线性代数 哈尔滨工程大学

第一章　行列式

本章主要内容:

- n 阶行列式及其性质
- n 阶行列式的计算
- 行列式按行(列)的展开
- 克拉默法则
- 行列式的相关MATLAB命令

线性代数 哈尔滨工程大学

§1.1 二、三阶行列式

本节主要内容:

- 二阶行列式
- 三阶行列式

线性代数 哈尔滨工程大学

1. 二阶行列式

【引例1】 新解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases}$$

【解】 由 $a_{22}\times① - a_{12}\times②$ 得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

由 $a_{11}\times② - a_{21}\times①$ 得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

现在定义二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\equiv a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

含义：用左边的阵式表示右边的数值 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

上式的解公式化为：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}};\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}.$$

上述公式的符号化：

$$\left(D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

【例1】 解方程组 $\begin{cases}2x+4y=1\\ x+3y=2\end{cases}$.

【解】 $D=\begin{vmatrix} 2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\times3-4\times1=2\neq0;$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-5,\qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3;$$

$$x=-\frac{5}{2},\qquad y=\frac{3}{2}.$$

2. 三阶行列式

【引例2】 新解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 & ①\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 & ②\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 & ③\end{cases}$$

【解】 用前面的公式,在方程①,②中视 x_3 为常数去解 x_1 和 x_2：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot x_1=\begin{vmatrix} b_1-a_{13}x_3 & a_{12}\\ b_2-a_{23}x_3 & a_{22}\end{vmatrix}\qquad ④,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1-a_{13}x_3\\ a_{21} & b_2-a_{23}x_3\end{vmatrix}\qquad ⑤;$$

在方程③的两边乘 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$:

$$a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}x_1 + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}x_2 + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}b_3;$$

将④,⑤两式代入上式,化简:

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})\cdot x_3\\=&(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}\\&-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32})\end{aligned}$$

[暂停: 定义三阶行列式]

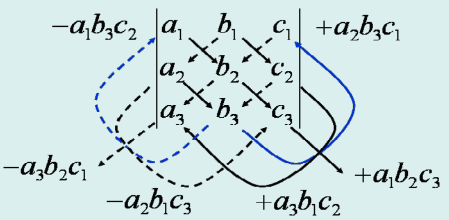
线性代数 哈尔滨工程大学

现在定义三阶行列式:

含义: 用左边的阵式表示右边的数值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{aligned}$$

计算三阶行列式的对角线法则:



线性代数 哈尔滨工程大学

[返回]

用三阶行列式改写下式:

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})\cdot x_3\\=&(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}\\&-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}),\end{aligned}$$

得到:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\cdot x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

线性代数 哈尔滨工程大学

同样可以得到:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

当 $D \neq 0$ 时,

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

3. 本章主题

【问题】 n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的解有类似的公式吗?

回答:(在特定条件下)有;但要先定义 n 阶行列式.

本章中我们的主要工作:

(1) 定义 n 阶行列式;

(2) 讨论 n 阶行列式的计算;

(3) 给出上述方程组解的类似公式.

线性代数 哈尔滨工程大学

§1.2 n 阶行列式

本节主要内容:

- n元排列的逆序数
- n元排列的奇偶性
- n 阶行列式的定义
- 行列式的转置

线性代数 哈尔滨工程大学

1. n 元排列的逆序数

为了定义 n 阶行列式,我们需要数字 $1, 2, \cdots, n$ 的全排列及它们的一个重要属性—奇偶性.

【定义1】 由数字 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列. 我们 A_n 表示一切 n元排列的集合.

$A_3 = \{123, 132, 213, 312, 321, 231\}$, A_n 有 $n!$个元素.

【定义2】 设 $p_1 p_2 \cdots p_n \in A_n$, 若 $p_i > p_j \ (i < j)$, 则称数对 $p_i p_j$ 为此排列中的一个逆序对. 排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中所有逆序对的个数称为此排列的逆序数,记为

$$\tau(p_1 p_2 \cdots p_n).$$

线性代数 哈尔滨工程大学

例如, 排列2431中的所有逆序对有 :

$$31, \quad 41, \quad 21, \quad 43; \quad \tau(2431) = 4.$$

【逆序数的计算】

在 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中, 若数字 i 的前面(左边)有 t_i 个数字大于 i, 则

$$\tau(p_1 p_2 \ldots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} + t_n \ (t_n = 0).$$

例如, $\tau(12\ldots n) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0;$

$$\tau(n\ldots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. n 元排列的奇偶性

【定义3】 若 $\tau(p_1 p_2 \ldots p_n)$ 为偶数, 则称排列 $p_1 p_2 \ldots p_n$ 偶排列; $\tau(p_1 p_2 \ldots p_n)$ 为奇数, 则称此排列为奇排列.

线性代数 哈尔滨工程大学

对换与相邻对换：在一个排列中对调其中的两个数字，而保持其余的数字不变，这种过程称为对换；对换两个相邻的数字称为相邻对换.

【定理1.1】 对换改变排列的奇偶性.

