2017 离散

一、 填空题(每小题3分，共30分)

1. 令p表示原子命题："天下雨"，q表示原子命题："我将去新华书店"，r表示原子命题："我有时间"。复合命题"如果天不下雨并且我有时间，那么我将去新华书店"的符号化形式为________________________________。

2. 令s(x)：x是大学生，R(x)：x是科学家，则命题"并非所有大学生都能够成为科学家"可符号化为________________________。

3. 公式$((p\vee g)\rightarrow r)\rightarrow p$的主析取范式是$m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$，则它的主合取范式是________。

4. 公式$\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$的前束范式为________________________。

5. 令集合$A=\{\{\{1,2\},\{1,1\}\},\{\{1,0\}\}\}$，则$\cup\cup A=$____________________。

6. 设$f=(\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle)$，$g=(\langle 2,3\rangle\langle 3,2\rangle)$，则$f\circ g=$_______________。

7. 函效f存在反函数的条件是__________________。

8. 无向图G有生成树当且仅当G是_______________________________________。

9. 无向图$G=\langle V,E\rangle$是半欧拉图当且仅当G是连通的且恰有______________奇度顶点。

10. 设二部图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，$|V_1|<=|V_2|$，且$|V_1|>=2$，$|V_2|>=2$。若G是哈密顿图，则$|V_1|$和$|V_2|$的关系是_____________________________。

二、判断题(每小题2分，共20分，正确的划√，错误的划x。

1. 设p，q均为命题，在p与q不能同时为真的条件下，p与q的排斥或也可以写成p与q的相容或。(　)

2. 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。(　)

3. 一阶逻辑中的任何公式都唯一存在与之等值的前束范式。(　)

4. 任意集合与其真子集具有不同的基数。(　)

5. 集合的对称差运算满足交换律和结合律。(　)

6. 设F，G，H是任意的二元关系，则$(F\circ G)^{-1}=F^{-1}\circ G^{-1}$。(　)

7. 非负整数度数(5,5,4,4,2)是可图化的。(　)

8. 如果图G是树，则G是连通的且任何边均为桥。(　)

9. 哈密顿图一定是欧拉图，反之不真。(　)

10. 平面图的母图也是平面图。(　)

三、计算题(共18分)

1.用等值演算法求命题公式$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$的主合取范式和主析取范式。

2. 给定A={1,2,3,4}，A上的关系R={<1,3>,<1,4>,<2,3>,<2,4>,<3.4>}，试：(1)画出R的关系图；(2)说明R的性质。

3.设无向树T中，有2个2度顶点，1个3度顶点，3个4度顶点，求：(1) T的树叶数t；(2) T的边数m。

四、证明题(共32分)

1.(8分)在自然推理系统中构造推理的证明：

前提： $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$\forall xF(x)$

结论： $\forall xG(x)$

2.(8分)设R为NxN上的二元关系，$\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in N\times N$，有$\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\in R\Leftrightarrow b=d$

证明：R为等价关系。

3. (8分)设f，$R\times R\rightarrow R\times R$，$f(\langle x,y\rangle)=\langle x+y, x-y\rangle$，证明f是双射的。

4. (8分)我们已经知道任何n阶连通或不连通的无向简单图的边数m都有$m\le n*(n-1)*1/2$。现在假设有一个n阶无向简单图G，它的边数$m\ge(n-1)*(n-2)*1/2$。证明：G一定是连通的。(提示：反证法)

2016

一、填空题（每小题2分， 共20分）

1.令p:我有时间。q:我考试复习完毕。r:我将去看电影。命题“仅当我有时间且考试复习完毕，我将去看电影。”的符号化形式为____________________________。

2.令F(x)：x是人，G(x)：x喜欢看电视剧，H(x)：x喜欢看电影。命题“虽然有人不喜欢看电
视剧，但也不是所有的人都喜欢看电影。”的符号化形式为___________________________________。3.设个体域D={1. 2, 3}，消去公式中∃x∀y(F(x)→G(y))的量词后为___________________________________。

4. （∀xF(x) →∃yG(x)） →∀zH(z) 的前束范式为____________________________________。

5.集合A={1，2，3}上的自反关系有__________个。

8.n阶k-正则图G的边数 m=______________。

9.完全二部图$K_{r,s}$（r,s均>=2,且为偶数)中的欧拉回路共有____________边。

10.对于具有k（k>=2）个连同分支的平面图G，G的顶点数n，边数m和函数r之间的关系为_______________________________________。

二、判断题(每小题2分，共20分，正确的划√，错误的划x。

1.陈述句“存在高效的算法可以判断两个图是否同构”是命题。（ ）

2.一阶公式∀x(F(x) →(F(x) ∨G(x)))是非永真式的可满足式。（ ）

3.若A和B是任意两个集合，则(A- B) ∩(B-A)= ∅ 。（ ）

4.一个关系R，如果不是对称的，则一定是反对称的。（ ）

5.有穷偏序集中一定存在极大元和极小元，但不一定存在最大元和最小元。（ ）

8.整数序列(1，2，3，4，5，6)可以简单图化。（ ）

9.无向图G中只有两个奇度顶点u与v，则u与v必连通。（ ）

10.无向图中的最长路径是唯一的。（ ）

三、计算题(共15分,每小题5分)

1. 求命题公式（ p→q) ∨ (q→r)的主合取范式和主析取范式。

2.

3. 已知无向树T有8片树叶，2个3度顶点，其余顶点都是4度顶点，求T 的阶数。

四、证明题(共45 分)

1. (8分)

2. (8分)在自然推理系统中构造推理的证明：

前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow\neg H(x))$，$\forall x(H(x))$

结论：$\forall xF(x)$

3. (8分)设集合 $A=Z_n$，在 $A*A$ 上定义二元关系 R：$\forall\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in A\times A$，$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle$，当且仅当 $x-u=y-v$。证明 R 是等价关系。

4. (8分)若 $f: A\rightarrow B$ 是双射，则 $f^{-1}: B\rightarrow A$ 是双射。

5. (8分)

6. (5分)今有 6 名学生要去完成 3 个实验，已知他们中的任何人至少与其余 5 个人中的 3 个

人能相互合作。用图论的方法证明:能够将他们分成 3 个小组，每组 2 个人能相互合作，分别完成 3 个实验。

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2015 年 第 ___ 学期）

课程编号：__________ 课程名称：离散数学（期中卷）

成绩：77

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 令 p：小明拿一个苹果，q：小明拿一个梨。命题“小明只能从筐里拿一个苹果或一个梨。”的符号化形式为 $(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$

2. 设个体域为人类集合，$P(x)$：x 是总经理，$Q(x)$：x 有秘书，则命题“只有总经理才有秘书。”可符号化为 $\forall x(Q(x)\to P(x))$

3. 设个体域 $D=\{1, 2, 3\}$，消去公式 $\forall x\forall y\,(F(x)\to G(y))$ 中的量词后为 $(F(1)\to G(1))\vee(F(1)\to G(2))\vee(F(1)\to G(3))\vee(F(2)\to G(1))\vee(F(2)\to G(2))\vee(F(2)\to G(3))\vee(F(3)\to G(1))\vee(F(3)\to G(2))\vee(F(3)\to G(3))$

4. 设 $A=\{1, 2, 3\}$ 和 $B=\{4, 5, 6, 8\}$，R 与 S 是从 A 到 B 的关系，且 xRy 当且仅当 $\gcd(x, y)=1$，即 x 与 y 的最大公约数等于 1，xSy 当且仅当 $x+y<8$，则 $R\cap S$ $=\{\langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,4\rangle\}$。

5. 设 R 是实数集合，f：R→R，$f(x)=x^2-x+2$，g：R→R，$g(x)=x-3$，则 $f\circ g$ = ______

二、判断题（每小题 2 分，共 10 分，正确的划√，错误的划×）

1. 陈述句“火星上有生命”不是命题。（×）
2. 公式 $\exists x(F(x)\wedge G(x))\to\forall yG(y)$ 是非永真式的可满足式。（√）
3. 集合的对称差运算满足结合律。（√）
4. 若 R 是集合 A 上的传递关系，则 R^2 也是集合 A 上的传递关系。（√）
5. 集合的等势具有自反性、对称性和传递性。（√）

三、计算题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 求命题公式 $\neg((p\to q)\wedge(r\to p))\vee\neg((r\to\neg q)\to\neg p)$ 的主合取范式。

2. 设 A={1,2}，则

(1) A⊕A= $\varnothing$，card A = 2。

(2) A 上有 16 个二元关系。其中 4 个自反关系，4 个反自反关系，8 个对称关系，12 个反对称关系，2 个等价关系，3 个偏序关系。

(3) A^A 中有 4 个函数，其中有 2 个是满射。

四、证明题（每小题 15 分，共 60 分）

1. 在自然推理系统中构造下面推理的证明：

如果存在偶数，则所有有理数都可以表示成分数。如果存在素数，则存在有理数，因此，如果存在偶素数，则存在分数。

证明：设简单命题

~~P: 存在偶数~~ ~~P(x): x是偶数~~

$P(x)$：x是偶数　$Q(x)$：x是有理数；$R(x)$：x是素数．

$S(x)$：x是合数．

前提：$\exists x P(x) \rightarrow \forall x (Q(x) \rightarrow S(x))$

$\exists x (R(x) \rightarrow Q(x))$

结论：$\exists x ((R(x) \wedge P(x)) \rightarrow S(x))$

① $\exists x P(x) \rightarrow \forall x (Q(x) \rightarrow S(x))$　前提引入

② $\exists x P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow S(x))$　①∀－

③ $P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow S(x))$　②∃－

~~④ $P(x) \rightarrow S(x)$~~ ~~假言推理~~

④ $\exists x (R(x) \rightarrow Q(x))$　前提引入

⑤ $R(x) \rightarrow Q(x)$　④∃－

⑥ $\neg P(x) \vee (\neg Q(x) \vee S(x))$　③置换

⑦ $\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee S(x)$　⑥假言推理

⑧ $\neg (P(x) \wedge Q(x)) \vee S(x)$　⑦假言推理

⑧ $(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow S(x)$　置换

⑨ $(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow (P(x) \wedge Q(x))$

⑤⑧ 假言推理

⑩ $P(x) \wedge R(x) \rightarrow S(x)$

⑧⑨ 假言三段论

⑪ $\exists x (P(x) \wedge R(x) \rightarrow S(x))$

⑩∃＋

得证．

2．证明 $A \cup B = E \Leftrightarrow \sim A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq A$。

证明：① ⇒ ②．

$\sim A$

$= \sim A \cap E$

$= \sim A \cap (A \cup B)$

$= (\sim A \cap A) \vee (\sim A \cap B)$

$= \sim A \cap B$

$\therefore \sim A \subseteq B$．

② ⇒ ③．

$\because \sim A \subseteq B$

$\therefore \sim A \cap B = \sim A$

$\sim (\sim A \cap B) = \sim (\sim A)$

③ ⇒ ①

$\because \sim B \subseteq A$

$\therefore \sim B \cup A = A$

$E = A \cup \sim A$

$= A \cup (\sim B \cup A)$

$= A \cup (B \cap \sim A)$

$= (A \cup B) \cap (A \cup \sim A)$

$= A \cup B$．

3．设 R 是一个二元关系，设 $S = \{ <a, b> \mid$ 对于某一 c，有 $<a, c> \in R$ 且 $<c, b> \in R \}$，证明：若 R 是一个等价关系，则 S 也是一个等价关系。

15

自反性．$\forall <x, x> \in R$．

~~对于~~ 对于任意 c．$<x, c> \in R$　$<c, x> \in R$．

$<x, c> \in R$．

$\therefore <x, x> \in S$．S有自反性．

对称性．$\forall <x, y>, <y, x> \in R$．

对于 $<x, y>$ 有存在某一 c．$<x, c> \in R$　$<c, y> \in R$．

则 $<c, x> \in R$，$<c, y> \in R$．

$\therefore <x, y> \in R$．同理 $<y, x> \in R$．

则 S 有对称性

传递性

$\forall <a, b>$ $<b, c>$ $<a, c>$

对于 $<a, b>$ 由前取 b．

$<a, b>$，$<b, b> \in R$．

$<b, a>$，$<a, b> \in R$．

且 $<a, b> \in R$．

则 $<a, b> \in S$．

且 $<b, c> \in$，$<a, c> \in S$．

$\therefore$ S是传递的

综上S是等价的

4．设满射函数 $f: A \rightarrow A$，且 $f \circ f = f$。证明 $f = I_A$。

15

对任意 $x \in A$　由 f 是满射

$\exists$ $y \in A$ 使得 $<y, x> \in f$．

对 $f \circ f = f$，则 $<y, x> \in f \circ f$

存在 $z \in A$　使得．

$<y, z> \in f$

$<z, x> \in f$

由 $<y, x> \in f$　$<y, z> \in f$．

是函数．

得 $x = z$　又 $<z, x> \in f$　$\therefore <x, x> \in f$．

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 令 p：我有时间。q：我考试复习完毕。r：我将去看电影。命题“仅当我有时间且考试复习完毕，我将去看电影。”的符号化形式为________。

2. 令 $F(x)$：x 是人，$G(x)$：x 喜欢看电视剧，$H(x)$：x 喜欢看电影。命题“虽然有人不喜欢看电视剧，但也不是所有的人都喜欢看电影。”的符号化形式为________。

3. 设个体域 $D=\{1, 2, 3\}$，消去公式 $\exists x\forall y\,(F(x)\rightarrow G(y))$中的量词后为________。

4. $(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\rightarrow\forall zH(z)$ 的前束范式为________。

