{bmatrix}$

④ 变换矩阵P^{-1}：

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}c^T & A^Tc^T\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

⑤ 系统(A^T,c^T,b^T)的反馈增益矩阵L^T：

$$L^T=\bar{K}P=\begin{bmatrix}209 & 20\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 209\end{bmatrix}$$

3）$\mathrm{L}=\begin{bmatrix}20\\ 209\end{bmatrix}$设计的全维状态观测器为

$$\dot{\hat{x}}=(A-Lc)\hat{x}+bu+Ly$$

$$=\begin{bmatrix}-20 & 1\\ -200 & 0\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}20\\ 209\end{bmatrix}y$$

三　分离特性

现在要讨论的是用全维状态观测器提供的估计状态 $\hat{x}$ 代替真实状态$\boldsymbol{x}$来实现状态反馈，其闭环特性与利用真实状态进行反馈的情况会有什么区别?

当观测器被引入系统以后，状态反馈系统部分是否会改变已经设计好的观测器的闭环极点配置，观测器输出反馈阵$\boldsymbol{L}$是否需要重新设计?

考虑n维的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx$$

假设系统是可观测的，则可设计全维状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

得到真实状态 x 的估计值 $\hat{x}$ ，引入状态反馈

$$u = v - K\hat{x}$$

此时状态反馈子系统的状态空间描述为：

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(v - K\hat{x}) = Ax - BK\hat{x} + Bv \\
&y = Cx
\end{aligned}$$

全维状态观测器的状态空间描述为：

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly = (A - LC)\hat{x} + B(v - K\hat{x}) + LCx \\
&= (A - BK - LC)\hat{x} + LCx + Bv
\end{aligned}$$

故组合系统的状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

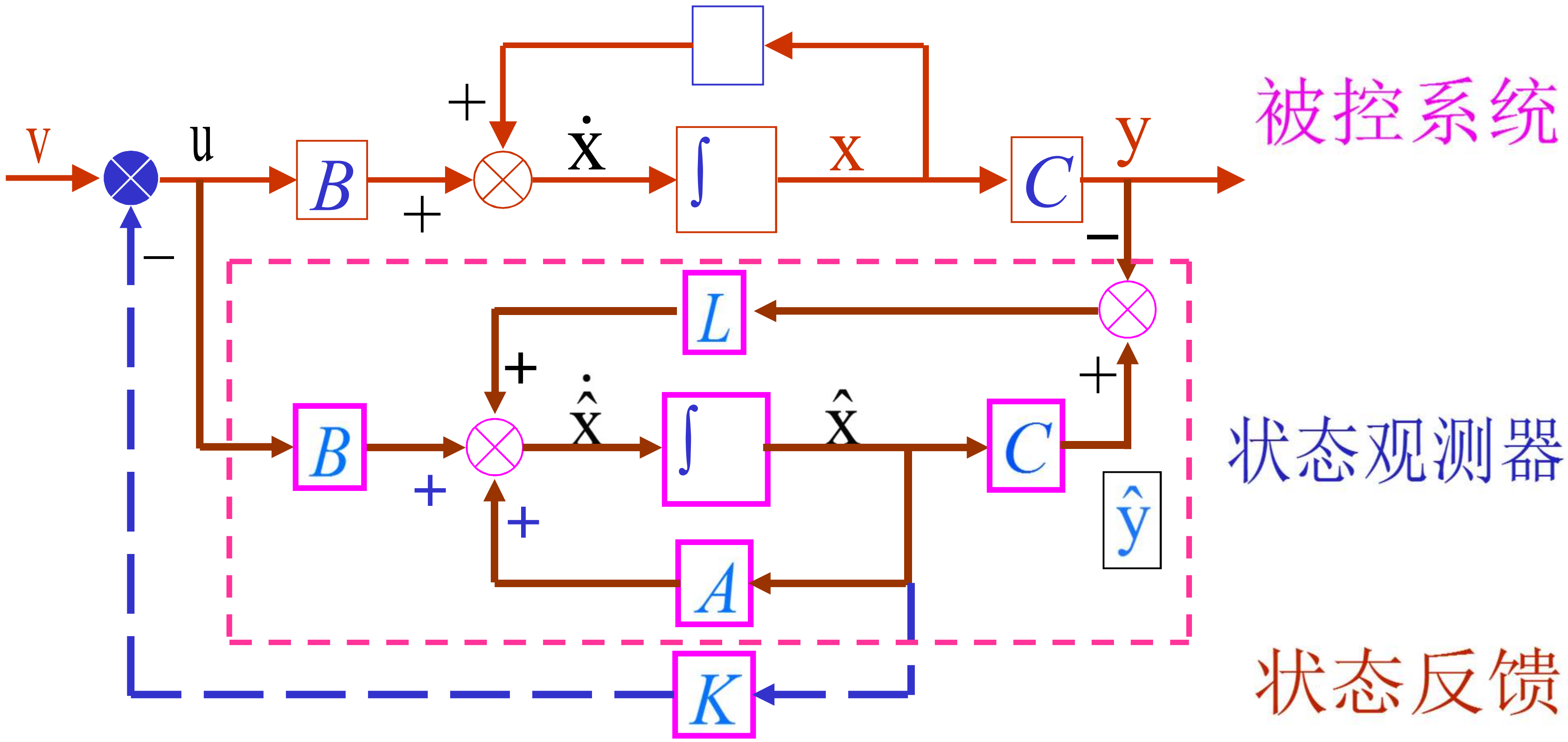
由此可见，引入全维状态观测器的状态反馈系统，其维数为被控系统和观测器系统的维数之和（**2*n***维）。