【证明】 我们仅用实例说明证明的原理：

(1) 652413→654213：逆序数加1；

(2) 654213→652413：逆序数减1；

(3) 645132→625134 (相隔 3 个数) (分解为下面两步)：

645132→654132→ 651432 → 651342 → 651324

(3 + 1次相邻对换)；

651234→652134→ 625134

(3次相邻对换) (共用 2×3 +1 次)

线性代数 哈尔滨工程大学

3. *n* 阶行列式的定义

我们先观察三阶行列式的特点：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

(1) 行列式为 3! 个单项式的和(每一个3元排列都 对应一项)，每个单项式为 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{p_3}$；

(2) 所有单项式的列指标排列为1, 2, 3的所有全排列；

(3) 当排列 $p_1p_2p_3$ 为123, 231, 312时，单项式的系数为 +1，123, 231, 312 为偶排列；

线性代数 哈尔滨工程大学

(4) 当排列 $p_1p_2p_3$ 为321, 213, 132时，单项式的系数为 −1，321, 213, 132 为奇排列.

由此观察，我们不难给出 *n* 阶行列式的定义：

【定义4】 对于 n^2 个数 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n\in A_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

为 *n* 阶行列式，简记为 $|a_{ij}|_n$，数 a_{ij} 称为第 *i* 行第 *j* 列的元素.

线性代数 哈尔滨工程大学

【评注】

(1) n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 是一个数值，在定义上它是 $n!$ 项单项式的和，其中一般项 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的每个因子来自此行列式的不同的行和不同的列，即每行每列必出且仅出一个元素.

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} (-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33} \\ +(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31} \\ +(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32} \\ +(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31} \\ +(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33} \\ +(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32} \end{cases} = \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} \\ +a_{12}a_{23}a_{31} \\ +a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} \\ -a_{12}a_{21}a_{33} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} \end{cases}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【例1】 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

【解】 在1, 2, 3, 4 中, $p_1 \neq 4$: $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} = 0$;

在1, 2, 3 中, $p_2 \neq 3$: $a_{14}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} = 0$;

在1, 2 中, $p_3 \neq 2$: $a_{14}a_{23}a_{3p_3}a_{4p_4} = 0$;

最后仅有 $p_4 = 1$: 仅有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} = 4! = 24$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【例2】 计算上三角行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

【解】

$p_n \neq n$: $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = 0$;

$p_{n-1} \neq n-1$: $a_{1p_1}\cdots a_{n-1,p_{n-1}}a_{nn} = 0$;

$\cdots\cdots$,

$p_1 \neq 1$: $a_{1p_1}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} = 0$;

最后：不同于 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ 的项必为 0;

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

同理, 下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

特别是, 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

§ 1.3 行列式的性质

本节主要内容:

- 行列式的四个重要基本性质
- 行列式的计算举例

线性代数 哈尔滨工程大学

1. 行列式的转置

转置行列式 D 为 D':

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Longrightarrow D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【行列式转置定理】 行列式 D 与其转置行列式 D' 相等.

【评注】 此性质说明行列式中行和列的地位是对称的. 在行列式的理论中, 关于行有什么结论, 对于列也有完全类似的结论.

【证明】 为了简明, 不失一般性, 假设 $n=3$.

(假设 $n=3$, 不是想通过直接计算验证)

令 $b_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,3)$, 则

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}b_{1p_1}b_{2p_2}b_{3p_3}.$$

下面我们改写此和式的一般项:

$$b_{1p_1}b_{2p_2}b_{3p_3}=a_{p_1 1}a_{p_2 2}a_{p_3 3};$$

$$\boxed{b_{1p_1}b_{2p_2}b_{3p_3}=a_{p_1 1}a_{p_2 2}a_{p_3 3}}$$

现在等值改写 $a_{p_1 1}a_{p_2 2}a_{p_3 3}$ 为 $a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}$:

此过程中行指标排列 $p_1p_2p_3$ 被调为123;

列指标排列 123 被调为 $q_1q_2q_3$.

由于调换是同步的, 故可用同样个数的相邻对换完成;

$p_1p_2p_3$ 可用 $\tau(p_1p_2p_3)$ 个相邻对换调为123;

$q_1q_2q_3$ 可用 $\tau(q_1q_2q_3)$ 个相邻对换调为123;

$$\Rightarrow \tau(p_1p_2p_3)=\tau(q_1q_2q_3).$$

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}b_{1p_1}b_{2p_2}b_{3p_3}=(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}$$

$$=(-1)^{\tau(q_1q_2q_3)}a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}$$

很明显, 当 $p_1p_2p_3$ 取遍一切 3 元排列时, $q_1q_2q_3$ 也取遍一切3元排列:

$$D'=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}b_{1p_1}b_{2p_2}b_{3p_3}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2q_3)}a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

2. 行列式的性质

为了简明，下面仅叙述行列式关于行的性，关于列也有同样的性质.这些性质在行列式的计算和理论推导中非常重要.

【性质1】 互换行列式的两行，行列式变号，绝对值不变.