5. 集合 $A=\{1, 2, 3\}$上的自反关系有________个。

6. 在 $<Z, +>$ 中 3^{-5}=________。

7. 设 L 是格，$\forall a, b, c, d\in L$，$(a\vee b)\wedge(c\vee d)\geq(a\wedge c)\vee(b\wedge d)$的对偶式是________。

8. n 阶 k-正则图 G 的边数 m=________。

9. 完全二部图 $K_{r,s}$（$r, s\geq 2$ 且为偶数）中的欧拉回路共有________边。

10. 对于具有 $k(k\geq 2)$ 个连通分支的平面图 G，G 的顶点数 n，边数 m 和面数 r 之间的关系为________。

二、判断题

1. 陈述句“火星上有生命”不是命题。（　　）

2. 公式$\exists x(F(x)\wedge G(x))\rightarrow\forall yG(y)$是非永真式的可满足式。（　　）

3. 集合的对称差运算满足结合律。（　　）

4. 若 R 是集合 A 上的传递关系，则 R^2 也是集合 A 上的传递关系。（　　）

5. 集合的等势具有自反性、对称性和传递性。（　　）

三、计算题（每小题 10 分，共 20 分）。

1．求命题公式 $\neg((p \to q) \wedge (r \to p)) \vee \neg((r \to \neg q) \to \neg p)$ 的主合取范式。

2．设 A={1,2}，则

(1) $A \oplus A =$__________，card A = __________。

(2) A 上有__________个二元关系。其中__________个自反关系，__________个反自反关系，__________个对称关系，__________个反对称关系，__________个等价关系，__________个偏序关系。

(3) A^A 中有__________个函数，其中有__________个是满射。

四、证明题（每小题 15 分，共 60 分）。

1．在自然推理系统中构造下面推理的证明：

如果存在偶数，则所有有理数都可以表示成分数。如果存在素数，则存在有理数，因此，如果存在偶素数，则存在分数。

2．证明 $A \cup B = E \Leftrightarrow \sim A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq A$。

3．设 R 是一个二元关系，设 $S = \{\langle a, b\rangle \mid$ 对于某一 c，有 $\langle a, c\rangle \in R$ 且 $\langle c, b\rangle \in R\}$，证明：若 R 是一个等价关系，则 S 也是一个等价关系。

4．设满射函数 $f: A \to A$，且 $f \circ f = f$。证明 $f = I_A$。

3．已知无向树 T 有 8 片树叶，2 个 3 度顶点，其余顶点都是 4 顶点，求 T 的阶数。

四、证明题（共 45 分）

1．（8 分）设 F 是一个有限域，F 的特征是 p，a 是域 F 中非零元素，则 0，a，$2a$，$3a$，…，$(p-1)a$ 是域 F 中 p 个互不相同的元素，且 a 的任意整数倍（正、负、0）皆在其中。

2．（8 分）在自然推理系统中构造推理的证明：
前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\forall x(G(x)\to\neg H(x))$，$\forall xH(x)$
结论：$\forall xF(x)$

3．（8 分）设集合 $A=Z_n$，在 $A\times A$ 上定义二元关系 R：$\forall\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in A\times A$，$\langle x,y\rangle$ R $\langle u,v\rangle$ 当且仅当 $x-u=y-v$。证明 R 是等价关系。

4．（8 分）若 $f:A\to B$ 是双射，则 $f^{-1}:B\to A$ 是双射。

5．（8 分）某二进制码的码字 $x=x_1x_2\ldots x_7$ 由 7 位构成，其中 x_1,x_2,x_3 和 x_4 为数据位，x_5,x_6 和 x_7 为校验位，并且满足 $x_5=x_1\oplus x_2\oplus x_3$，$x_6=x_1\oplus x_2\oplus x_4$，$x_7=x_2\oplus x_3\oplus x_4$，这里的 $\oplus$ 是模 2 加法。设 G 为所有码字构成的集合，在 G 上定义二元运算如下：

$$\forall x,y\in G,\quad x\circ y=z_1z_2z_3z_4z_5z_6z_7,\quad z_i=x_i\oplus y_i,\quad i=1,2,\ldots,7.$$

证明 $\langle G,\circ\rangle$ 构成群。

6．（5 分）今有 6 名学生要去完成 3 个实验，已知他们中的任何人至少与其余 5 个人中的 3 个人能相互合作。用图论的方法证明：能够将他们分成 3 个小组，每组 2 个人能相互合作，分别完成 3 个实验。

2015年参考答案

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1．$r\to(p\wedge q)$

2．$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))\wedge\neg\forall x(F(x)\to H(x))$

3．$(F(1)\wedge F(2)\wedge F(3))\to(G(1)\wedge G(2)\wedge G(3))$

4．$\forall x\forall y\forall z(F(x)\to G(y))\to H(z)$

5．64

6．-15

7．$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leq(a\vee c)\wedge(b\vee d)$

8．$kn/2$

9．rs

10．$n-m+r=k+1$

二、判断题（每小题 2 分，共 20 分，正确的划√，错误的划×）

1．√　2．×　3．√　4．×　5．√

6．×　7．√　8．×　9．√　10．×

三、计算题（每小题 5 分，共 15 分）

1．主合取范式为：$M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$（3 分）

主析取范式为：$m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_7$（2 分）

2. 1阶子群：$<e>$

2阶子群：$<a^{15}>=\{e, a^{15}\}$

3阶子群：$<a^{10}>=\{e, a^{10}, a^{20}\}$

5阶子群：$<a^{6}>=\{e, a^{6}, a^{12}, a^{18}, a^{24}\}$

6阶子群：$<a^{5}>=\{e, a^{5}, a^{10}, a^{15}, a^{20}, a^{25}\}$

10阶子群：$<a^{3}>=\{e, a^{3}, a^{6}, a^{9}, a^{12}, a^{15}, a^{18}, a^{21}, a^{24}, a^{27}\}$

15阶子群：$<a^{2}>=\{e, a^{2}, a^{4}, a^{6}, a^{8}, a^{10}, a^{12}, a^{14}, a^{16}, a^{18}, a^{20}, a^{22} a^{24}, a^{26}, a^{28}\}$

30阶子群：$<a>=G$ （3分，部分对，至少扣1分）

生成元是：$a, a^{7}, a^{11}, a^{13}, a^{17}, a^{19}, a^{23}, a^{29}$ （2分，部分对，至少扣1分）

3. 12

说明：只是计算结果错误，3分。

四、证明题（共45分）

1. (8分)

首先，因为a是域的元素，所以$0=0a$，a，$2a$，$3a$，…，$(p-1)a$都是域中的元素。假设序列在0，a，$2a$，$3a$，…，$(p-1)a$中有相同者，不妨设$ia=ja, 0\le i<j\le(p-1)$。于是有$ja-ia=(j-i)a=0$，令$q=(j-i)$，而$0<q<p=(j-i)$。这与特征p的最小性矛盾。所以，0，a，$2a$，$3a$，…，$(p-1)a$互不相同。 (4分)

再设m为任意整数，则根据带余除法m可表示成$m=qp+r$，其中q为用p除m的商，r为余数，$0\le r<p$。于是$ma=(qp+r)a=qpa+ra=ra$，所以ma在序列在0，a，$2a$，$3a$，…，$(p-1)a$中。

证毕。

(4分)

2. (8分)

(1) $\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
(2) $F(y)\vee G(y)$	(1) UI规则 (1分)
(3) $\forall x(G(x)\to\neg H(x))$	前提引入
(4) $G(y)\to\neg H(y))$	(3) UI规则 (1分)

(5) $\forall x H(x)$　　前提引入

(6) $H(y)$　　(5) UI 规则（1 分）

(7) $\neg G(y)$　　(4)(6)拒取式规则（2 分）

(8) $F(y)$　　(2)(7) 析取三段论（2 分）

(9) $\forall x F(x)$　　(8) UG 规则　（1 分）

3．(8 分)

根据题意：$<x, y>$ R $<u, v>$ 当且仅当 $x-u = y-v$ 当且仅当 $x - y = u - v$

(1) $\forall <x, y> \in A\times A$，因为 $x-y = x-y$，所以 $<x, y>$ R $<x, y>$，即 R 是自反的。(2 分)

(2) $\forall <x, y>, <u, v> \in A\times A$，$<x, y>$ R $<u, v> \Rightarrow x-y = u-v \Rightarrow u-v = x-y \Rightarrow <u, v>$ R $<x, y>$，
所以 R 是对称的。(3 分)

(3) $\forall <x, y>, <u, v>, <s, t> \in A\times A$，
$<x, y>$R$<u, v> \wedge <u, v>$R$<s, t> \Rightarrow x-y = u-v \wedge u-v = s-t \Rightarrow x-y = s-t \Rightarrow <x, y>R<s, t>$
所以 R 是传递的。(3 分)

综上，R 是等价关系。

说明：只给出定义并完全正确，给 2 分；只给出定义并部分正确，给 1 分。

4．(8 分)

(1)对任意的 $x\in A$，因为 f 是从 A 到 B 的函数，故存在 $y\in B$，使 $<x,y>\in f$，$<y,x>\in f^{-1}$。
所以 f^{-1} 是满射。(4 分)

(2)对任意的 $x\in A$，若存在 $y_1,y_2\in B$，使得 $<y_1,x>\in f^{-1}$ 且 $<y_2,x>\in f^{-1}$，则有 $<x,y_1>\in f$ 且
$<x,y_2>\in f$。因为 f 是函数，则 $y_1=y_2$。所以，f^{-1} 是单射。(4 分)

因此 f^{-1} 是双射。

说明：只给出定义并完全正确，给 2 分；只给出定义并部分正确，给 1 分。

5．(8 分)

(1) $\forall x = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, $y = y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7 \in G$, $x^\circ y = z_1z_2z_3z_4z_5z_6z_7$。

$$z_1 \oplus z_2 \oplus z_3 = (x_1 \oplus y_1) \oplus (x_2 \oplus y_2) \oplus (x_3 \oplus y_3) = (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \oplus (y_1 \oplus y_2 \oplus y_3) = x_5 \oplus y_5 = z_5$$

即 $z_5 = z_1 \oplus z_2 \oplus z_3$。同理可证：$z_6 = z_1 \oplus z_2 \oplus z_4$，$z_7 = z_1 \oplus z_3 \oplus z_4$。

于是 $x^\circ y = z \in G$，即 G 是封闭的。(3 分)

(2) $\forall x,y,z \in G$，令 $(x^\circ y)^\circ z = a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$, $x^\circ(y^\circ z) = b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$，

$$a_i = (x_i \oplus y_i) \oplus z_i = x_i \oplus (y_i \oplus z_i) = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, 7$$

所以 G 中满足结合律。(3 分)

(3) 易验证，单位元是 0000000。(1 分)

(4) $\forall x \in G$，$x^{-1} = x$。(1 分)

综上，G 构成群。

6．(5 分)

做无向图 $G = <V, E>$，其中 $V = \{ v \mid v$ 表示学生$\}$，$E = \{ <u, v> \mid u, v \in V \wedge u \neq v \wedge u$ 与 v 能合作$\}$，则 G 为简单图，且 $\delta(G) \geq 3$。(2 分)

于是 $u, v \in V$，有 $d(u) + d(v) \geq 6$。可知 G 为哈密顿图，因而存在着哈密顿回路。在回路上相邻的两个顶点所代表的两个人能合作。(2 分)

设 $G = v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ 为 G 中的一条哈密顿回路，则是 $\{v_1, v_2\}$、$\{v_3, v_4\}$、$\{v_5, v_6\}$ 一种满足要求的分组方案。(1 分)

一、填空题（每小题2分，共20分）

1. 令 p：小明去美国留学，q：小明去欧洲留学。命题"小明只能去美国留学或去欧洲留学。"的符号化形式为__________。
2. 令 $F(x)$：x 是苹果，$H(x, y)$：x 与 y 完全相同，$L(x, y)$：$x=y$。命题"没有完全相同的苹果。"的符号化形式为__________。
3. 集合 A={1, 2, 3}的对称关系有__________个。
4. 设个体域 $D=\{1, 2, 3\}$，消去公式 $\exists x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$ 中的量词后__________。
5. $\exists x F(x)\wedge\forall y G(y)$ 的前束范式为__________。
6. 设<S, *, ·>是格，则运算*和·满足__________。
7. 设 L 是格，$\forall a, b, c\in L$，$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\preceq(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$ 的对偶命题是__________。
8. 无向二部图中的顶点集可划分为两个不相交的子集，同一子集中的顶点间具有__________关系。
9. 设 G 为 n 阶 3-正则图，则 G 的补图的边数为__________。
10. 平面图 G 中面的次数 R_i 与边数 m 的关系是__________。

二、判断题（每小题2分，共20分，正确的划√，错误的划×）

1. 陈述句"2015年的元旦下大雪"是命题。
2. 若 A 和 B 是任意两个集合，则 $A\times B=B\times A$。
3. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，则 $R=\{<1, 3>\}$ 是 A 上的传递关系。
4. 任何两个具有 2^n 个元素的有限布尔代数都是同构的。
5. 一阶公式 $\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x, y)\rightarrow\forall xF(x))$ 是非永真式的可满足式。
6. 小于6阶的群一定是循环群。
7. 设<R, +, ·>是环，则<R, +>构成群，<R, ·>构成半群。
8. 整数序列（1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5）可以充当无向树的度数列。
9. 如果有向图 G 是强连通的，则 G 必是欧拉图。
10. 若 n 阶无向连通图 G 中有割点或桥，则 G 不是哈密顿图。

三、计算题（每小题5分，共15分）

1. 求命题公式 $((p\vee q)\wedge(p\rightarrow q))\leftrightarrow(q\rightarrow p)$ 的主合取范式和主析取范式。
2. 设 $G=<a>$ 是18阶循环群，求出该群的所有子群。
3. 无向树 T 有3个3度顶点，2个4度顶点，其余的顶点均为树叶，求T的顶点数。

