1.5章　递归方程的渐进性

递归方程的渐进性

- 合并排序的复杂性

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=1 \\ 2T(n/2)+O(n) & n>1 \end{cases}$$

解决方法

- Substitution方法(代入法):
  - 对时间复杂度进行预测, 将预测结果代入递归方程，如果不产生矛盾，那么可能是解
  - 然后用归纳法证明.
- Recursion-tree方法(递归树法):
  - 把递归方程用树的形式展开
  - 然后用估计和的方法来求解.
- Master方法(主定理法):
  - 求解型为$T(n)=aT(n/b)+f(n)$的递归方程

Substitution方法

$$T(n) = 4T(n/2) + O(n)$$

预测时间复杂度为$O(n^2)$，即 $T(n) = c\,n^2$，代入递归方程：

左边$=cn^2$

右边$=4c\left(n/2\right)^2 + O(n) = cn^2$

左右相等，预测成立.

利用归纳法证明。

Substitution方法

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

（1）猜测 n^2 和 n，均不行，猜测nlogn

左边 = c n logn

右边 = 2c n/2 log n/2 = c n (logn - 1) = c n log n

左右相等，可能是解，用归纳法证明。

（2）根据几个已知的计算结果来猜

T(2) = 2 T(1) + 2 = 2 = 2 log 2

T(4) = 2 T(2) + 4 = 8 = 4 log 4

T(8) = 2 T(4) + 8 = 24 = 8 log8

…

T(n) = n logn

Substitution方法

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

假设：猜测是正确的

证明：存在常数 c 和 N，使得所有$n \geq N$，$T(n) \leq c(n\log n)$。

假设结论对于n/2成立。

$T(n) = 2T(n/2)+n \leq cn\log(n/2)+n \leq cn\log n - cn + n$

$= cn\log n + (1-c)\, n$

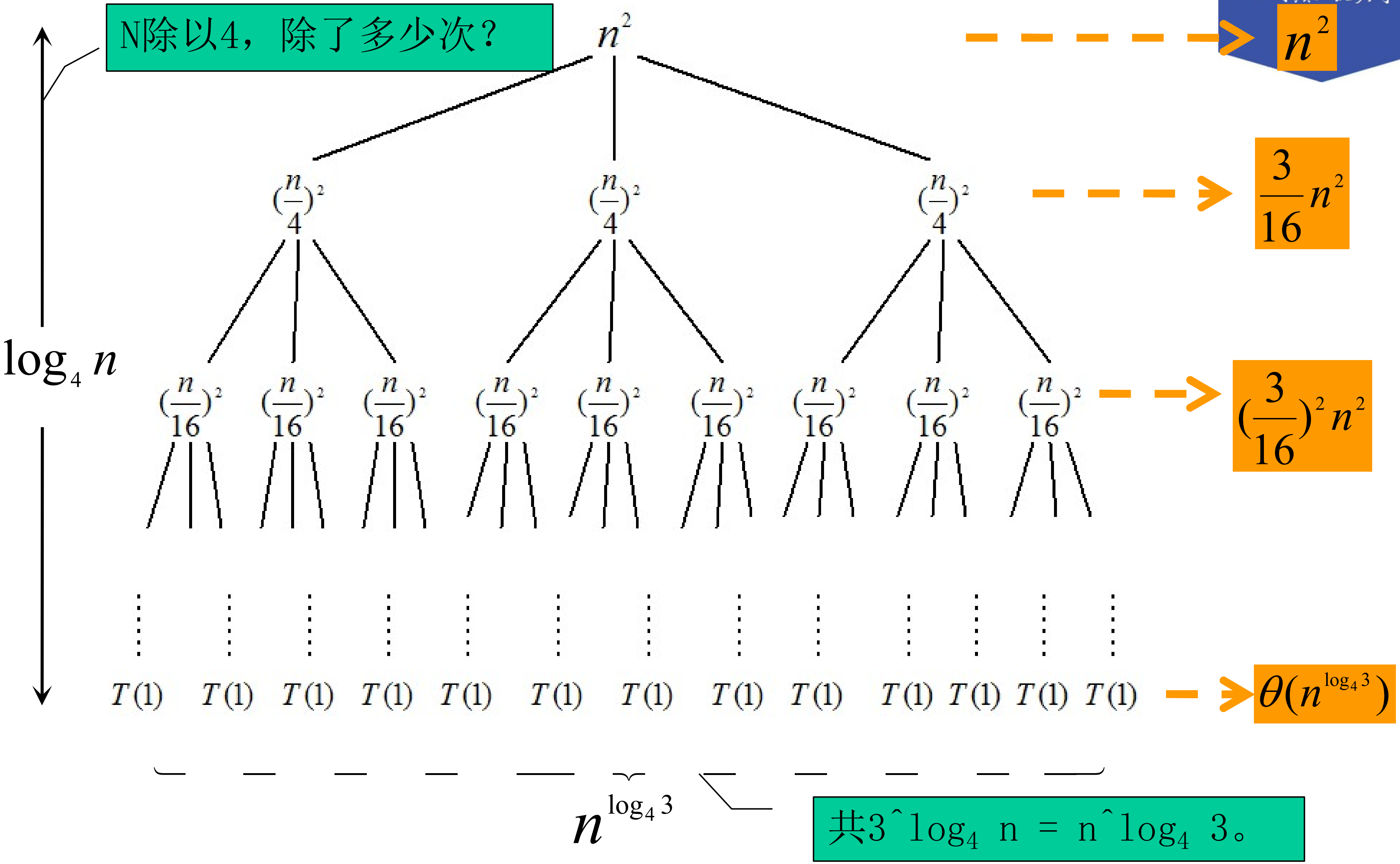
当 $c \geq 1$ 时，得 $T(n) \leq c(n\log n)$.