【证明】 为了简明，不妨设第1行与第2行互换.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n\in A_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{2p_1}a_{1p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{p_1p_2\cdots p_n\in A_n} (-1)^{\tau(p_2p_1\cdots p_n)\pm 1} a_{1p_2}a_{2p_1}\cdots a_{np_n}$$

$$= (-1)\sum_{p_1p_2\cdots p_n\in A_n} (-1)^{\tau(p_2p_1\cdots p_n)} a_{1p_2}a_{2p_1}\cdots a_{np_n}$$

$$= (-1)\sum_{p_1p_2\cdots p_n\in A_n} (-1)^{\tau(p_2p_1\cdots p_n)} a_{1p_2}a_{2p_1}\cdots a_{np_n}$$

$(p_1p_2\cdots p_n$ 走遍 $A_n \Rightarrow p_2p_1\cdots p_n$ 也走遍 $A_n)$

$$= (-1)\sum_{p_2p_1\cdots p_n\in A_n} (-1)^{\tau(p_2p_1\cdots p_n)} a_{1p_2}a_{2p_1}\cdots a_{np_n}$$

$$= (-1)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

【推论】 行列式有两行(列)完全相同，行列式为零.

【证明】 交换这个行列式 D 的相同的两行：

$$D = -D \Rightarrow D = 0.$$

【性质2】 行列式中任意一行的公因子可提到行列式的外面，即用常数乘行列式相当于乘行列式的任选一行.

【证明】 为了清晰，对第1行验证此性质：

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots\in A_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots)} (ka_{1p_1})a_{2p_2}\cdots$$

$$= k\sum_{p_1p_2\cdots\in A_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots$$

$$= k\cdot|a_{ij}|_n .$$

【推论】 若行列式中有两行对应成比例，则行列式的值为零.

【证明】 30秒思考！

线性代数 哈尔滨工程大学

【性质3】 将行列式的任意一行的各元素乘一个常数后，对应地加到另一行上，行列式的值不变(行等值变换).

【证明】 不失一般性，设第1行乘 k 加到第2行上.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

$$=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}(a_{2p_2}+ka_{1p_2})\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}+\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}(ka_{1p_2})\cdots a_{np_n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【性质4】 行列式具有分行相加性(行列式的加法原理)，即(以第1行为例)

$$\begin{vmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & \cdots & x_{1n}+y_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【证明】 由行列式的定义和式容易证明.

线性代数 哈尔滨工程大学

3. 行列式的计算举例

利用行列式的性质可以大大地简化行列式的计算!

【例1】 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

【解】 将后 $n-1$ 列逐一第加到第1列上(等值变换)：

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&\cdots&b\\1&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&b&\cdots&a\end{vmatrix}\quad\left[\begin{matrix}(-1)\times r_1\longrightarrow r_2\\ \vdots\\(-1)\times r_1\longrightarrow r_n\end{matrix}\right]$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&\cdots&b\\0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【例2】 设行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 是反对称的, 即

$$a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,\ 2,\cdots,n).$$

求证, 当 n 为奇数时, $D=0$.

【证明】 $a_{ii}=-a_{ii}\ \Rightarrow a_{ii}=0\ (i=1,\ 2,\cdots,n);$

$$D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\-a_{13}&-a_{23}&0&\cdots&a_{3n}\\&&&\ddots&\vdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&-a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}\quad\left(\begin{matrix}\text{下面转置}\\\text{此行列式}\end{matrix}\right)$$

$$D=\begin{vmatrix}0&-a_{12}&-a_{13}&\cdots&-a_{1n}\\a_{12}&0&-a_{23}&\cdots&-a_{2n}\\a_{13}&a_{23}&0&\cdots&-a_{3n}\\&&&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}\quad\left(\begin{matrix}\text{每行中提}\\\text{出一个 }-1\end{matrix}\right)$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\-a_{13}&-a_{23}&0&\cdots&a_{3n}\\&&&\ddots&\vdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&-a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}\quad(n\text{ 为奇数})$$

$$=-D$$

$$\Rightarrow D=0$$

线性代数 哈尔滨工程大学

4. 行列式的下三角化

由行列式的定义计算行列式是困难的(但用定义容易编写计算机程序来计算行列式), 在上一节的最两个例子中我们看到可以用行列式的性质来简化行列式的计算. 我们再回顾上三角行列式的计算:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【问题】 能否用行列式的性质将行列式化为上三角形式, 从而计算其值?

线性代数 哈尔滨工程大学

【例3】 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

符号说明:

(1) $\mathbf{r}_i, \mathbf{c}_i$ 分别表示行列式的第 i 行, 第 i 列;

(2) $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$ 表示第 i 行和第 j 行互换;

(3) $k \times \mathbf{r}_i$ 表示用 k 乘第 i 行;

(4) $k \times \mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_j$ 表示第 i 行乘 k 加到第 j 行上;

(5) 对于列也有同样的符号.

线性代数 哈尔滨工程大学

【解】

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)\times \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2 \\ (-3)\times \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_3 \\ (-4)\times \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \\ 0 & 7 & 10 & 13 \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&7\\0&2&8&10\\0&7&10&13\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}(-2)\times r_2\to r_3\\(-7)\times r_3\to r_4\end{matrix}$$

$$=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&7\\0&0&4&-4\\0&0&-4&-36\end{vmatrix}\quad r_3\to r_4$$

$$=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&7\\0&0&4&-4\\0&0&0&-40\end{vmatrix}=160$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【引理1】 行列式$|a_{ij}|_n$可经过若干次行等值变换(将一行k倍加到另一行上)化为上三角行列式:

$$\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\&\ddots&\vdots\\0&&b_{nn}\end{vmatrix}.$$

【证明】 仅在$n=3$时证明, 读者不难给出一般的证明.