四、证明题（共 45 分）

1. (8 分) 设 $f(x), g(x), m(x)$ 都是域 F 上的多项式，证明：$f(x)=g(x) \bmod m(x)$，当且仅当 $m(x) \mid (f(x)-g(x))$。
2. (8 分) 在自然推理系统中构造推理的证明：

   前提：$\forall x(F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x)), \exists x(F(x) \wedge R(x))$

   结论：$\exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge R(x))$
3. (8 分) 设 S 是集合 A 上的等价关系，T 是集合 B 上的等价关系，定义 A×B 上的关系 R：$<<x_1, y_1>, <x_2, y_2>> \in R$ 当且仅当 $<x_1, x_2> \in S$ 且 $<y_1, y_2> \in T$。证明：R 是等价关系。
4. (8 分) 设 $f: R \times R \rightarrow C$，其中 R, C 分别表示实数集和复数集，$f(<x, y>)=x+iy$，$i^2=-1$，证明 f 是双射函数。
5. (8 分) 设 $G_1=<A, \circ>$，$G_2=<B, *>$ 是群，在集合 A×B 上定义二元运算 $\bullet$：$\forall <a_1, b_1>, <a_2, b_2> \in A \times B$，$<a_1, b_1> \bullet <a_2, b_2> = <a_1 \circ a_2, b_1 * b_2>$。证明：$<A \times B, \bullet>$ 构成群。
6. (5 分) 若图 G 是不连通的，则 G 的补图 $\bar{G}$ 是连通的。

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
2. $\forall x \forall y((F(x) \wedge F(y) \wedge \neg L(x, y)) \rightarrow \neg H(x, y))$

   或 $\neg \exists x \exists y((F(x) \wedge F(y) \wedge \neg L(x, y) \wedge H(x, y))$
3. 2^6 或 64
4. $(F(1) \wedge F(2) \wedge F(3)) \rightarrow (G(1) \vee G(2) \vee G(3))$

   或 $\neg F(1) \vee \neg F(2) \vee \neg F(3) \vee G(1) \vee G(2) \vee G(3)$

   或 $(F(1) \rightarrow G(1)) \vee (F(2) \rightarrow G(2)) \vee (F(3) \rightarrow G(3))$
5. $\exists x \forall y(F(x) \wedge G(y))$ 或 $\forall y \exists x(F(x) \wedge G(y))$
6. 交换律、结合律、吸收律（、幂等律）
7. $(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \geq (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$
8. 不相邻
9. $n(n-1)/2-3n/2$ 或 $(n^2-4n)/2$ 或 $n^2/2-2n$
10. $\sum \deg(R_i)=2m$

二、判断题（每小题 2 分，共 20 分，正确的划 √，错误的划 ×）

1. √ 2. × 3. √ 4. √ 5. ×

6. × 7. √ 8. × 9. × 10. √

三、计算题（每小题5分，共15分）

1．解：

主合取范式：$M_0 \wedge M_1 \wedge M_2$　　　　主析取范式：m_3

2．解：

1 阶子群：　$<a^{18}>=\{e\}$

2 阶子群：　$<a^9>=\{e, a^9\}$

3 阶子群：　$<a^6>=\{e, a^6, a^{12}\}$

6 阶子群：　$<a^3>=\{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}, a^{15}\}$

9 阶子群：　$<a^2>=\{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, a^{12}, a^{14}, a^{16}\}$

18 阶子群：$<a>=G$

3. 设树中有 x 片树叶，由握手定理得：

$x+3\times3+2\times4=2(5+x-1)$，解得 $x=9$。所以 T 中有 $3+2+9=14$ 个顶点。

四、证明题（共45分）

1．(8分) 证明：

(1) 充分性

设 $m(x)|(f(x)-g(x))$，则 $f(x)-g(x)=q_1(x)m(x)$，$f(x)=g(x)+q_1(x)m(x)$。

再设，$m(x)$除$g(x)$所得的商式为$q_2(x)$，余式为$r_2(x)$，则

$g(x)=q_2(x)m(x)+r_2(x)$，$\partial r_2(x)<\partial m(x)$或$r_2(x)=0$

则 $f(x)=q_2(x)m(x)+r_2(x)+q_1(x)m(x)=[q_1(x)+q_2(x)]m(x)+r_2(x)$

因此，$f(x)\equiv g(x) \bmod m(x)$。

(2) 必要性

若 $f(x)\equiv g(x) \bmod m(x)$，则 $f(x)=q_1(x)m(x)+r(x)$，$g(x)=q_2(x)m(x)+r(x)$，

$\partial r(x)<\partial m(x)$或$r(x)=0$。

于是，$f(x)-g(x)=q_1(x)m(x)-q_2(x)m(x)=[q_1(x)-q_2(x)]m(x)$

显然有 $m(x)|(f(x)-g(x))$。

证毕。

2．（8 分）证明：

① $\exists x(F(x)\wedge R(x))$ 前提引入

② $F(a)\wedge R(a)$ ①EI 规则

③ $\forall x(F(x)\to G(x)\wedge H(x))$ 前提引入

④ $F(a)\to G(a)\wedge H(a)$ ③UI 规则

⑤ $F(a)$ ②化简规则 （4 分

⑥ $G(a)\wedge H(a)$ ④⑤假言推理

⑦ $G(a)$ ⑥化简规则

⑧ $F(a)\wedge G(a)\wedge R(a)$ ②⑦合取引入

⑨ $\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge R(x))$ ⑧EG 规则 （8

一、填空题（每小题2分，共10分）

1．令 p：小明拿一个苹果，q：小明拿一个梨。命题"小明只能从筐里拿一个苹果或一个梨。"的符号化形式为____________。$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

2．设个体域为人类集合，$P(x)$：x 是总经理，$Q(x)$：x 有秘书，则命题"只有总经理才有秘书"可符号化为______________。$\forall x(Q(x)\rightarrow P(x))$

3．设个体域 $D=\{1,2,3\}$，消去公式 $\forall x\forall y(F(x)\rightarrow G(y))$ 中的量词后为____________。$(F(1)\vee F(2)\vee F(3))\rightarrow(G(1)\wedge G(2)\wedge G(3))$

4．设 $A=\{1,2,3\}$ 和 $B=\{4,5,6,8\}$，R 与 S 是从 A 到 B 的关系，且 xRy 当且仅当 $\gcd(x,y)=1$，即 x 与 y 的最大公约数等于 1，xSy 当且仅当 $x+y<8$，则 $R\cap S=$____________。$\{<1,4>,<1,5>,<1,6>,<2,5>,<3,4>\}$

5．设 R 是实数集合，$f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$，$f(x)=x^2-x+2$，$g:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$，$g(x)=x-3$，则 $f\circ g=$____________。x^2-x-1

二、判断题（每小题2分，共10分，正确的划√，错误的划×）

1．陈述句"火星上有生命"不是命题。×

2．公式 $\exists x(F(x)\wedge G(x))\rightarrow\forall yG(y)$ 是非永真式的可满足式。√

3．集合的对称差运算满足结合律。√

4．若 R 是集合 A 上的传递关系，则 R^2 也是集合 A 上的传递关系。√

5．集合的等势具有自反性、对称性和传递性。√

三、计算题（每小题10分，共20分）

1．求命题公式 $\neg((p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow p))\vee\neg((r\rightarrow\neg q)\rightarrow\neg p)$ 的主合取范式和主析取范式。

主合取范式：$M_{000}\wedge M_{010}\wedge M_{111}$（$M_0\wedge M_2\wedge M_7$）

主析取范式：$m_{001}\vee m_{011}\vee m_{100}\vee m_{101}\vee m_{110}$（$m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6$）

2．设 A={1,2}，则

(1) A⊕A=____________，card A=____________。

(2) A 上有____________个二元关系。其中____________个自反关系，____________个反自反关系，____________个对称关系，____________个反对称关系，____________个等价关系，____________个偏序关系。

(3) A^A 中有____________个函数，其中有____________个是满射。

(1) A⊕A=__空集__，card A=__2__。

(2) A 上有__16__个二元关系。其中__4__个自反关系，__4__个反自反关系，__8__个对称关系，__12__个反对称关系，__2__个等价关系，__3__个偏序关系。

(3) A^A 中有__4__个函数，其中有__2__个是满射。

四、证明题（每小题15分，共60分）

1．在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明：

如果存在偶数，则所有有理数都可以表示成分数。如果存在素数，则存在有理数，因此，如果存在偶素数，则存在分数。

设 $E(x)$：x 是偶数，$Q(x)$：x 是有理数，$S(x)$：x 是素数，$F(x)$：x 是分数。

前提：$\exists xE(x)\rightarrow\forall x(Q(x)\rightarrow F(x))$，$\exists xS(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

结论：$\exists x(E(x)\wedge S(x))\rightarrow\exists xF(x)$

证明：

(1) $\exists x(E(x)\wedge S(x))$ 附加前提引入

(2) $\exists xE(x)$ (1)置换

(3) $\exists xS(x)$ (1)置换

(4) $\exists xE(x)\rightarrow\forall x(Q(x)\rightarrow F(x))$ 前提引入

(5) $\forall x(Q(x)\rightarrow F(x))$ (2)(4)假言推理

(6) $\exists xS(x)\rightarrow\exists xQ(x)$ 前提引入

(7) $\exists xQ(x)$ (3)(6)假言推理

(8) $Q(c)$ (7)EI 规则

(9) $Q(c)\rightarrow F(c)$ (5)UI 规则

(10) $F(c)$ (8)(9)假言推理

(11) $\exists xF(x)$ (10)EG 规则

(12) $\exists x(E(x)\wedge S(x))\rightarrow\exists xF(x)$ (1)(11)附加前提

2．证明 $A\cup B=E\Leftrightarrow\sim A\subseteq B\Leftrightarrow\sim B\subseteq A$。

证明 $A\cup B=E\Rightarrow\sim A\subseteq B$

任取 x，

$$x\in\sim A\Leftrightarrow x\in\sim A\cap E\Leftrightarrow x\in\sim A\cap(A\cup B)$$

$$\Leftrightarrow x\in\sim A\cap A\vee x\in\sim A\cap B\Leftrightarrow x\in\sim A\cap B$$

$$\Leftrightarrow x\in\sim A\wedge x\in B\Rightarrow x\in B$$

若 $\sim A\subseteq B$，下面证明 $A\cup B=E$。显然 $A\cup B\subseteq E$。

任取 x，

$$x\in E\Rightarrow x\in\sim A\cup A\Leftrightarrow x\in\sim A\vee x\in A$$

$$\Rightarrow x\in B\vee x\in A\Rightarrow x\in A\cup B$$

因此 $E\subseteq A\cup B$。这就证明了 $A\cup B=E$

综合上述有

$$A\cup B=E\Rightarrow\sim A\subseteq B$$

$$\sim A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x(x\in\sim A\rightarrow x\in B)\Leftrightarrow\forall x(\neg x\in A\rightarrow x\in B)$$

$$\Leftrightarrow\forall x(\neg x\in B\rightarrow x\in A)\Leftrightarrow\forall x(x\in\sim B\rightarrow x\in A)\Leftrightarrow\sim B\subseteq A$$

3．设 R 是一个二元关系，设 $S=\{<a, b>|$ 对于某一 c，有 $<a, c>\in R$ 且 $<c, b>\in R\}$，证明：若 R 是一个等价关系，则 S 也是一个等价关系。

证明：设 R 是 A 上的等价关系

（1） 对任意 $x\in A$，因为 R 在 A 上自反，所以 $\langle x,x\rangle\in R$。由 S 的定义，$\langle x,x\rangle\in S$，所以 S 是自反的。

（2） 对任意的 $x,y\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in S$，则存在某个 c，使得 $\langle x,c\rangle\in R\wedge\langle c,y\rangle\in R$，因为 R 是对称的，故有：$\langle c,x\rangle\in R\wedge\langle y,c\rangle\in R$，由 S 的定义，$\langle y,x\rangle\in S$，即 S 是对称的。

（3） 对任意 $x,y,z\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in S$，$\langle y,z\rangle\in S$，则必存在某个 c_1，使得 $\langle x, c_1\rangle\in R$，$\langle c_1, y\rangle\in R$，由 R 传递性，$\langle x,y\rangle\in R$。同理存在 c_2，使得 $\langle y, c_2\rangle\in R$，$\langle c_2, z\rangle\in R$，由 R 的传递性，$\langle y,z\rangle\in R$。在由 S 定义，得 $\langle x,z\rangle\in S$。即 S 是传递的。

所以 S 是 A 上的等价关系。

4．设满射函数 $f: A\to A$，且 $f\circ f=f$。证明 $f=I_A$。

证明：任取 $y\in A$，必有 $x\in A$ 使得 $<x,y>\in f$，由于题设有 $<x,y>\in f\circ f$，因此存在 $z\in A$ 使得 $<x, z>\in f$ 且 $<z,y>\in f$。由于 $f(x)$ 是唯一的，因此 $y=z$，从而 $<y,y>\in f$。由于 y 的任意性，知 $I_A\subseteq f$。

任取 $<x, y>\in f$，根据题设存在 $z\in A$ 使得 $<x, z>\in f$ 且 $<z, y>\in f$。由于 $I_A\subseteq f$，有 $<x, x>\in f$，$<z, z>\in f$，因此 $x=z$，$z=y$，从而得到 $x=y$。这就证明了 $f\subseteq I_A$。

综合上述命题得证。

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）。

1．令 p：小明拿一个苹果，q：小明拿一个梨。命题“小明只能从筐里拿一个苹果或一个梨。”的符号化形式为______________________________。