所以，结论对于n成立。

Recursion-tree方法

- 以树的形式循环地展开递归方程
- 把递归方程转化为和式
- 然后使用求和技术求解

例：$T(n) = n^2 + 3T(\frac{n}{4})$



例： $T(n) = n^2 + 3T(\frac{n}{4})$

$$T(n) = n^2 + \frac{3}{16}n^2 + (\frac{3}{16})^2 n^2 + \ldots + (\frac{3}{16})^{\log_4 n - 1} n^2 + \theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i n^2 + \theta(n^{\log_4 3})$$

$$< \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{16})^i n^2 + \theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{1}{1-(3/16)} n^2 + \theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{16}{13} n^2 + \theta(n^{\log_4 3}) \qquad = O(n^2)$$

Recursion-tree方法

$$T(n)=n^2+3T(n/4)$$

证明：假设对于$n/4$有 $T(\frac{n}{4})=O((\frac{n}{4})^2)\le cn^2/16$

$$T(n)\le n^2+\frac{3}{16}cn^2=cn^2-\frac{13}{16}cn^2+n^2$$

当$c\ge \frac{16}{13}$时 $T(n)\le cn^2$

Master方法

目的：求解 $T(n)=aT\left(n/b\right)+f(n)$ 型方程，$a\geq 1, b>0$ 是常数，

$f(n)$ 是正函数

方法：记住三种情况，则不用笔纸即可求解上述方程.

Master方法

定理 2.4.1 设$a\ge 1$和$b>1$是常数，$f(n)$是一个函数，$T(n)$是定义在非负整数集上的函数$T(n)=aT\left(n/b\right)+f(n)$．$T(n)$可以如下求解：

(1)．若$f(n)=O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$，$\varepsilon>0$是常数，则$T(n)=\theta\left(n^{\log_b a}\right)$．

(2) 若 $f(n)=\theta(n^{\log_b a})$ ， 则 $T(n)=\theta(n^{\log_b a}\log n)$

(3)若 $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$， $\varepsilon>0$ 是常数，且对于某个常数c<1和所有充分大的n有 $af(\frac{n}{b})\le cf(n)$，则

$T(n)=\theta(f(n))$

Master方法

*直观地：我们用 $f(n)$ 与 $n^{\log_b a}$ 比较

(1). 若 $n^{\log_b a}$ 大，则 $T(n)=\theta\left(n^{\log_b a}\right)$

(2). 若 $f(n)$ 大，则 $T(n)=\theta(f(n))$

(3). 若 $f(n)$ 与 $n^{\log_b a}$ 同阶，则 $T(n)=\theta\left(n^{\log_b a}\lg n\right)=\theta(f(n)\lg n)$.