还可证明组合系统特征多项式为：

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \det \begin{pmatrix} sI-(A-BK) & BK \\ 0 & sI-(A-LC) \end{pmatrix} \\ &= \det(sI-A+BK) \cdot \det(sI-A+LC) \end{aligned}$$

组合系统的特征多项式为：

$$\alpha_k(s) = \det(sI - A + BK) \bullet \det(sI - A + LC)$$



含有全维状态观测器的状态反馈系统

分离定理：若被控系统$\{A, B, C\}$完全可控且完全可观，利用状态观测器的状态估计值实现状态反馈控制系统时，状态反馈矩阵 K 的设计和观测器中输出反馈矩阵 L 的设计可以独立进行。

四. 降维状态观测器

考虑n维线性时不变系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \qquad x(0) = x_0 \\
y &= Cx \qquad t \geq 0
\end{aligned}
$$

假定系统完全能观，且C满秩，即rankC=q

则该系统的降维状态观测器的最小维数为n-q.

降维状态观测器综合算法

1） 构造降维状态观测器的变换矩阵

$$P_{n\times n}=\begin{bmatrix}C\\R\end{bmatrix}\qquad Q=P^{-1}=\begin{bmatrix}Q_1 & Q_2\end{bmatrix}$$

其中，R为任选的使P为非奇异的(n-q)×n维常值矩阵

2）对被观测系统引入线性非奇异变换 $\bar{x}=Px$

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}u$$

$$y=\bar{x}_1$$

3） 状态向量$\overline{x}_2$对应子系统的状态空间描述

$$\dot{\overline{x}}_2 = \overline{A}_{22}\overline{x}_2 + \overline{u}$$
$$\omega = \overline{A}_{12}\overline{x}_2$$

该子系统能观测的充要条件是{A, C}能观测。

4） 构造 $\overline{x}_2$ 的全维(n-q)状态观测器

$$\dot{z} = (\overline{A}_{22} - \overline{L}\overline{A}_{12})z + [(\overline{A}_{22} - \overline{L}\overline{A}_{12})\overline{L} + (\overline{A}_{21} - \overline{L}\overline{A}_{11})]y + (\overline{B}_2 - \overline{L}\overline{B}_1)u$$

其中L为反馈增益矩阵。

5） 被观测系统的重构状态为 $\hat{x} = Q_1 y + Q_2(z + \overline{L}y)$