2．设个体域为人类集合，$P(x)$：x 是总经理，$Q(x)$：x 有秘书，则命题“只有总经理才有秘书。”可符号化为____________________。

3．设个体域 $D=\{1, 2, 3\}$，消去公式 $\forall x \forall y\ (F(x) \rightarrow G(y))$ 中的量词后为____________________________。

4．设 $A=\{1, 2, 3\}$ 和 $B=\{4, 5, 6, 8\}$，R 与 S 是从 A 到 B 的关系，且 xRy 当且仅当 $\gcd(x, y)=1$，即 x 与 y 的最大公约数等于 1，xSy 当且仅当 $x+y<8$，则 $R \cap S$ = ______________________________。

5．设 R 是实数集合，f：R→R，$f(x)=x^2-x+2$，g：R→R，$g(x)=x-3$，则 $f \circ g$ =______________________________。

二、判断题（每小题 2 分，共 20 分，正确的划 √，错误的划×）。

1．陈述句“存在高效的算法可以判断两个图是否同构”是命题。

2．一阶公式 $\forall x(F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x)))$ 是非永真式的可满足式。

3．若 A 和 B 是任意两个集合，则 $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$。

4．一个关系 R，如果不是对称的，则一定是反对称的。

5．有穷偏序集中一定存在极大元和极小元，但不一定存在最大元和最小元。

6．设 <R，+，·> 是代数系统，+和·是二元运算，如果<R，+>构成交换群，<R，·>构成半群，则称 <R，+，·>是一个环。

7．任何有限布尔代数的基数都是 2^n，其中 n 是自然数。

8．整数序列（1，2，3，4，5，6）可以简单图化。

9．无向图 G 中只有两个奇度顶点 u 与 v，则 u 与 v 必连通。

10．无向图中的最长路径是唯一的。

三、计算题（每小题 5 分，共 15 分）。

1．求命题公式 $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$ 的主合取范式和主析取范式。

2．设 $G=<a>$ 是 30 阶循环群，求出该群的所有子群和生成元。

3．(8 分)证明：

（1）自反性

任取 $x_1 \in A, y_1 \in B$，已知 S 是集合 A 上的等价关系，T 是集合 B 上的等价关系。则有 $<x_1, x_1> \in S \wedge <y_1, y_1> \in T$。由定义可知，$<<x_1, y_1>, <x_1, y_1>> \in R$，即 R 是 $A \times B$ 上自反的关系。 (2 分)

（2）对称性

任取 $<<x_1, y_1>, <x_2, y_2>> \in R$，则 $<x_1, x_2> \in S, <y_1, y_2> \in T$，已知 S，T 是等价关系。则有 $<x_2, x_1> \in S, <y_2, y_1> \in T$。由定义可知，$<<x_2, y_2>, <x_1, y_1>> \in R$，即 R 是 $A \times B$ 上对称的关系。 (5 分)

（3）传递性

任取 $<<x_1, y_1>, <x_2, y_2>> \in R$，$<<x_2, y_2>, <x_3, y_3>> \in R$，由定义可知 $<x_1, x_2> \in S \wedge <y_1, y_2> \in T$，$<x_2, x_3> \in S \wedge <y_2, y_3> \in T$，已知 S，T 是等价关系。则有 $<x_1, x_3> \in S \wedge <y_1, y_3> \in T$。由定义可知，$<<x_1, y_1>, <x_3, y_3>> \in R$，即 R 是 $A \times B$ 上传递的关系。

综上可知，R 是 $A \times B$ 上的等价关系。

证毕。 (8 分)

4．(8 分)证明：

(1) 先证 f 是满射。

任取 $u+iv \in C$，存在 $<u, v> \in R \times R$，且 $f(<u, v>) = u+iv$，从而 f 是满射的。 (4 分)

(2) 再证 f 是单射。

任取 $<x, y>$ 和 $<u, v>$，

$f(<x, y>) = f(<u, v>) \Rightarrow x+iy = u+iv \Rightarrow x=u \wedge y=v \Rightarrow <x, y> = <u, v>$。

从而 f 是单射的。

综上可知 f 是双射。 (8 分)

5．(8分) 证明：

(1) 任取$<a, b>, <c, d> \in A\times B$

$<a, b> \bullet <c, d> = <a^\circ c, b^* d> \in A\times B$

所以 $\bullet$ 是封闭的。 (2分)

(2) 任取 $<a, b>, <c, d>, <u, v> \in A\times B$

$(<a, b>\bullet<c, d>)\bullet<u, v> = <a^\circ c, b^* d> \bullet <u, v> = <(a^\circ c)^\circ u, (b^* d)^* v> = <a^\circ c^\circ u, b^* d^* v>$

$<a, b>\bullet(<c, d>\bullet<u, v>) = <a, b> \bullet (<c^\circ u, d^* v>) = <a^\circ (c^\circ u), b^*(d^* v)> = <a^\circ c^\circ u, b^* d^* v>$

所以 $\bullet$ 是可结合的。 (4分)

(3) 设 e_1 和 e_2 是 $^\circ$ 和 * 的单位元，任取$<a, b> \in A\times B$

$<a, b> \bullet <e_1, e_2> = <a^\circ e_1, b^* e_2> = <a, b>$

$<e_1, e_2> \bullet <a, b> = <e_1{}^\circ a, e_1{}^* b> = <a, b>$

所以 $<e_1, e_2>$ 是 $\bullet$ 的单位元。 (6分)

(4) 设 a^{-1}, b^{-1} 是 a 和 b 关于 $^\circ$ 和 * 的可逆元素，任取$<a, b> \in A\times B$

$<a, b> \bullet <a^{-1}, b^{-1}> = <a^\circ a^{-1}, b^* b^{-1}> = <e_1, e_2>$

$<a^{-1}, b^{-1}> \bullet <a, b> = <a^{-1\circ} a, b^{-1*} b> = <e_1, e_2>$

所以 $<a, b>$的逆元是$<a^{-1}, b^{-1}>$。

综上，$<A\times B, \bullet>$构成群 (8分)

6．(5分) 证明：

若图 $G=<V, E>$是不连通的，可设图 G 的连通分支是 $G(V_1)$, $G(V_2)$, …, $G(V_m)$ $(m\geq 2)$。由于任意两个连通分支 $G(V_i)$与 $G(V_j)$ $(i\neq j)$之间不连通，因此两个结点子集 V_i与 V_j之间的所有连线都在图 G 的补图 $\overline{G}$ 中。任取两个结点 u 和 v，有两种情形：

(1) u 和 v 分别属于两个不同结点子集 V_i与 V_j。由上可知 $\overline{G}$ 包含边(u, v)，故 u 和 v 在 $\overline{G}$ 中是连通的。

(2) u 和 v 属于同一结点子集 V_i。可在另一个结点子集 V_j中取一个结点 w，由上可知边(u, w)及边(v, w)均在 $\overline{G}$ 中，故邻接边(u, w)和(w, v)组成的路连接结点 u 和 v，即 u 和 v 在 $\overline{G}$ 中也是连通的。

由此可知，当图 G 是不连通图时，$\overline{G}$ 必是连通图。 (5分)

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2010 年 春季 学期）

课程编号： 0906101 课程名称： 离散数学（A 卷）

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 令 p：小张学习努力，q：小张考试及格。命题“小张只有学习努力才能考试及格。”的符号化形式为__________。
2. 令 S(x)：x 是学生，T(y)：y 是老师，H(x,y)：x 超越 y。命题“学生会超越老师的。”的符号化形式为__________。
3. 设个体域 D={1, 2}，消去公式 $\exists x\forall yF(x, y)$ 中的量词后为__________。
4. 8 元布尔代数有__________个子布尔代数。
5. 设 A 和 B 是集合，则 A^B={__________}。
6. 6 阶群的子群的阶数只可能是__________。
7. 设<R,+ , ·>是环，则<R, +>构成__________，<R, ·>构成__________，且·对+具有__________。
8. 有向图 D 是欧拉图的充分必要条件是 __________。
9. N 阶无向简单图 G 中，任意两个不相邻结点 u、v，应满足__________，G 为哈密顿图。
10. N 阶无向连通图 G 至少具有__________条边。

二、判断题（每小题 2 分，共 20 分，正确的划√，错误的划×）

1. 任意谓词公式一定存在与其等值的前束范式。
2. “两个等价关系的复合关系不一定还是等价关系”是真命题。
3. 重言式的主合取范式为空。
4. 无限不可数集合的基数为 ℵ。
5. 格<S,*, ·>中的二元运算*和·具有交换律、结合律和分配律。
6. 代数系统中的幺元一定不是零元。
7. 整数列(1,2,2,2,3)可以简单图化。
8. 无向二部图中无奇数长度的回路。
9. 连通图 G 是树当且仅当 G 中任意两个结点之间仅有一条初级通路。
10. 连通平面图 G 满足 m- n+r=2。（m：边数，n：结点数，r：面数）。

三、计算题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 求命题公式 (¬ p∧q) ? r 的主合取范式。
2. 设 A={1,2,3,4}，给出集合 A 上所有具有两个分块的划分所对应的等价关系。
3. 无向树 T 有 2 个 2 度结点，4 个 3 度结点，其余均为叶子，求 T 的树叶数。

四、证明题（共 45 分）

1. (8 分) 设 f 和 g 分别是 A 到 B 和从 B 到 C 的函数，证明：若 fog 是满射，则 g 是满射。
2. (8 分) 在自然推理系统 F 中构造推理的证明：
   前提：$\forall x(F(x)$? $G(x))$，$\exists x(F(x)\wedge I(x))$
   结论：$\exists x(G(x)\wedge I(x))$
3. (8 分) 设<A，R_1>、<B，R_2>为偏序集，定义 A×B 上的二元关系 R 如下：
   对于任意的<x，y>，<u，v>∈A×B，
   <x，y> R<u，v> 当且仅当 x R_1u 且 y R_2v
   证明 R 为 A×B 上的偏序关系。
4. (8 分)设 A 为集合，⊕为集合的对称差运算，证明：<P(A)，⊕>是群。
5. (8 分)设<G，*>是群，证明：对于∀a∈G，a 与 a^{-1} 具有相同的阶。
6. (5 分) 设 G 为无向图，证明：若 G 中有桥或割点，则 G 不是哈密顿图。

2009级离散数学A卷试题参考答案

一、填空题（每小题2分，共20分）

1. $q \to p$　　2. $\forall x \forall y(S(x) \wedge T(y) \to H(x,y))$/ $\exists x \exists y(S(x) \wedge T(y) \wedge H(x,y))$

3. $(F(1,1) \wedge F(1,2)) \vee (F(2,1) \wedge F(2,2))$　　4. 4

5. $f | f: B \to A$ 的函数　　6. 1、2、3、6

7. 交换群、半群、分配律　　8. D是强连通图且每个结点的出度等于入度

9. $\deg(u) + \deg(v) \geq n$　　10. n-1

二、判断题（每小题2分，共20分，正确的划v，错误的划×）

1. v　2. v　3. v　4. ×　5. ×

6. ×　7. ×　8. v　9. v　10. ×

三、计算题（每小题5分，共15分）

1. M_{010} (M_2)

2. R_1={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>，<2，3>，<3，2>，<2，4>，<4，2>，<3，4>，<4，3>}

R_2={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>，<1，3>，<3，1>，<1，4>，<4，1>，<3，4>，<4，3>}

R_3={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>，<1，2>，<2，1>，<1，4>，<4，1>，<2，4>，<4，2>}

R_4={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>，<1，2>，<2，1>，<1，3>，<3，1>，<2，3>，<3，2>}

R_5={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>，<1，2>，<2，1>，<3，4>，<4，3>}

R_6={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>，<1，3>，<3，1>，<2，4>，<4，2>}

R_7={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>，<1，4>，<4，1>，<2，3>，<3，2>}

3. 6

四、证明题（共45分）

1. 对于任意 $z \in C$，由 $f \circ g$ 是满射，必存在 $x \in A$，使得 $z = f \circ g(x) = g(f(x))$；由 f 是 A 到 B 的函数，必存在 $y \in B$，使得 $f(x) = y$。即有 $z = g(y)$ 成立。

2. ①$\exists x(F(x) \wedge I(x))$　　前提引入

　②$F(a) \wedge I(a)$　　①ES

　③$F(a)$　　②化简规则

　④$I(a)$　　②化简规则

⑤ $\forall x(F(x) \to G(x))$	前提引入
⑥ $F(a) \to G(a)$	⑤US
⑦ $G(a)$	③⑥假言推理
⑧ $I(a) \land G(a)$	④⑦合取
⑨ $\exists x(G(x) \land I(x))$	⑧EG 假言推理

3. (1)对任$<x,y> \in A\times B$，由 xR_1x，yR_2y，得 $<x,y>R<x,y>$，所以 R 满足自反性。

(2)若$<x,y>R<u,v>$和$<u,v>R<x,y>$，则 xR_1u，yR_2v 和 uR_1x，vR_2y，由 R_1、R_2 的反对称性，得 x=u，y=v，即$<x,y>=<u,v>$；R 满足反对称性。

(3)若$<x,y>R<u,v>$和$<u,v>R<w,s>$，则 xR_1u，yR_2v 和 uR_1w，vR_2s，由 R_1、R_2 的传递性，得 xR_1w, yR_2s，即有$<x,y>R<w,s>$，R 满足传递性。

综上，R 为 $A\times B$ 上的偏序关系。

4. (1)$\forall$ B、C$\in$P(A)，有 B$\subseteq$A、C$\subseteq$A，则 $B\oplus C=(B\cup C)-(B\cap C)\subseteq(B\cup C)\subseteq A$，$B\oplus C\in P(A)$，满足封闭性。