更进一步:

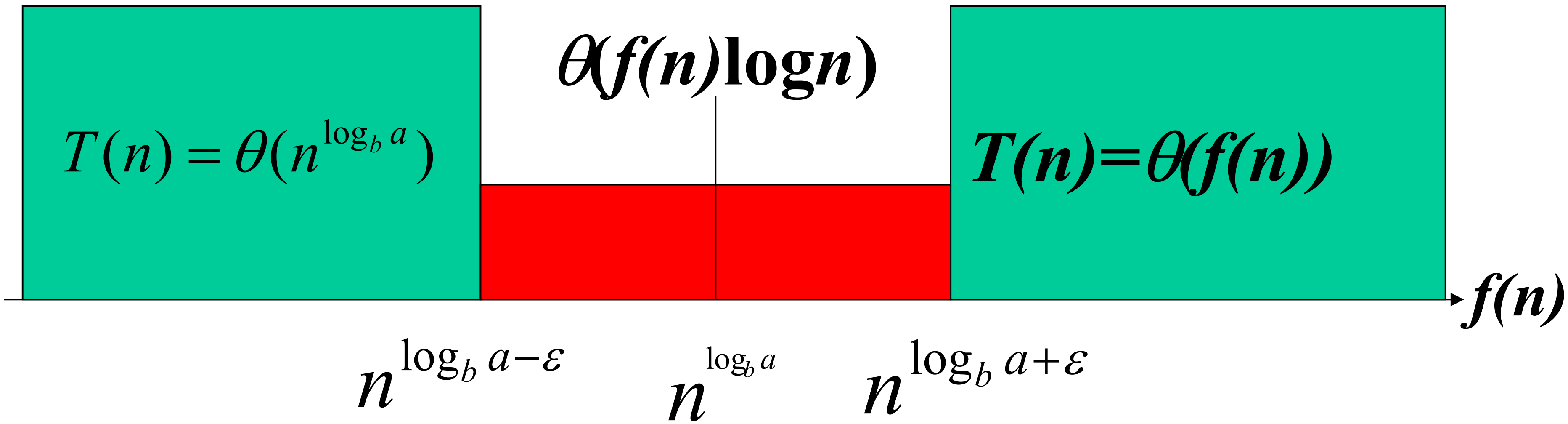
(1). 在第一种情况, $f(n)$ 不仅小于 $n^{\log_b a}$，必须多项式地小于,即对于一个常数 $\varepsilon>0$， $f(n)=O(\frac{n^{\log_b a}}{n^{\varepsilon}})$.

f(n)的上界除以一个多项式都是它上界

(2). 在第三种情况, $f(n)$ 不仅大于 $n^{\log_b a}$，必须多项式地大于，即对一个常数 $\varepsilon>0$， $f(n)=\Omega(n^{\log_b a}\cdot n^{\varepsilon})$.

f(n)的下界除以一个多项式都是它下界

Master方法



对于红色部分，Master定理无能为力

例 1. 求解 $T(n) = 9T\left(n/3\right) + n$.

$$a = 9, \quad b = 3, \quad f(n) = n, \quad n^{\log_b a} = \theta(n^2)$$

$$\because f(n) = n = O(n^{\log_b a - \varepsilon}), \quad \varepsilon = 1$$

$$\therefore T(n) = \theta(n^{\log_b a}) = \theta(n^2)$$

例 2. 求解 $T(n) = T\left(2n/3\right) + 1$.

$$a = 1, \quad b = 3/2, \quad f(n) = 1, \quad n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$$

$$\because f(n) = 1 = \theta(n^{\log_b a})$$

$$\therefore T(n) = \theta(n^{\log_b a} \log n) = \theta(\log n)$$

例3. 求解$T(n)=3T(n/4)+n\log n$

$a=3,\quad b=4,\quad f(n)=n\log n,\quad n^{\log_b a}=n^{\log_4 3}=O(n^{0.793})$

(1) $f(n)=n\log n\geq n^{\log_b a+\varepsilon},\qquad \varepsilon=0.2$

(2) 对所有n，$af(n/b)=3\times\frac{n}{4}\log\frac{n}{4}\leq 3\times\frac{n}{4}\log n=cf(n),\ c=\frac{3}{4}$

于是,$T(n)=\theta(f(n))=\theta(n\log n)$

例4. 求解$T(n)=2T(n/2)+n\log n$

$a=2,\quad b=2,\quad f(n)=n\log n,\quad n^{\log_b a}=n$

$f(n)=\Omega(n^{\log_b a})$ 但不存在$\varepsilon>0$,使得 $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

$f(n)$ 大于 $n^{\log_b a}$ ，但不多项式大于$n^{\log_b a}$ ，Master定理不适用

$$f_1(n) = n\log n \qquad f_2(n) = n^{1+\varepsilon}$$

求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\log n}{n^{1+\varepsilon}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^{\varepsilon}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{2^{\log n^{\varepsilon}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{2^{\varepsilon \log n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{2^{\varepsilon} 2^{\log n}} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{2^{m}} = 0$$

$$\log n \rightarrow n^{\varepsilon>0} \rightarrow (a>1)^n \rightarrow n!$$

$(\log n)^{k>1}$和$n^{\varepsilon>0}$比较如何？