首先, 我们证实经过若干行等值变换, 行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\overset{\text{可化为}}{=\!=}\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&b_{22}&b_{23}\\0&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

(1) $a_{11}=a_{21}=a_{31}=0$: 结论自明.

(2) $a_{11}=0,\ a_{21}\neq 0$: 可将第 2 行加到第 1 行上.

(3) $a_{11}=0,\ a_{31}\neq 0$: 可将第 3 行加到第 1 行上.

(4) 不妨设$a_{11}\neq 0$. 在$(-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}})\times r_1\to r_i\ (i=2,3)$之下:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&b_{22}&b_{23}\\0&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix};$$

(5) 对$\begin{vmatrix}b_{22}&b_{23}\\b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}$做同样的处理即可.

线性代数 哈尔滨工程大学

5. 一种分块行列式的计算

【命题1】 下面的等式成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kl} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{l1} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

【证明】 用行等值变换将上式右边两个小行列式化为:

$$\begin{vmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_k \end{vmatrix} = a_1 \cdots a_k, \quad \begin{vmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_l \end{vmatrix} = b_1 \cdots b_l;$$

线性代数 哈尔滨工程大学

将施加在 $|a_{ij}|_k$ 的行等值变换施加在大行列式的前 k 行;
将施加在 $|b_{ij}|_l$ 的行等值变换施加在大行列式的后 l 行:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kl} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{l1} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_k & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_l \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 \cdots a_k)\cdot(b_1 \cdots b_l) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【例4】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

【解】 将第3列与第2列、第1列逐一交换到第1列; 同样将第4列交换到第2列, 将第5列交换到第3列:

$$D = (-1)^{2\times 3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 54$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【例5】 求证

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = [(a-c)^2+(b-d)^2]\cdot[(a+c)^2+(b+d)^2]$$

【证明】

$$\text{左边} \overset{r_1 \to r_3}{\underset{r_2 \to r_4}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ c+a & d+b & a+c & b+d \\ -d-b & c+a & -b-d & a+c \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ c+a & d+b & a+c & b+d \\ -d-b & c+a & -b-d & a+c \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-1)\times c_3 \to c_1}{\underset{(-1)\times c_4 \to c_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a-c & b-d & c & d \\ -b+d & a-c & -d & c \\ 0 & 0 & a+c & b+d \\ 0 & 0 & -b-d & a+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ -(b-d) & a-c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{vmatrix}$$

$= $右边

线性代数 哈尔滨工程大学

【思考题】 下式成立吗?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{lk} & b_{l1} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

§1.4 行列式按一行(列)展开

本节主要内容:

- 行列式的代数余子式
- 行列式按一行(列)的展开

线性代数 哈尔滨工程大学

1. 行列式的代数余子式

【行列式定义式的新组合】

我们再考察行列式的定义式:

$$|a_{ij}|_n=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

对于任何一个选定的 $i\ (1\leqslant i\leqslant n)$,将上式右边的 $n!$个单项式按第 i 行的元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 分组,再提取公因式:

$$|a_{ij}|_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in};$$

由于一般项 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的每个因子中每行每列必出且仅出一个元素,故 A_{ij} 中不再含有a_{ij} .

线性代数 哈尔滨工程大学

【实例】

$$\begin{aligned}|a_{ij}|_3&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\&\qquad-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\&=(a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})+(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})\\&\qquad+(a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32})\\&=a_{21}(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})\\&\qquad+a_{23}(a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32})\\&=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}\end{aligned}$$

$A_{ij}=?$ 在下式中，令

$a_{i1}=0,\ \cdots,\ a_{i,j-1}=0,\ a_{ij}=1,\ a_{i,j+1}=0,\cdots,a_{in}=0:$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{i,j-1}A_{i,j-1}+a_{ij}A_{ij}+a_{i,j+1}A_{i,j+1}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

（$A_{i1},\cdots,A_{in}$ 都不变）

$$A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j+1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（将第 i 行交换到第1行，再将第 j 列交换到第1列）

$$A_{ij}=(-1)^{(i-1)+(j-1)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$A_{ij}=(-1)^{(i+j)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【定义1】 在行列式 $|a_{ij}|_n$ 中删去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列, 留下的元素保持原来的相对位置所构成的 $n-1$ 阶行阶式称 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij}; 再称

$$A_{ij}\equiv(-1)^{(i+j)}M_{ij}$$

为 a_{ij} 的代数余子式.

线性代数 哈尔滨工程大学

【代数余子式的另一个性质】 设 $1\leqslant j\neq i\leqslant n$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}:$$

在上式中将 $a_{i1}, a_{i2},\cdots, a_{in}$ 换为 $a_{j1}, a_{j2},\cdots, a_{jn}$, 这不改变 $A_{i1},\cdots, A_{in}$; 而右边的行列式有两行相同. 从而,

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【总结】

对于 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$, 若 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 则我们有

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{cases} D & (i=j), \\ 0 & (i\neq j). \end{cases}$$

用同样的方法, 或应用行列的对称性, 我们也有

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=\begin{cases} D & (i=j), \\ 0 & (i\neq j). \end{cases}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

2. 行列式的按行(列)的展开

【定理1.3】 设 $D=|a_{ij}|_n$，则：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D & (i=j),\\ 0 & (i\neq j);\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D & (i=j),\\ 0 & (i\neq j).\end{cases}$$

即行列式的任何一行(列)的元素与其对应的代数余子式之积的和等于这个行列式自身；而任何一行(列)的元素与另一行(列)元素对应的代数余子式之积的和等于零.