(2)$\forall$ B、C、D$\in$P(A)，有 B$\subseteq$A、C$\subseteq$A、D$\subseteq$A，

由$\oplus$的性质知：$(B\oplus C)\oplus D=B\oplus(C\oplus D)$，满足结合性。

(3)$\forall B\in P(A)$，$B\oplus\Phi=\Phi\oplus B=B$，$\Phi$是幺元。

(4) $\forall B\in P(A)$，$B\oplus B=\Phi$，B 以自身为逆元。

5. 设|a|=n，有 $a^n=e$。则$(a^{-1})^n=(a^{-1})^n*a^n=(a^{-1}*a)^n=e$。

若存在 0<k<n，使得$(a^{-1})^k=e$。则 $a^k=(a^{-1})^k*a^k=(a^{-1}*a)^k=e$。与|a|=n矛盾，所以必有$|a^{-1}|=n$。

6. 假设 G 中有桥，设 e=(u,v)为其中一桥。考虑 G-e 产生 k（k≥2）个连通分支，对任意连通分支 G_i与 $G_j(i\neq j)$，它们之间的任何回路 C 都必经过 e=(u,v)至少两次，u，v 在 C 上重复出现，则 C 不是汉密顿回路。由 C 的任意性，问题得证。同理可证 G 中有割点的情况。

姓名：__________ 学号：__________ 班级：__________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2009 年 秋季 学期）

课程编号： 06020020 课程名称： 离散数学（A卷）

一、 填空题（每小题3分，共30分）

1. 设p：他生病了，q：他出差了，r：我同意他不参加学习。则命题"如果他生病了或出差了，我就同意他不参加学习。"符号化的结果为__________。
2. 公式$\forall x((A(x)\to B(y,x))\wedge \exists zC(y,z))\to D(x)$中，自由变元是__________。
3. 若个体域$D=\{1,2\}$，谓词$P(x,y)$：$x+y=4$。则谓词公式$\exists x\forall yP(x,y)$的真值为__________。
4. 若集合$A=\{\{1\},\{3\}\}$，$B=\{1,3\}$，则$A\cap B$ __________。
5. 设集合$A=\{1,2,3\}$上的函数分别为：$f=\{<1,2>,<2,1>,<3,3>\}$，$g=\{<1,3>,<2,2>,<3,2>\}$，则复合函数$g\circ f=$__________。
6. 设$V=\{S,\circ\}$是代数系统，$\circ$为二元运算，如果$\circ$是__________，则称为V为半群。
7. 设R是整环，且R中至少含有两个元素，若$\forall a\in R^{*}=R-\{0\}$，都有__________，则称$R$为域。
8. 连通且__________的无向图称为无向树，简称为树。
9. 对于任意的连通的平面图G，其顶点数、边数和面数分别为n,m,r，则关于n,m,r三者之间的关系的欧拉公式为__________。
10. 设$<L,\le>$是格，则运算$\vee$和$\wedge$适合交换律、__________、幂等律和吸收律。

二、判断题（每小题2分，共20分，正确的划√，错误的划×）

1. 命题公式$\neg(p\to(p\vee q))\wedge r$是矛盾式。
2. $\forall x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow \forall xA(x)\vee\forall xB(x)$，其中$A(x)$，$B(x)$为含$x$自由出现的公式。
3. 关系R_1和R_2都是自反的，则$R_1\cup R_2$也是自反的。

4. 不存在无穷可数集合。
5. 设G为群，H是G的非空子集，则H是G的子群当且仅当$\forall a,b\in H$有$ab^{-1}\in H$。
6. 设G是群，H是G的子群，则$|G|=|H|\bullet[G:H]$。
7. 无向图G是欧拉图当且仅当G是连通图，且G中没有奇度顶点。
8. 无向标定图G中的初级通路一定是简单通路。
9. 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是分配格，若$a\in L$，且对于a存在补元b，则b是a的惟一补元。
10. 设G^{*}是连通平面图G的对偶图，则G^{*}的顶点数n^{*}与G的顶点数n相等。

三、计算题（每小题6分，共18分）

1. **用等值演算法**求命题公式$(\neg p\vee q)\to r$的主合取范式。
2. 75个儿童到公园游乐场游玩，他们在那里可以骑旋转木马，坐滑行铁道，乘宇宙飞船，已知其中20人这三种东西都乘过，其中55人至少乘坐过其中的两种。若每样乘坐一次的费用是0.5元，公园游乐场总共收入70元，用**包含排斥原理**求有多少儿童没有乘坐过其中任何一种。
3. 已知一棵无向树中有2个2度顶点，1个3度顶点，3个4度顶点，其余顶点度数都为1。问它有多少个1度顶点。

四、证明题（每小题8分，共32分）

1. 在自然推理系统F中构造推理的证明：
   前提：$\forall x(F(x)\vee(G(x))$，$\forall x(G(x)\to\neg H(x))$，$\exists xH(x)$
   结论：$\exists xF(x)$
2. 若非空集合A上的二元关系R和S是等价关系，试证明：$R\cap S$也是A上的等价关系。
3. 设$G=\{a+bi\mid a,b\in Z\}$，i为虚数单位，即$i^2=-1$。证明$<G,+>$是群（其中"+"为一般意义下的复数加法）。
4. 设$G=<V,E>$是连通的简单平面图，每个面的次数至少为3，面数为k，顶点数$|V|=n$且$n\ge 3$，试证明$k\le 2n-4$。

离散数学2009年秋季学期A卷试题参考答案

一、填空题（每小题3分，共30分）

1．$p \vee q \to r$　　2．x, y

3．假或0　　4．$\varnothing$

5．$\{<1, 3>, <2, 1>, <3, 1>\}$　　6．可结合的

7．$a^{-1} \in R$ 或 a 有逆元　　8．无回路

9．$n-m+r=2$　　10．结合律

二、判断题（每小题2分，共20分，正确的划√，错误的划×）

1．√　2．×　3．√　4．×　5．√

6．×　7．√　8．√　9．√　10．×

三、计算题（每小题6分，共18分）

1．解：

$(\neg p \vee q) \to r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$　　（3分）

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_6$

（6分）

2．　解：

设 A、B、C 分别表示骑旋转木马、坐滑行铁道、乘宇宙飞船的儿童组成的集合，$|A \cap B \cap C|=20$，$|A \cap B|+|A \cap C|+|B \cap C|-2|A \cap B \cap C|=55$，$|A|+|B|+|C|=70/0.5=140$。

由包含排斥原理，得

$|A \cup B \cup C|=|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|$　　（3分）

所以

$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|=75-|A \cup B \cup C|=75-(|A|+|B|+|C|)+(|A \cap B|+|A \cap C|+|B \cap C|-2|A \cap B \cap C|)+|A \cap B \cap C|=75-140+55+20=10$

没有乘坐过其中任何一种的儿童共10人。　　（6分）

3．解：

设它有k个 1 度顶点，则由欧拉握手定理得

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E| \qquad \text{（3 分）}$$
$$= 1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 4 + 1\times k = 19 + k$$

又因为它是一棵树，有$|E| = k+1+2+3-1 = k+5$

从而$2(k+5) = k+19$，解得$k=9$。故它有 9 个 1 度顶点。（6 分）

四、证明题（每小题 8 分，共 42 分）

1．证明：

① $\exists x H(x)$	前提引入	
② $\forall x(F(x)\vee(G(x))$	前提引入	
③ $H(c)$	①EI	
④ $F(c)\vee G(c)$	②UI	
⑤ $\forall x(G(x)\to\neg H(x))$	前提引入	
⑥ $G(c)\to\neg H(c)$	⑤UI	（3 分）
⑦ $\neg G(c)$	③⑥拒取式	（5 分）
⑧ $F(c)$	④⑦析取三段论	
⑨ $\exists x F(x)$	⑧EG	（8 分）

2．证明：

（1）自反性

∀x∈A，因为 R 和 S 是自反关系，所以<x，x>∈R、<x，x>∈S，因而<x，x>∈R∩S，故 R∩S 是自反的。（2 分）

（2）对称性

∀x，y∈A，若<x，y>∈R∩S，则<x，y>∈R、<x，y>∈S，因为 R 和 S 是对称关系，所以因<y，x>∈R、<y，x>∈S，因而<y，x>∈R∩S，故 R∩S 是对称的。

（5 分）

（3）传递性

∀x，y，z∈A，若<x，y>∈R∩S 且<y，z>∈R∩S，则<x，y>∈R、<x，y>∈S 且<y，z>∈R、<y，z>∈S，因为 R 和 S 是传递的，所以因<x，z>∈R、<x，z>∈S，

因而<x，z>∈R∩S，故 R∩S 是传递的。

综上可知，R∩S 是等价关系。

证毕。（8 分）

3．证明：

（1）封闭性

任取 $a+bi,c+di\in G$，有

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\in G$ （2 分）

（2）结合性

任取 $a+bi,c+di,e+fi\in G$，有

$$((a+bi)+(c+di))+(e+fi)=(a+c)+(b+d)i+(e+fi)$$
$$=(a+c+e)+(b+d+f)i$$

同理

$(a+bi)+((c+di)+(e+fi))=(a+c+e)+(b+d+f)i$ （4 分）

（3）单位元

0 是单位元。（6 分）

（4）逆元

任取 $a+bi\in G$，$-a-bi\in G$ 是其逆元。

综上可知 $<G,+>$ 是群。

证毕。（8 分）

4．证明：

记 $|E|=m$。因为 G=<V,E>是连通的简单平面图，每个面的度数都不小于 3。

从而由公式 $\sum_{i=1}^{k}\deg(R_i)=2|E|$ 可得

3k≤2m （1） （3 分）

再由欧拉公式 $n-m+k=2$ 有

$m=n+k-2$ （2） （6 分）

由（1）（2）两式得

$k\le 2n-4$

证毕。（8 分）

姓名：______ 学号：______ 班级：______

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2009 年 秋季 学期）

课程编号： 06020020 课程名称： 离散数学（A 卷）

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 令 p：张三拿一个苹果，q：张三拿一个梨。命题"张三只能拿一个苹果或一个梨。"的符号化形式为__________。
2. 令 F(x)：x 是火车，G(y)：y 是汽车，H(x,y)：x 比 y 快。命题"说火车都比汽车快是不对的。"的符号化形式为__________。
3. 设个体域 D={a, b}，消去公式∀x∃yF(x, y)中的量词后为__________。
4. 设集合 A={1,2…,10}，那么 A 上既是自反的又是对称的关系有__________个。
5. 设 G 是 n 阶群，则∀a∈G，|a| 是 n 的因子，且有 a^n=__________。
6. 设 G=<a>为 12 阶循环群，则 G 的生成元为__________。
7. 代数系统<S,*,∘>中，二元运算*和∘具有__________则<S,*,∘>构成格。
8. 设有向图 D 是 n 阶单向连通图，但不是强连通图，则在 D 中至少加__________条边就成为强连通图。
9. 完全二部图 $K_{r,s}$ 为哈密顿图，则 r 和 s 应满足__________。
10. 无向图 G 具有生成树，当且仅当__________。

二、判断题（每小题 2 分，共 20 分，正确的划√，错误的划×）

1. 陈述句"4 是素数仅当 8 是素数"是真命题。
2. "若 x∈A，A∈P(B)，则 x∈P(B)" 是真命题。
3. n 个命题变元可产生 2^n 种命题公式。
4. 设 Z 为整数集合，Q 为有理数集合，则 Z 与 Q 的基数相等。
5. 如果 <R,+> 构成交换群，<R, ·> 构成半群，则 <R,+, ·> 构成环。
6. 群的同态像不一定是群。
7. 整数列(2,2,2,2,3,3)可以简单图化。
8. n 阶连通图 G 的任意两个节点的度数和大于等于 n，则 G 是哈密顿图。
9. 连通图 G 是树当且仅当 G 中每条边都是割边。
10. 简单平面图（指平面嵌入）中每个面的次数大于等于 3。

三、计算题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 求命题公式(((p∨q)∧¬p)? q)∧r 的主析取范式。
2. 给出一个 N×N→N 上的满射函数。
3. 无向图 G 有 11 条边，4 个 3 度顶点，其余的顶点均为 5 度，求 G 的阶数 n。

四、证明题（共 45 分）

1. (8 分) 设 A 和 B 是集合，证明 A−B=A ⇔ A∩B=∅。
2. (8 分) 在自然推理系统 F 中构造推理的证明：
   前提：∀x(F(x)? G(x))，∀x(G(x)∧H(x)? I(x))，F(a)，H(a)
   结论：I(a)
3. (8 分) 设 F 为命题公式的集合，定义 F 上二元关系 R 如下：对于任意的 p, q∈F，p R q 当且仅当 p→q 为永真式，证明 R 为 F 上的偏序关系。
4. (8 分) 设 <Z,+> 是整数加群，令
   kZ = {kz| z∈Z，k>0}
   证明：<kZ,+> 是 <Z,+>的子群。
5. (8 分) 在非零实数集合 R*上，定义运算∘：对于∀a,b∈R*，有 a∘b=2ab，则 <R*, ∘>构成交换群。
6. (5 分) 若无向图 G 为欧拉图，证明 G 中无桥。

2008级离散数学A卷试题参考答案

一、填空题（每小题2分，共20分）

1. $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$　　2. $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y))$

3. $(F(a,a)\vee F(a,b))\wedge(F(b,a)\vee F(b,a))$　　4. 2^{45}

5. e　　6. a, a^5, a^7, a^{11}

7. 交换律、结合律和吸收律　　8. 1

9. r=s　　10. G是连通图

二、判断题（每小题2分，共20分，正确的划v，错误的划×）

1. v　2. ×　3. ×　4. v　5. ×

6. ×　7. v　8. ×　9. v　10. v

三、计算题（每小题5分，共15分）

1. $m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$

2. 令$f: N\times N\to N$，$f(<x,y>)=x$

3. 6

四、证明题（共45分）

1. 必要性：假设 An B?∅，必有 x 属于 An B，则x属于A同时属于B，即x属于A但是x不属于$A-B$，与$A-B=A$矛盾。

充分性：显然$A-B\subseteq A$，下面证明$A\subseteq A-B$。任取x，有

$x\in A\Rightarrow x\in A\cap E$

$\Rightarrow x\in A\cap(B\cup\sim B)$

$\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap\sim B)$

$\Rightarrow x\in A\cap B\vee x\in A\cap\sim B$

$\Rightarrow x\in A\cap B\vee x\in A-B$

$\Rightarrow x\in A-B$（因为 $A\cap B=\varnothing$）

综上上述命题得证。

2. ①$F(a)$　　前提引入

②$\forall x(F(x)\to G(x))$　　前提引入

③$F(a)\to G(a)$　　②UI

④$G(a)$　　①③假言推理

⑤$H(a)$　　前提引入

⑥$\forall x(G(x)\wedge H(x)\to I(x))$　　前提引入

⑦$G(a)\wedge H(a)\to I(a)$　　⑥UI

⑧$G(a) \wedge H(a)$　　　　④⑤合取

⑨$I(a)$　　　　⑦⑧假言推理

3. (1)因为 $p \to p$ 为永真式，所以 pRp，R 满足自反性。

(2)若 pRq 和 qRp，则 $pRq \wedge qRp \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \Leftrightarrow p \leftrightarrow q$，由于 $p \to q$ 和 $q \to p$ 为永真式，故 $p \leftrightarrow q$ 为真，即 p 与 q 等价，R 满足反对称性。

(3)若 pRq 和 qRr，则 $pRq \wedge qRr \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$，由于 $p \to q$ 和 $q \to r$ 为永真式，故 p 为真时，$p \to r$ 为真，而 p 为假时，$p \to r$ 也为真，故 $p \to r$ 为永真式，即 pRr，满足传递性。

综上，R 为 F 上的偏序关系。

4. 因为 $0 \in kZ$，可知 kZ 是 Z 的非空子集。

$\forall kz_1, kz_2 \in kZ$，$kz_1 + (kz_2)^{-1} = kz_1 + k(-z_2) = k(z_1 - z_2) \in kZ$，所以<kZ,+>是<Z,+>的子群。

5. (1)$\forall a,b \in R^*$，$a \circ b = 2ab \in R^*$，满足封闭性。

(2)$\forall a,b,c \in R^*$，$(a \circ b) \circ c = (2ab) \circ c = 4abc = 2a(bc) = 2a(b \circ c) = a \circ (b \circ c)$，满足结合性。　（2 分）

(3)$\forall a,b \in R^*$，$a \circ b = 2ab = 2ba = b \circ a$，满足交换性。

(4)单位元是 1/2。

(5)a 的逆元是 1/(4a)。

综上，$\langle R^*, \circ \rangle$构成交换群。

6. 假设 G 中有桥，设 e=(u,v)为其中一桥。考虑 G-e，它有两个连通分支 G_1 与 G_2。由于 $d_G(u)$，$d_G(v)$在 G 中都是偶数（因为 G 为欧拉图），因而 $d_{G1}(u)$，$d_{G2}(v)$都为奇数，可是 G_1 与 G_2 中其它顶点的度数均为偶数，这与握手定理的推论相矛盾，因而欧拉图中不可能有桥。

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2008 年 秋季 学期）

课程编号： 06020020 课程名称： 离散数学（A 卷）

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 设个体域为正整数集合，命题 $\exists x \forall y(x+y=0)$ 的真值为________。
2. 设 p：我将去镇上，q：我有时间。命题“我将去镇上，仅当我有时间时”可符号化为_______。
3. 设集合 $A=\varnothing$，则其幂集的基数 $|P(A)|=$_______。
4. 集合 A 上有 3 个元素，则 A 上不等价的关系的个数为_______。
5. 设 $\langle S,*,\circ\rangle$ 是代数系统，$*$ 和 $\circ$ 是二元运算，如果 $*$ 和 $\circ$ 满足_________、结合律和吸收律，则 $\langle S,*,\circ\rangle$ 构成一个格。
6. 设 G 是有限群，H 是 G 的子群，则 $|G| = |H|$ ◎ _____。
7. 如果一个格是有补分配格，则称它为________。
8. 设 R 是有限集合 A 上的一个等价关系，当_____时，从 A 到 A/R 存在双射。
9. 设 G 是 n 阶无向简单图，若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 v_i, v_j，均有____________，则 G 中存在哈密顿路。
10. 若连通平面图 G 有 4 个结点，3 个面，则 G 有_________条边。

二、判断题（每小题 2 分，共 20 分，正确的划√，错误的划×）

1. 命题“如果 1+2=3，那么 2+3=5”是真命题。
2. 设 A, B, 为非空集合，则 $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$。
3. 若 R 是集合 A 上的传递关系，则 R^{-1} 也是集合 A 上的传递关系。
4. 两个可数集的笛卡儿积是可数集。
5. 全序关系一定存在最小元和最大元。
6. 对阶为素数的群 G，必存在 $a\in G$ 使得 $G=\langle a\rangle$。
7. 有界格一定是有补格，此命题的逆命题不成立。
8. 有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 是单向连通的且每个顶点的入度都等于出度。
9. 设 G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m>n-1$。
10. 任何平面图都是 5-可着色的。

三、选择题（每题 2 分，共 20 分）

1. 设 p：天下大雨，q：他乘班车上班，命题：“除非天下大雨，否则他乘班车上班”的符号化是（）

A. $\neg q\to p$ B. $\neg p\to q$ C. $q\to p$ D. $p\to q$

2. 下列公式是重言式的是（）

A. $p\to(p\vee q)$ B. $(p\vee\neg p)\to q$ C. $q\wedge\neg q$ D. $p\to\neg q$

3. 设 A 是正整数集，$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x+3y=12\}$，则 $R\cap(\{2,3,4,6\}\times\{2,3,4,6\})=$（）

A. $\varnothing$ B. $\{\langle 3,3\rangle\}$ C. $\{\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle\}$ D. $\{\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 9,1\rangle\}$

4. 设 $A=\{1,2,3\}$，A 上的二元关系 $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，则 S 是（）

A. 自反关系 B. 反自反关系 C. 对称关系 D. 传递关系

5. 在下列代数系统中，不是环的是（）

A. $\langle Z,+,*\rangle$，其中 Z 是整数集，+和*分别为整数加法与乘法。

B. $\langle Q,+,*\rangle$，其中 Q 为有理数集，+和*分别为有理数加法与乘法。

C. $\langle R,+,*\rangle$，其中 R 为实数集，+为实数加法，a*b=a+2b。

D. $\langle M_n(R),+,*\rangle$，其中 $M_n(R)$ 为实 $n\times n$ 阶矩阵集合，+和*分别为矩阵加法与乘法。

6. 设 Q 是有理数集合，$\langle Q,*\rangle$(*为普通乘法) 不能构成_____。

A. 群 B. 独异点 C. 半群 D. 交换半群

7. 下列整数集对于整除关系都构成偏序集，而能构成格的是（）

A. $\{1,2,3,4,5\}$ B. $\{1,2,3,6,12\}$ C. $\{2,3,7\}$ D. $\{1,2,3,7\}$

8. 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且（）

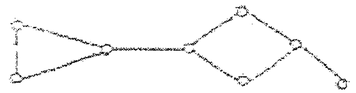
A. G 中各顶点的度数均相等 B. G 中各顶点的度数之和为偶数

C. G 中各顶点的度数均为偶数 D. G 中各顶点的度数为奇数

9. 结点数为奇数，且所有结点的度数也为奇数的连通图必定是（）

A. 欧拉图 B. 汉密尔顿图 C. 非平面图 D. 不存在的

10. 平面图（如下图所示）的三个面的次数分别是（）



A. 11，3，4　B. 11，3，5　C. 12，3，6　D. 10，4，3

四、计算题（每题 6 分，共 18 分）

1. （6 分）求命题公式 $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg(\neg p\rightarrow r)$ 的主合取范式。
2. （6 分）设关系 R={$<x,y>\mid x,y\in N$ 且 $x+3y=12$}，用列元素法表示 R，并求 dom R，ran R，R°R，R^{-1}。
3. （6 分）设无向树 T 有 3 个 3 度顶点，2 个 2 度顶点，其余顶点都是树叶，求 T 有几片树叶。

五、证明题（共 22 分）

1. （8 分）在自然推理系统中 F 中，构造下面推理的证明：

前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow\neg H(x))$

结论：$\exists xH(x)\rightarrow\exists xF(x)$

2. （8 分）$<G,\circ>$ 是个群，$u\in G$，对任意 $a,b\in G$，定义 $a*b=a\circ u^{-1}\circ b$，证明：$<G,*>$ 是一个群。

3. （6 分）证明：设 G 是连通的平面图，且每个面的次数至少为 $l(l\geq 3)$，则 G 的边数 m 与顶点数 n 有如下关系：$m\leq\dfrac{l}{l-2}(n-2)$。

装　订　线

国际关系学院2008年秋季学期离散数学A卷试题参考答案

一、填空题（每小题2分，共20分）

1．0或假

2．$p \to q$

3．1

4．2^9-5 或507

5．交换律

6．$[G:H]$

7．布尔代数

8．$R=I_A$

9．$d(v_i)+d(v_j)\ge n-1$

10．5

二、判断题（每小题2分，共20分）

1．√　2．√　3．√　4．√　5．×
6．√　7．×　8．×　9．×　10．√

三、选择题（每小题2分，共20分）

1．A　2．A　3．C　4．D　5．C
6．A　7．B　8．C　9．D　10．A

四、计算题（每小题6分，共18分）

1．$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg(\neg p\to r)$

$\Leftrightarrow(\neg(p\wedge q)\to\neg(\neg p\to r))\wedge(\neg(\neg p\to r)\to\neg(p\wedge q))$

$\Leftrightarrow((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg r))\wedge((p\vee r)\vee(\neg p\vee\neg q))$　（2分）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg r)\wedge(q\vee\neg p)\wedge(q\vee\neg r)$　（4分）

$\Leftrightarrow(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow M_1\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5$　（6分）

2．R={<0,4>,<3,3>,<6,2>,<9,1>,<12,0>}　（2分）
domR={0,3,6,9,12}
ran R={4,3,2,1,0}　（4分）
$R\circ R$={<3,3>,<12,4>}
R^{-1}={<4,0>,<3,3>,<2,6>,<1,9>,<0,12>}　（6分）

3. 设 T 中有 x 片树叶，则 T 中结点数 $n=3+2+x$，T 中边数 $m=3+2+x-1=4+x$。T 中各结点的度数之和

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=3\times3+2\times2+1\times x=13+x。\qquad（4分）$$

由握手定理可知，$13+x=2m=8+2x \Rightarrow x=5$

所以 T 中有5片树叶。（6分）

四、证明题（共22分）

1. 本题8分

① $\exists xH(x)$	附加前提引入	
② $\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入	
③ $H(c)$	①EI	
④ $F(c)\vee G(c)$	②UI	（3分）
⑤ $\forall x(G(x)\rightarrow\neg H(x))$	前提引入	
⑥ $G(c)\rightarrow\neg H(c)$	⑤UI	
⑦ $\neg G(c)$	③⑥拒取式	（6分）
⑧ $F(c)$	④⑦析取三段论	
⑨ $\exists xF(x)$	⑧EG	（8分）

2. 本题8分

证明：

（1）显然G关于$*$运算是封闭的。（2分）

（2）任取a，b，c∈G，有

$(a*b)*c = (a\circ u^{-1}\circ b)*c = (a\circ u^{-1}\circ b)\circ u^{-1}\circ c = a\circ u^{-1}\circ b\circ u^{-1}\circ c$

$a*(b*c) = a*(b\circ u^{-1}\circ c) = a\circ u^{-1}\circ(b\circ u^{-1}\circ c) = a\circ u^{-1}\circ b\circ u^{-1}\circ c$

结合律成立。（4分）

（3）$a*u = a\circ u^{-1}\circ u = a$，$u*a = u\circ u^{-1}\circ a = a$，所以单位元是u，（6分）

（4）$a*(u\circ a^{-1}\circ u) = a\circ u^{-1}\circ u\circ a^{-1}\circ u = u$，$(u\circ a^{-1}\circ u)*a = u\circ a^{-1}\circ u\circ u^{-1}\circ a = u$

所以，a的逆元是 $u\circ a^{-1}\circ u$，

综上可知，$<G,*>$是一个群。

证毕。（8分）

3. 本题6分

证明：设G共有r个面，由定理

$$2m=\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)\ge l\cdot r \qquad (1) \qquad（2分）$$

由欧拉公式可知

$$r=2+m-n \qquad (2) \qquad（4分）$$

将（2）带入（1）得 $2m\ge l(2+m-n)$，整理得 $m\le\frac{l}{l-2}(n-2)$。

证毕。（6分）

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2008 年 秋季 学期）

课程编号： 06020020 课程名称： 离散数学（A 卷）

一、 填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 令 p：小刘怕吃苦，q：小刘钻研。命题“小刘既不怕吃苦，又很钻研。”的符号化形式为________。
2. 设 F(x)：x 是无理数，Q(x)：x 能表示成分数，则命题“没有能表示成分数的无理数”可符号化为________。
3. 设个体域 D={a, b, c}，消去公式 $\exists xF(x)\rightarrow\forall yG(y)$ 中的量词后为________。
4. 函数 f 存在反函数的条件是________。
5. 无限循环群只有________个生成元。
6. 设 G=<a>为 12 阶循环群，则 G 的 4 阶子群为________。
7. 设 P 是命题 $(a\vee b)\wedge c\leqslant c$，P 的对偶命题是________。
8. 设 L 为钻石格，则 L 有________个 2 元子格。
9. 有限布尔代数的基数都是________的幂。
10. n 阶连通图 G 的生成树的边数 m=________。