线性代数 哈尔滨工程大学

【例1】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$.

【解】 应用上面的展开定理(先在某行(列)中多造0)，

$$D\xlongequal[c_3\to c_4]{(-2)\times c_3\to c_1}\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}(=A_{33})$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\to r_2}\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}=40$$

【例2】 求证 $n\,(n\geqslant 2)$ 阶范德蒙(Van der Monde)行列式:

$$V_n(a_1,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

线性代数 哈尔滨工程大学

例如，

$$V_4(a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a_1&a_2&a_3&a_4\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&a_4^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3&a_4^3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{cases}(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)\\ \qquad (a_3-a_2)(a_3-a_1)\\ \qquad\qquad (a_2-a_1)\end{cases}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【证明】 对行列式的阶数用归纳法证明此等式.

首先，对二阶行列式，结论成立：

$$\begin{vmatrix}1&1\\a_1&a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1.$$

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立.

对于 n 阶行列式，我们先依次应用

$(-a_n)\times r_{n-1}\to r_n$，$(-a_n)\times r_{n-2}\to r_{n-1}$，$\cdots$，$(-a_n)\times r_1\to r_2$：

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\a_1-a_n&a_2-a_n&\cdots&a_{n-1}-a_n&0\\a_1(a_1-a_n)&a_2(a_2-a_n)&\cdots&a_{n-1}(a_{n-1}-a_n)&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_1^{n-2}(a_1-a_n)&a_2^{n-2}(a_2-a_n)&\cdots&a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n)&0\end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

(按第 n 列展开上式行列式)

$$=\begin{vmatrix}a_1-a_n&a_2-a_n&\cdots&a_{n-1}-a_n\\a_1(a_1-a_n)&a_2(a_2-a_n)&\cdots&a_{n-1}(a_{n-1}-a_n)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_1^{n-2}(a_1-a_n)&a_2^{n-2}(a_2-a_n)&\cdots&a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n)\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+n}$$

(提出每列的公因式)

$$=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_1^{n-2}&a_2^{n-2}&\cdots&a_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}\cdot\prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}(a_n-a_i)$$

$$=V_{n-1}(a_1,\cdots,a_{n-1})\cdot\prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}(a_n-a_i).$$

线性代数 哈尔滨工程大学

由归纳假设

$$V_{n-1}(a_1,\cdots,a_{n-1})=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n-1}(a_i-a_j);$$

于是,

$$V_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n-1}(a_i-a_j)\cdot\prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}(a_n-a_i)$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

由归纳原理, 本题结论成立.

【评注】 范德蒙行列式是一个很有用的行列式:

$$V_n(a_1,\cdots,a_n)\neq 0\Leftrightarrow a_i\neq a_j\ (i\neq j)$$

线性代数 哈尔滨工程大学

对一些特殊的n阶行列式, 可用递推法来计算, 如下例.

【例3】 计算行列式 $A_n=\begin{vmatrix}2&-1&&\\-1&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&-1\\&&-1&2\end{vmatrix}_n$.

【解】 按第1行展开A_n(找出A_n与A_{n-1}, A_{n-2}等的关系):

$$A_n=2\cdot\begin{vmatrix}2&-1&&\\-1&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&-1\\&&-1&2\end{vmatrix}_{n-1}+\begin{vmatrix}-1&-1&&&\\0&2&-1&&\\&-1&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&-1\\&&&-1&2\end{vmatrix}_{n-1}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$=2A_{n-1}-\begin{vmatrix}2&-1&&\\-1&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&-1\\&&-1&2\end{vmatrix}_{n-2}=2A_{n-1}-A_{n-2};$$

由前面的递推公式, 我们得到

$$A_n=2(2A_{n-2}-A_{n-3})-A_{n-2}\quad=3A_{n-2}-2A_{n-3}$$

$$=3(2A_{n-3}-A_{n-4})-2A_{n-3}\quad=4A_{n-3}-3A_{n-4}$$

$$\cdots\cdots$$

$$=(n-1)A_2-(n-2)A_1\quad=3(n-1)-2(n-2)$$

$$=n+1.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【例4】 对于n行列式$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$, 计算

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}.$$

【解】 行列式某行的代数余子式与此行的元素无关:

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^{n-1}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

§1.5 克莱默(Cramer)法则

本节主要内容:

- 克莱默法则
- 特殊的齐次线性方程组

线性代数 哈尔滨工程大学

1. 克莱默法则

在本章第一节中，我们用二阶和三阶行列式来解二元和三元线性方程组；克莱姆法则就是此方法的一般化.

【定理1.4】(Cramer) 若线性方程组

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式$D=|a_{ij}|_n \neq 0$，则此方程组有唯一的一组解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

这里D_i是将D中的第 i 列 $a_{1i}, \cdots, a_{ni}$ 换成 $b_1, \cdots, b_n$ 得到的行列式.