二、判断题（每小题 2 分，共 20 分，正确的划√，错误的划×）

1. 陈述句“火星上有生命”不是命题。
2. 命题 $x\in\{x\}-\{\{x\}\}$ 是真命题。
3. 一个关系 R 可以同时不具备五种关系性质。
4. 设 N 为自然数集合，则 N 与 N×N 的基数相等。
5. 非分配格的的元素数一定大于 5。
6. 强连通的有向图都是哈密顿图。
7. 整数列(1,1,4,4,5,5)可以简单图化。
8. 二部图中的结点可由结点间的连通关系划分为两个等价类。
9. 完全图 K_n（n≥3）都是欧拉图。
10. 同构的两个图的对偶图不一定是同构的。

三、计算题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 求命题公式 $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$ 的主合取范式。
2. 设 A={2,4}，给出集合 A×A 上的恒等关系 I、一个既对称又反对称的关系 R。
3. 设无向树 T 中，有 2 个 2 度顶点，2 个 3 度顶点，1 个 4 度顶点，其余的顶点均为树叶。求 T 的阶数 n、边数 m 和树叶数 t。

四、证明题（共 45 分）

1. (8 分) 证明在幂集 P(B)中关于集合的对称差运算具有可结合性，并且交运算对对称差运算具有可分配性。
2. (8 分) 在自然推理系统 F 中构造推理的证明：

   前提：$\forall x(F(x)\vee G(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow\neg H(x))$

   结论：$\exists xH(x)\rightarrow\exists xF(x)$
3. (8 分) 设<A, R>是偏序集，在 A 定义新的关系 S：对于任意 x, y∈A，$xSy\Leftrightarrow yRx$。证明 S 是 A 上的偏序关系。
4. (8 分) 设 u 是群 G 中任意固定元素，如下定义新的运算∘：任意 a, b∈G，$a\circ b=au^{-1}b$。证明 G 关于∘运算构成群。
5. (8 分) 设 $f:R\times R\rightarrow C$，其中 R, C 分别表示实数集和复数集，$f(\langle x,y\rangle)=x+iy$，$i^2=-1$，证明 f 是双射函数。
6. (5 分) 设 G 是无向简单图，$\delta(G)\geq 2$，证明 G 中存在长度大于或等于 $\delta(G)+1$ 的圈(无重复结点)。

离散数学2007级A卷试题参考答案

一、填空题（每小题2分，共20分）

1. $\neg p\wedge q$　　2. $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$
3. $(F(a)\vee F(b)\vee F(c))\rightarrow(G(a)\wedge G(b)\wedge G(c))$　　4. f是双射的
5. 2　　6. $\langle a^3\rangle=\langle e, a^3, a^6, a^9\rangle$
7. $(a\wedge b)\vee c\geq c$　　8. 7
9. 2　　10. n-1

二、判断题（每小题2分，共20分，正确的划√，错误的划×）

1. ×　2. √　3. √　4. √　5. ×
6. ×　7. ×　8. ×　9. ×　10. √

三、计算题（每小题5分，共15分）

1. $M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$
2. $I=\{\langle\langle 2,2\rangle,\langle 2,2\rangle\rangle, \langle\langle 2,4\rangle,\langle 2,4\rangle\rangle, \langle\langle 4,2\rangle,\langle 4,2\rangle\rangle, \langle\langle 4,4\rangle,\langle 4,4\rangle\rangle\}$
   $R\subseteq I$
3. $2m=2n-2=2*2+2*3+1*4+(n-5)*1=9+n$
   解出 n=11，m=10，t=11-5=6。

四、证明题（共45分）

1.（8分）

设集合 $D,E,F\in P(B)$　　（1分）

(1) 证明对称差运算具有可结合性　　（4分）

$(D\oplus E)\oplus F=((D\oplus E)\cap\sim F)\cup(\sim(D\oplus E)\cap F)$

$=[((D\cap\sim E)\cup(\sim D\cap E))\cap\sim F]\cup[\sim((D\cap\sim E)\cup(\sim D\cap E))\cap F]$

$=(D\cap\sim E\cap\sim F)\cup(\sim D\cap E\cap\sim F)\cup[\sim(D\cap\sim E)\cap\sim(\sim D\cap E)\cap F]$

$=(D\cap\sim E\cap\sim F)\cup(\sim D\cap E\cap\sim F)\cup[(\sim D\cup E)\cap(D\cup\sim E)\cap F]$

但：$[(\sim D\cup E)\cap(D\cup\sim E)\cap F]$

$=[(\sim D\cap D)\cup(E\cap D)\cup(\sim D\cap\sim E)\cup(E\cap\sim E)]\cap F$

$=[\phi\cup(D\cap E)\cup(\sim D\cap\sim E)\cup\phi]\cap F=(D\cap E\cap F)\cup(\sim D\cap\sim E\cap F)$

故：$(D\oplus E)\oplus F=((D\oplus E)\cap\sim F)\cup(\sim(D\oplus E)\cap F)$

$=(D\cap\sim E\cap\sim F)\cup(\sim D\cap E\cap\sim F)\cup(D\cap E\cap F)\cup(\sim D\cap\sim E\cap F)$

同理：$D\oplus(E\oplus F)=((D\oplus E)\cap\sim F)\cup(\sim(D\oplus E)\cap F)$

$=(D\cap\sim E\cap\sim F)\cup(\sim D\cap E\cap\sim F)\cup(D\cap E\cap F)\cup(\sim D\cap\sim E\cap F)$

因此，$(D\oplus E)\oplus F=D\oplus(E\oplus F)$

所以对称差运算具有结合性。

(2) 证明交运算对对称差运算具有可分配性　　（3分）

$D\cap(E\oplus F)=D\cap((E\cap\sim F)\cup(\sim E\cap F))=(D\cap E\cap\sim F)\cup(D\cap\sim E\cap F))$

$(D\cap E)\oplus(D\cap F)=((D\cap E)\cap\sim(D\cap F))\cup(\sim(D\cap E)\cap(D\cap F))$

$=(D\cap E\cap\sim F)\cup(D\cap\sim E\cap F))$

因此，$D\cap(E\oplus F)=(D\cap E)\oplus(D\cap F)$

同理，$(E\oplus F)\cap D=(E\cap D)\oplus(F\cap D)$

所以交运算对对称差运算具有可分配性。

2. (8 分)

① $\exists x H(x)$ 附加前提引入

② $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 前提引入

③ $H(c)$ ①EI

④ $F(c) \vee G(c)$ ②UI

⑤ $\forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$ 前提引入

⑥ $G(c) \rightarrow \neg H(c)$ ⑤UI

⑦ $\neg G(c)$ ③⑥拒取式

⑧ $F(c)$ ④⑦析曲三段论

⑨ $\exists x F(x)$ ⑧EG

3. (8 分)

(1) $\forall x \in A \Rightarrow xRx \Leftrightarrow xSx$，S 是自反的。

(2) $\forall x, y \in A$， $xSy \wedge ySx \Leftrightarrow xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$，S 是反对称的。

(3) $\forall x, y, z \in A$， $xSy \wedge ySz \Leftrightarrow xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \Rightarrow xSz$，S 是传递的。

综上，S 是 A 上的偏序关系。

4. (8 分)

(1) 易见 G 关于$\circ$运算是封闭的。(2 分)

(2) 任取 a，b，c∈G，有 (2 分)

$(a \circ b) \circ c = (au^{-1}b) \circ c = (au^{-1}b)u^{-1}c = au^{-1}bu^{-1}c$

$a \circ (b \circ c) = a \circ (bu^{-1}c) = au^{-1}(bu^{-1}c) = au^{-1}bu^{-1}c$

结合律成立。

(3) 单位元是 u，因为 $a \circ u = au^{-1}u = a$， $u \circ a = uu^{-1}a = a$ (2 分)

(4) a 的逆元是 $ua^{-1}u$，因为 $a \circ (ua^{-1}u) = au^{-1}ua^{-1}u = u$，$(ua^{-1}u) \circ a = ua^{-1}uu^{-1}a = u$。 (2 分)

综上，G 关于$\circ$运算构成群。

5. (8 分)

(1) 任取$\langle x, y\rangle$和$\langle u, v\rangle$

$f(\langle x, y\rangle) = f(\langle u, v\rangle) \Rightarrow =x+iy=u+iv \Rightarrow x=u \wedge y=v \Rightarrow \langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle$。

从而 f 是单射的。(4 分)

(2) 任取 $u+iv \in C$，存在$\langle u, v\rangle \in R \times R$，且 $f(\langle u, v\rangle)=u+iv$，从而 f 是满射的。 (4 分)

综上，f 是双射函数。

6. (5 分)

设Γ：$v_0v_1 \ldots v_l$ 为极大路径，则 $l \geq \delta(G)$，(2 分) 由极大路径的性质以及简单图的定义可知，v_0 要达到其度数 $d(v) \geq \delta(G)$，必须与Γ上至少 $\delta(G)$ 个顶点相邻，设其为 $v_0=v_1$，v_{i2}，…，v_{is} 在Γ上且与 v_0 相邻，于是圈 $v_0v_{i1} \ldots v_{i2} \ldots v_{i\delta}v_0$ 长度大于或等于 $\delta(G)+1$，式中的 δ 即为 $\delta(G)$。(3 分)

班级：________　　学号：________　　姓名：________

装　订　线

哈尔滨工程大学本科生考试试卷

（ 2007 年 秋季 学期）

课程编号： 06020020　　课程名称： 离散数学（A 卷）

一、　填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 令 p：我有时间，q：天不下雨，r：我将去逛街。命题“当我有时间且天不下雨时，我将去逛街。”的符号化形式为________。
2. 设 $P(x)$：x 是实数，$Q(x)$：x 是有理数，则命题“某些实数是无理数”可符号化为________。
3. 设集合 $A=\{a,b\}, B=\{1,2\}$，则 $A\times B=$________。
4. 设 $A=\{1,-1\}$，则 A 关于普通加法、减法、乘法、除法四种运算中________运算是封闭的。
5. 已知集合 A 和 B，且 $|A|=n, |B|=m$。则 A,B 之间有________个二元关系。
6. 设 G 为群，$a\in G$，且 $|a|=r$。设 k 是整数，则 $a^k=e$（e 是单位元）当且仅当________。
7. 设 $<R,+,\circ>$ 是代数系统，＋和 $\circ$ 是二元运算，如果满足以下条件：(1)________，(2) $<R,\circ>$ 构成半群，(3) $\circ$ 运算关于＋运算适合分配律，则称 $<R,+,\circ>$ 是一个环。
8. 如果 $<S,*,\circ>$ 是代数系统，$*$ 和 $\circ$ 是二元运算，如果 $*$ 和 $\circ$ 满足________，结合律和吸收律，则 $<S,*,\circ>$ 构成一个格。
9. n 阶有向完全图的边数为________。
10. 对于任意的连通的平面图 G，n,m,r 分别为 G 的顶点数、边数和面数，则关于 n,m,r 的欧拉公式为________。

二、判断题（每小题 2 分，共 20 分，正确的划 √，错误的划×）

1. 命题“只有雪是黑色的，2 才是素数”的真值是 1。
2. 设 $A(x)$ 是任意的含自由出现个体变项 x 的公式，B 中不含 x 的出现，则 $\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow \forall xA(x)\to B$。
3. 设 R_1,R_2 是非空集合 A 上关系，若 R_1,R_2 都具有对称性，则 $R_1\circ R_2$ 也具有对称性。
4. 两个可数集的并是可数集。
5. 设 $X=\{a,b,c,d\}$，$Y=\{1,2,3\}$，$f=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}$，则 f 是从 X 到 Y 的满射，但不是单射。

6. 设 G 为群，H 是 G 的非空子集，则 H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a,b\in H$ 有 $ab\in H$。
7. L 是分配格的充要条件是 L 中含有与钻石格或五角格同构的子格。
8. 有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 是强连通的且每个顶点的入度都等于出度。
9. 设 T 是 n 阶无向树，则 T 中至少有两片树叶。
10. 若 G 是平面图，则 G 的任何子图都是平面图。

三、计算题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 求命题公式 $(p\to(q\to r))\leftrightarrow(r\to(q\to p))$ 的主合取范式。
2. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 上的二元关系为：
   $R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>,<d,a>,<d,b>,<d,c>\}$
   (1) 写出 R 的关系矩阵；
   (2) 说明 R 是否是自反的、反自反的、对称的。
3. 已知一棵无向树 T 有 4 度、3 度、2 度结点各一个，其余是 1 度结点。求 T 中有几个 1 度结点？

四、证明题（共 45 分）

1. (8 分) 设 A,B,C 是非空集合，证明 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。
2. (8 分) 利用推理规则证明下列推理的正确性：
   前提：$\forall x(F(x)\to\neg G(x)), \forall x(G(x)\vee H(x)), \exists x\neg H(x)$。
   结论：$\exists x\neg F(x)$。
3. (8 分) 设 R 是 A 上的自反和传递关系，如下定义 A 上的关系 T，使得对任意 $x,y\in A$，
   $$<x,y>\in T\Leftrightarrow <x,y>\in R\wedge <y,x>\in R$$
   证明：T 是 A 上的等价关系。
4. (8 分) $<G,*>$ 是一个群，取 $u\in G$，对于任意 $g_1,g_2\in G, g_1\otimes g_2=g_1*u^{-1}*g_2$，证明：$<G,\otimes>$ 是一个群。
5. (8 分) 设 $f:A\to B, g:B\to A$，且 $f\circ g=I_A$，证明：f 是单射的，g 是满射的。
6. (5 分) 设图 G 中有 9 个结点，每个结点的度不是 5 就是 6。证明 G 中至少有 5 个 6 度结点或至少有 6 个 5 度结点。

2006级离散数学A卷试题参考答案

一、填空题（每小题2分，共20分）

1．$p \wedge q \to r$　　2．$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

3．$\{<a,1>,<a,2>,<b,1>,<b,2>\}$　　4．乘法和除法

5．2^{mn}　　6．$r \mid k$

7．$<R,+>$构成交换群　　8．交换律

9．$n(n-1)$　　10．$n-m+r=2$

二、判断题（每小题2分，共20分）

1．×　2．×　3．×　4．√　5．×
6．×　7．×　8．√　9．×　10．√

三、计算题（每小题5分，共15分）

1．本题5分

$$(p \to (q \to r)) \leftrightarrow (r \to (q \to p))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \leftrightarrow (\neg r \vee \neg q \vee p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee (\neg r \vee \neg q \vee p)) \wedge (\neg(\neg r \vee \neg q \vee p) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r))$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge q \wedge \neg r) \vee p \vee \neg q \vee r) \wedge ((\neg p \wedge q \wedge r) \vee \neg p \vee \neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow M_3 \wedge M_6$$

2．本题5分

(1) $M(R)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；

(2) 由于对角线元素有0有1，故R不是自反的（1分），也不是反自反的。由于矩阵不对称，故R不是对称的。

3．本题5分

设T中有x个1度结点，边数为m，$m=3+x-1=2+x$。T中各结点的度数之和

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 4+3+2+x = 9+x = 2m\text{。}$$

解得：$m=7, x=5$

所以T中有五个 1 度结点。

四、证明题（共 45 分）

1．本题 8 分

任取 $<x,y>$

$$\begin{aligned}
&<x,y> \in A\times(B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup C\\
&\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \vee y\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\\
&\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B \vee <x,y>\in A\times C\\
&\Leftrightarrow <x,y>\in (A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}$$

所以有 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

2. 本题 8 分

① $\exists x\neg H(x)$	前提引入
② $\neg H(a)$	①EI 规则
③ $\forall x(G(x)\vee H(x))$	前提引入
④ $G(a)\vee H(a)$	③UI 规则
⑤$G(a)$	②④析取三段论
⑥ $\forall x(F(x)\to\neg G(x))$	前提引入
⑦ $F(a)\to\neg G(a)$	⑥UI 规则
⑧ $\neg F(a)$	⑤⑦拒取式规则
⑨ $\exists x\neg F(x)$	⑧EG 规则

3．本题 8 分

(1) $\forall x$, $x\in A\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R\wedge\langle x,x\rangle R\Rightarrow\langle x,x\rangle\in T$，T 是自反的。

(2) $\forall x,y\in A$，$\langle x,y\rangle\in T\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in R\Rightarrow\langle y,x\rangle\in T$，T 是对称的。

(3) $\forall x,y,z\in A$，$\langle x,y\rangle\in T\wedge\langle y,z\rangle\in T$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\wedge\langle z,y\rangle\in R$

$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\wedge\langle z,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R$

$\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle z,x\rangle\in R$

$\Rightarrow\langle x,z\rangle\in T$，T 是传递的。

综上可知，T是等价关系。

4．本题8分

(1)封闭性。因为$*$运算具有封闭性，有$g_1 \otimes g_2 = g_1 * u^{-1} * g_2 \in G$，即$\otimes$运算具有封闭性。

(2)结合性。对于$\forall g_1, g_2, g_3 \in G$，

$$\begin{aligned}&(g_1 \otimes g_2) \otimes g_3 = (g_1 * u^{-1} * g_2) * u^{-1} * g_3\\&= g_1 * u^{-1} * (g_2 * u^{-1} * g_3)\\&= g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3)\end{aligned}$$

即$\otimes$运算具有结合性。

(3)幺元。存在元素$u \in G$，使得对于任意元素$g \in G$，有

$g \otimes u = g * u^{-1} * u = g = u * u^{-1} * g = u \otimes g = g$即$u$是$\otimes$运算的幺元。

(4)逆元。对于任意元素g，存在元素$g' = ug^{-1}u$，使得

$g \otimes g' = g' \otimes g = u$，即$ug^{-1}u$是元素关于$\otimes$运算的逆元。

综上可知，$<G, \otimes>$是一个群。

5．本题8分

(1)假设$f(x_1)=f(x_2)$，由$f^\circ g=I_A$，有$g(f(x))=x$。从而有

$x_1=g(f(x_1))=g(f(x_2))=x_2$

即证明了f是单射的。

(2)任取$x\in A$，由于f是从A到B的函数，存在$y\in B$，使得$f(x)=y$。由$f^\circ g=I_A$有

$g(f(x))=x \Rightarrow g(y)=x$

因此g是满射的。

6．本题5分

由握手定理的推论可知，G中5度结点数只能是0,2,4,6,8五种情况，此时6度结点分别为9,7,5,3,1，以上五种情况都满足至少5个6度结点或至少6个5度结点的情况。

班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

哈尔滨工程大学试卷

考试科目：离散数学（2005 级 A 卷）

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							
评卷人							

一、 填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 令 p：我将去看电影，q：我有时间。命题“我将去看电影，仅当我有时间。”的符号化形式为________。
2. 设个体域为自然数集，$P(x)$：x 是奇数，$Q(x)$：x 是偶数，则命题“不存在既是奇数又是偶数的自然数”可符号化为________。
3. 设集合 A 的基数 $|A|=10$，则其幂集的基数 $|P(A)|=$________。
4. 集合 A 上有 4 个元素，则 A 上不同的等价关系的个数为________。
5. 群 G 的平凡子群是________。
6. 设 G 是有限群，H 是 G 的子群，则 $|G|=$____$\circ[G:H]$。
7. 如果一个格是________格，则称它为布尔格或布尔代数。
8. 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通图，且 G 中没有________。
9. T 是 n 阶 m 条边的无向连通图 G 的生成树，则 T 的余树 $\overline{T}$ 中含有________条边。
10. 平面图 G 中面的次数 R_i 与边数 m 的关系是________。

二、判断题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 命题“如果 1+2=4，那么 2+3=5”是真命题。
2. 若 $A-B\subseteq B$，那么 $B\subseteq A$。
3. 若 R 是集合 A 上的传递关系，则 R^2 也是集合 A 上的传递关系。
4. $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 的基数不同。
5. 任何有穷集只与惟一的自然数等势。
6. 在一个代数系统中，若一个元素的逆元是惟一的，则运算必定是可结合的。
7. 设 $<G,*>$ 是独异点，e 是单位元，若对任意的 $a\in G$，有 $a*a=e$，则 $<G,*>$ 是 $Abel$ 群。
8. 集合 B 的幂集 $P(B)$ 关于集合的对称差运算和交运算构成环。
9. 设 D 是 n 阶有向图，D 是强连通的当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的通路。

10. 无向图 G 具有生成树当且仅当 G 是连通图。

三、计算题（每小题各 5 分，共 15 分）

1. 求命题公式 $\neg((p\to q)\wedge(r\to p))\vee\neg((r\to\neg q)\to\neg p)$ 的主析取范式。
2. 集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 中有关系 $R=\{<a,a>,<a,b>,<b,d>\}$，$S=\{<a,d>,<b,c>,<b,d>,<c,b>\}$，试给出 $((R\circ S)^{-1})^2$ 的关系矩阵。
3. 已知一棵无向树 T 有三个 3 度结点，一个 2 度结点，其余的都是 1 度结点。试求出 T 中有几个 1 度结点？

四、证明题（共 45 分）

1. （8 分）用等值演算法证明 $\neg p\wedge\neg(p\to q)$ 是矛盾式。
2. （8 分）利用推理规则证明下列推理的正确性：

   每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车，每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车。有的人不喜欢骑自行车，因而有的人不喜欢步行。
3. （8 分）设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 上的二元关系为：
   $R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<a,d>,<a,e>,<b,b>,<b,c>,<b,e>,<c,c>,<c,e>,<d,d>,<d,e>,<e,e>\}$，

   试证明：$<A,R>$ 是偏序关系。
4. （8 分）在整数集 Z 上定义：$a\circ b=a+b-2,\forall a,b\in Z$，试证明：$<Z,\circ>$ 是一个群。
5. （8 分）对于具有 $k(k\geq 2)$ 个连通分支的平面图 G，有
   $$n-m+r=k+1$$
   其中 n,m,r 分别为 G 的顶点数，边数和面数。
6. （5 分）设 $G=<V,E>$ 是连通图且 $e\in E$，试证明：当且仅当 e 是 G 的割边时，e 包含在 G 的每棵生成树中。

离散数学2005级A卷试题答案

一、填空题（每小题2分，共20分）

1. $p \to q$

2. $\neg \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

3. 2^{10} 或1024

4. 15

5. $G, |e|$

6. $|H|$

7. 有补分配

8. 奇度顶点

9. $m-n+1$

10. $\sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) = 2m$

二、判断题（每小题2分，共20分）

1. √	2. ×	3. √	4. ×	5. √
6. ×	7. √	8. √	9. ×	10. √

三、计算题（每小题5分，共15分）

1．解:

$$\neg((p \to q) \wedge (r \to p)) \vee \neg((r \to \neg q) \to \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee p)) \vee \neg(\neg(\neg r \vee \neg q) \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r)) \vee ((\neg q \vee \neg r) \wedge p)$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r)) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

或者 $m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$

2．解:

$$M(R)=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix},\quad M(s)=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix},\quad M(R\circ S)=\begin{vmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$M((R\circ S)^{-1})=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix},\quad M(((R\circ S)^{-1})^2)=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}$$

3．解：

设 T 中有 x 个 1 度结点，则 T 中结点数 $n=3+1+x$，T 中边数 $m=3+1+x-1=3+x$。T 中各结点的度数之和

$\sum\limits_{i=1}^{n} d(v_i)=3\times3+2\times1+1\times x=11+x$。由握手定理可知

$11+x=2m=6+2x\Rightarrow x=5$

所以 T 中有五个 1 度结点。

四、证明题（共 45 分）

1．本题 8 分

证明：

$\neg p\wedge\neg(p\to q)$

$\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\wedge(p\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge p)\wedge\neg q\Leftrightarrow 0$

所以上式是矛盾式，

证毕。

2．本题 8 分

命题符号化：$F(x)$:x 喜欢步行；$G(x)$:x 喜欢坐汽车；$H(x)$:x 喜欢骑自行车。

前提：$\forall x(F(x)\to\neg G(x))$，$\forall x(G(x)\vee H(x))$，$\exists x(\neg H(x))$

结论：$\exists x(\neg F(x))$

证明：

① $\exists x(\neg H(x))$ 前提引入

② $\neg H(c)$ ①EI 规则

③ $\forall x(G(x) \vee H(x))$ 前提引入

④ $G(c) \vee H(c)$ ③UI 规则

⑤ $G(c)$ ②④析取三段论

⑥ $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$ 前提引入

⑦ $F(c) \rightarrow \neg G(c)$ ⑥UI 规则

⑧ $\neg F(c)$ ⑤⑦析取三段论

⑨ $\exists x(\neg F(x))$ ⑧EG 规则

3．本题 8 分

解：

R 所对应的关系矩阵为：

$$M(R)=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}$$，由关系矩阵可知，对角线上所有元素全为 1，故 R 具有自反性；又由 $r_{ij}+r_{ji}\le 1$，故 R 具有反对称性；可计算出 R^2 对应的矩阵为：

$$M(R^2)=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=M(R)$$

由以上可知 R 具有传递性。

综上可知，R 是偏序关系。

证毕。

4．本题 8 分

证明：

显然，$\circ$ 是二元运算，根据群的定义，需证 $\circ$ 运算满足结合律，有单位元，每个元素有逆元。

（1）任取 $a,b,c\in Z$ 有

$$(a\circ b)\circ c=a\circ b+c-2=(a+b-2)+c-2$$
$$=a+b+c-4$$

$a\circ(b\circ c)=a+b\circ c-2=a+(b+c-2)-2$
$=a+b+c-4$

故$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$，结合律成立。

（2）任取$a\in Z$，$a\circ 2=a+2-2=a$；$2\circ a=2+a-2=a$，可知 2 为单位元。

（3）任取$a\in Z$，由$a\circ(4-a)=a+4-a-2=2$，$(4-a)\circ a=4-a+a-2=2$可知$4-a$是a的逆元。

综上可知<Z, *>是一个群。

证毕。

5. 本题 8 分

证明：

设G的连通分支分别为$G_1,G_2,\cdots,G_k$，并设G_i的顶点数，边数，面数分别为$n_i,m_i,r_i,i=1,2,\cdots,k.$由欧拉公式可知

$$n_i-m_i+r_i=2,i=1,2,\cdots,k. \qquad (5.1)$$

易知，$m=\sum_{i=1}^{k}m_i,n=\sum_{i=1}^{k}n_i$，由于每个$G_i$有一个外部面，而$G$只有一个外部面，所以$G$的面数$r=\sum_{i=1}^{k}r_i-k+1$，于是，对式（5.1）两边同时求和得

$$2k=\sum_{i=1}^{k}(n_i-m_i+r_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}n_i-\sum_{i=1}^{k}m_i+\sum_{i=1}^{k}r_i$$
$$=n-m+r+k-1$$

经过整理得

$n-m+r=k+1$。

证毕。

6. 本题 5 分

证明：

必要性：假设边e包含在G的每棵生成树中但不是割边，从G中删去e得到G_1仍是连通的且是G的生成子图，G_1必有一棵生成树T，而T也是G的生成树

但不包含e，这与假设矛盾，故e必是割边。

充分性：设e是G的割边，若删去e，则得到两个连通分支G_1,G_2，而G的任一棵生成树T必是连通的，故连结G_1,G_2的惟一边e必在T中。

证毕。