线性代数 哈尔滨工程大学

【例1】 解线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

【解】 此方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0;$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27,\quad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27;$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3,\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1,\quad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

2. 克莱默法则的证明

作为一个另类证明，我们先从消元法解线性方程组的角度给出一个简单的引理；由此引理，我们从发现的角度，轻松地得到（证明）克莱默法则. 我们也可以应用行列式的理论，从验证的方式证明此定理（如课本）.

【引理2】 线性方程组(1)可以通过消元变换变为同解方程组

$$(2)\qquad \begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=c_1 \\ \qquad\quad b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=c_2 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad b_{nn}x_n=c_n \end{cases}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【证明】 引理1回顾：

n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 可以经过若干次行等值化为下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

只要将上面所用的每个行列式的行等值变换视为方程组(1)的一个消元变换即可得到与方程组(1)同解的方程组(2). 在此过程中，方程组右边的常数b_1, $\cdots$, b_n随之被变为c_1, $\cdots$, c_n.

线性代数 哈尔滨工程大学

【克莱默法则证明】 由引理 2，方程组(1)与(2)同解，且它们的系数行列式相等，$b_{11}\cdots b_{nn}=D\neq 0$; 再对方程组(2)从下向上逐步消元知方程组(1)变为同解方程组：

$$(3)\qquad \begin{cases} a_1x_1 \qquad\qquad\qquad = d_1 \\ \qquad a_2x_2 \qquad\quad\; = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_nx_n = d_n \end{cases},$$

此时，有 $D=a_1\cdots a_n\neq 0$. 同时，$D_1, \cdots, D_n$ 如下：

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ d_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ d_n & & & a_n \end{vmatrix}=d_1a_2\cdots a_n,$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & & \\ & d_2 & & \\ & \vdots & \ddots & \\ & d_n & & a_n \end{vmatrix} = a_1 d_2 \cdots a_n,$$

$\cdots\cdots,$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & & & d_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & d_n \end{vmatrix} = a_1 \cdots a_{n-1} d_n;$$

$$x_1 = \frac{d_1}{a_1} = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{d_2}{a_2} = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{d_n}{a_n} = \frac{D_n}{D}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

3. 特殊的齐次线性方程组

我们称下面特殊线性方程组为齐次线性方程组:

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

此方程组有天生有一组解 — 零解: $x_1 = 0, \cdots, x_n = 0$;

对于齐次线性方程组,我们关心的是它除了这组零解之外,还有没有其它的非零解. 此问题在线性代数中非常重要.

作为克莱默法则的应用, 当方程的个数与未知数的个数相等时, 我们给出齐次线性方程组有非零解的充要条件.

一般情况下, 齐次线性方程组有非零解的充要条件将在下一章中用矩阵的秩做统一讨论.

线性代数 哈尔滨工程大学

【定理1.5】 齐次线性方程组

$$(5) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|a_{ij}|_n = 0$, 即(等价的另一个说法)

此方程组仅有零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|a_{ij}|_n \neq 0$.

【证明】 $(\Rightarrow)$ 设方程组(5)有非零解. (待证 $|a_{ij}|_n = 0$)

若 $|a_{ij}|_n \neq 0$, 则由克莱默法则知此方程组有唯一一组解.

而此方程组有一组零解, 从而此方程组没有非零解.

这同假设矛盾.

线性代数 哈尔滨工程大学

($\Leftarrow$) 假设$|a_{ij}|_n = 0$. 我们来证实此齐次方程组至少有一组非零解.

首先, 由引理2知, 方程组(5)与下列方程组同解:

$$(6)\quad \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \qquad b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad b_{nn}x_n = 0 \end{cases};$$

在这里 $b_{11}\cdots b_{nn} = |a_{ij}|_n = 0$. 此刻, 至少有一个 $b_{ii} = 0$.

设$b_{11}, \cdots, b_{nn}$中第一个为0的是b_{kk}:

现在将 $x_k = 1$, $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$代入方程组(6), 得到下面的方程组(7):

线性代数 哈尔滨工程大学

$$(7)\quad \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1,k-1}x_{k-1} = d_1 \\ \qquad b_{22}x_2 + \cdots + b_{2,k-1}x_{k-1} = d_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad b_{k-1,k-1}x_{k-1} = d_{k-1} \end{cases}$$

方程组(7)的系数行列式等于 $b_{11}\cdots b_{k-1,k-1} \neq 0$. 再由克莱姆法则知此方程组有唯一一组解. 此解与

$$x_k = 1,\ x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$$

合起来就是方程组(5)的一组非零解.

线性代数 哈尔滨工程大学

【例2】 讨论齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解的条件.

【解】 由定理5知, 此方程组有非零解的充要条件为

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0,$$

即$\lambda = -2$或1为此方程组有非零解的充要条件.

【思考题】 试用范德蒙行列式证明一元 n 次方程

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ (n \geqslant 1)$$

不可能有 $n+1$ 个不同的根.

线性代数 哈尔滨工程大学

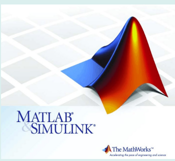
哈爾濱工程大學 HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

1.6 行列式的相关MATLAB命令

线性代数 哈尔滨工程大学

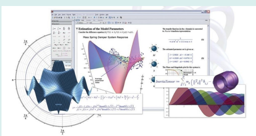
★常用数学软件或工具:

Matlab、Python、Mathematica、Maple等



python

Wolfram Mathematica



★学习途径

1、Matlab：

① 教材在每章最后1节提供学习如何用Matlab解决各章的内容；

② 智慧树慕课《线性代数与解析几何应用案例》提供学习途径；

③ 图书馆课外资料+bilibili等线上视频资料。

2、Python：

① 教材《线性代数与解析几何实验Python》版；

② 智慧树《线性代数与空间解析几何应用案例》的课程资料讲解视频；

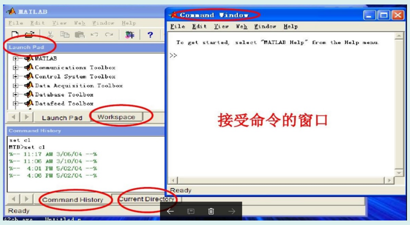
③ 图书馆课外资料+bilibili等线上视频资料。

....

线性代数 哈尔滨工程大学

一、演示MATLAB的基本操作

双击桌面快捷键，启动软件



在命令窗口按【Enter】键提交执行命令

线性代数 哈尔滨工程大学

二、数字简单计算

加	+
减	-
乘	*
除	/ 右除 正常除法 \ 左除 （矩阵）
幂	^

线性代数 哈尔滨工程大学

三、常用数学函数

abs(x)	求x的绝对值
sqrt(x)	求x的平方根
exp(x)	求x的指数函数
sin(x) ,cos(x)	求x的正、余弦， x为弧度
tan(x),cot(x)	求x的正、余切， x为弧度

线性代数 哈尔滨工程大学

四、MATLAB预设变量

ans	运算答案（answer缩写）
eps	小误差=2.2204e-016 可以理解为微积分中的 ε，16位
inf	无穷大
NaN	{not a number}, 类似未定型（0/0）
i，j	默认虚数单位， i = j = 0+1.0000 i

线性代数 哈尔滨工程大学

五、MATLAB变量命名规则

1. 区分大小写
2. 第一个字符为字母
3. 可以包含下划线和数字，不能为标点和空格

线性代数 哈尔滨工程大学

例 分别计算 $\sqrt{|-2e^{(-0.08+0.5)}|+1}$ 和 $\dfrac{2\sin(0.3\pi)}{1+\sqrt{7}}$

```
>>sqrt(abs(-2*exp(-0.08+0.5))+1)
  ans =
     2.0110
>>2*sin(0.3*pi)/(1+sqrt(7))
  ans =
     0.4438
```

线性代数 哈尔滨工程大学

六、如何赋值

```
>> x=18
>> y=3*x^2-3
>> u=x+y;                 % 分号含义
>> v=x-y;
>> tan((2*u)/(3*v))
```

Note：注意括号和标点

线性代数 哈尔滨工程大学

七、群运算

例如：一次求出 $\sin 0,\sin\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{2},\sin\frac{3}{4}\pi,\sin\pi$

```
>>A=[0,0.25*pi,0.5*pi,0.75*pi,pi];
>> sin(A)
ans =
    0    0.7071    1.0000    0.7071    0.0000
```

八、如何构造一个等差数列

构造一个等差数列

$$0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi,\pi$$

从初值0，公差0.25*pi，到终值pi结束

```
>> A=[0:0.25*pi:pi]      %[初值：增量：终值]
>> A=linspace(0,pi,5)    % [起点，终点，等分4份数]
```

九、如何计算行列式

```
>> A=[a,b;c,d ]
>> B=[a b c;d e f ;h i j]     % “;” 换行符
>> det(A)
>> det(B)
>> who                      % 查看当前变量
>> clear                    % 清除当前变量
```

习题课一

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 将行列式的第2,3,4列都加到第1列上:

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$= x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_1 \to c_4}]{\substack{c_1 \to c_2 \\ (-1)c_1 \to c_3}} x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= x^4.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

2. 已知行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & -9 \\ 23 & 1 & 12 & 4 \\ -4 & 1 & 3 & 45 \\ 4 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix},$$

求 $A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$ 的值.

解 $$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44}$$

$$= 1 \cdot A_{14} + 1 \cdot A_{24} + 1 \cdot A_{34} + 1 \cdot A_{44},$$

它是行列式 D_4 中第2列元素与第4列对应元素的代数余子式的乘积之和, 故由展开式定理得

$$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = 0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

3. 令 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$, 解方程 $f(x) = 0.$

解 展开行列式可以看出 $f(x)$是 x的 n次多项式;

$f(x) = 0$ 是x的一元 n次方程式

由行列式的性质可以看出

$$f(a_1) = 0, \quad f(a_2) = 0, \quad \cdots, \quad f(a_n) = 0;$$

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $f(x) = 0$的一切解.

4. 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_1a_2\cdots a_n \neq 0).$$

解 用n个等值变换 $(-a_i^{-1})\times r_{i+1}\to r_1$ 将行列式变为

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-a_1^{-1}-a_2^{-1}-\cdots-a_n^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=(a_1\cdots a_n)(a_0-a_1^{-1}-a_2^{-1}-\cdots-a_n^{-1}).$$

5. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$

解 按第1列展开行列式, 得递推公式

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+a_n.$$

$$D_n=xD_{n-1}+a_n:$$

由递推公式可得

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1}+a_n \\ &= x(xD_{n-2}+a_{n-1})+a_n \\ &= x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n \\ &= x^2(xD_{n-3}+a_{n-2})+a_{n-1}x+a_n \\ &= x^3D_{n-3}+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n \\ &= \cdots \\ &= x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \\ &= a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \end{aligned}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

6. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 & n-1 \\ n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

解 将第$n-1$列的(-1)倍加到第n列;

将第$n-2$列的(-1)倍加到第$n-1$列;

$\cdots$

将第1列的(-1)倍加到第2列:

线性代数 哈尔滨工程大学

$$D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ n & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\ n & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{(n-1)} n$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} n.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

7. 已知5阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 27$, 求 $A_{44} + A_{45}$

和 $A_{41} + A_{42} + A_{43}$的值

解 由行列式的展开定理,得到

$$\begin{cases} A_{41} + A_{42} + A_{43} + 2(A_{44} + A_{45}) = 27 & \text{(按第4行展开)} \\ 2(A_{41} + A_{42} + A_{43}) + A_{44} + A_{45} = 0 & \text{(按第2行展开)} \end{cases}$$

解方程可得

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} = -9, \quad A_{44} + A_{45} = 18.$$

线性代数　哈尔滨工程大学

8. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1-2x_1^2 & -2x_1x_2 & \cdots & -2x_1x_n \\ -2x_2x_1 & 1-2x_2^2 & \cdots & -2x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_nx_1 & -2x_nx_2 & \cdots & 1-2x_n^2 \end{vmatrix}$.

解　为了简明，先标准化此行列式：

令 $y_i = \sqrt{2}x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则行列式为

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

线性代数　哈尔滨工程大学

(1) 递推法：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & 0 \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & -y_n^2 \end{vmatrix}$$

线性代数　哈尔滨工程大学

$$= \begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & 0 \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & -y_ny_n \end{vmatrix}$$

$$= D_{n-1} + (-y_n)\begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & y_1 \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

$$= D_{n-1} - y_n\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{vmatrix} = D_{n-1} - y_n^2$$

$$\boxed{D_n = D_{n-1} - y_n^2}$$

线性代数

哈尔滨工程大学

$$D_n = (D_{n-2} - y_{n-1}^2) - y_n^2$$

$$= D_{n-2} - y_{n-1}^2 - y_n^2$$

$$= (D_{n-3} - y_{n-2}^2) - y_{n-1}^2 - y_n^2$$

$$= \cdots$$

$$= D_1 - y_2^2 - y_3^2 - \cdots - y_{n-1}^2 - y_n^2$$

$$= 1 - (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

线性代数

哈尔滨工程大学

(2) 加边法：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ y_2 & -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

线性代数

哈尔滨工程大学

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ y_2 & -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$=\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1-(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)$$

线性代数 哈尔滨工程大学

(3) 比例数换位法：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ -y_2y_1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_ny_1 & -y_ny_2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=(y_1y_2\cdots y_n)\begin{vmatrix} \frac{1-y_1^2}{y_1} & -y_2 & \cdots & -y_n \\ -y_1 & \frac{1-y_2^2}{y_2} & \cdots & -y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_1 & -y_2 & \cdots & \frac{1-y_n^2}{y_n} \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$=(y_1y_2\cdots y_n)\begin{vmatrix} \frac{1-y_1^2}{y_1} & -y_2 & \cdots & -y_n \\ -y_1 & \frac{1-y_2^2}{y_2} & \cdots & -y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_1 & -y_2 & \cdots & \frac{1-y_n^2}{y_n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ -y_1^2 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_1^2 & -y_2^2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$=\begin{vmatrix} 1-y_1^2 & -y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ -y_1^2 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_1^2 & -y_2^2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-(y_1^2+\cdots+y_n^2) & -y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ 1-(y_1^2+\cdots+y_n^2) & 1-y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-(y_1^2+\cdots+y_n^2) & -y_2^2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=[1-(y_1^2+\cdots+y_n^2)]\begin{vmatrix} 1 & -y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ 1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -y_2^2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$=[1-(y_1^2+\cdots+y_n^2)]\begin{vmatrix} 1 & -y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ 1 & 1-y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -y_2^2 & \cdots & 1-y_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=[1-(y_1^2+\cdots+y_n^2)]\begin{vmatrix} 1 & -y_2^2 & \cdots & -y_n^2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1-(y_1^2+\cdots+y_n^2)$$

线性代数 哈尔滨工程大学

9. 求证3次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+x^3$ 不能有4个不同的根.

证 假设 $f(x)$有四个不同的根a, b, c, d,则

$$\begin{cases} a_0+a_1a+a_2a^2+a^3=0 \\ a_0+a_1b+a_2b^2+b^3=0 \\ a_0+a_1c+a_2c^2+c^3=0 \\ a_0+a_1d+a_2d^2+d^3=0 \end{cases}.$$

视其为未知数a_0, a_1, a_2, $a_3=1$的齐次线性方程组,由范德蒙行列式知其系数阵的行列式不为0, 因而此齐次方程组只有0解. 这一矛盾证实了本题的结论.