第三章　线性方程组

本章主要内容:

- 线性方程组与矩阵的对应
- 矩阵的秩与等价标准形
- 线性方程组可解性判别定理
- 矩阵的秩与行最简形相关的MATLAB应用

§3.1 线性方程组与矩阵的对应

本节主要内容:

- 线性方程组与矩阵的对应
- 线性方程组的同解变换
- 矩阵的初等变换与等价
- 矩阵的行最简等价标准形

1. 线性方程组与解的三种形态

在线性代数我们将讨论如下的一般线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

这里，n为未知数的个数，m为方程的个数，a_{ij}，b_i为常数；$n > m$，$n = m$，$n < m$都是可能的，且此方程组的解有三种可能的形态：**无解**，即任何一组$x_1, \cdots, x_n$都不满足方程组；**有唯一一组解**；**有无穷多组解**.

2. 线性方程消元法的本质

【例2】 观察用消元法解下列方程组的过程:

$$\begin{cases} x+y+z=3 & ① \\ 2x+y-z=2 & ② \\ x-3y+z=-1 & ③ \end{cases}$$

我们将此方程组与一个由方程组未知数的系数和右边常数组成的一个数表(矩阵)对应起来，方程组的每一个消法运算和倍法运算都对应此矩阵的一个行运算($\mathbf{r}_i$ 表示矩阵的第 i 行):

$$\begin{cases} x+y+z=3 & ① \\ 2x+y-z=2 & ② \\ x-3y+z=-1 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

线性代数

哈尔滨工程大学

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ z=\ \ 3 & ① \\ 2x+\ \ y-\ z=\ \ 2 & ② \\ x-3y+\ z=-1 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & -3 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$(-2)\times ① \xrightarrow{+} ② \quad \leftrightarrow \quad (-2)\times \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2$$

$$(-1)\times ① \xrightarrow{+} ③ \quad \leftrightarrow \quad (-1)\times \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_3$$

$$\begin{cases} x+y+\ z=\ \ 3 & ① \\ -y-3z=-4 & ② \\ -4y\qquad =-4 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -3 & \vdots & -4 \\ 0 & -4 & 0 & \vdots & -4 \end{bmatrix}$$

线性代数

$$\begin{cases} x+y+z=3 & ① \\ -y-3z=-4 & ② \\ -4y=-4 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -3 & \vdots & -4 \\ 0 & -4 & 0 & \vdots & -4 \end{bmatrix}$$

$$(-1)\times ② \quad \leftrightarrow \quad (-1)\times r_2$$

$$(-\frac{1}{4})\times ③ \quad \leftrightarrow \quad (-\frac{1}{4})\times r_3$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 & ① \\ y+3z=4 & ② \\ y=1 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

哈尔滨工程大学

线性代数

$$\begin{cases} x + y + z = 3 & ① \\ y + 3z = 4 & ② \\ y = 1 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$② \leftrightarrow ③ \quad \leftrightarrow \quad r_2 \leftrightarrow r_3$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 & ① \\ y = 1 & ② \\ y + 3z = 4 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

线性代数

哈尔滨工程大学

$$\begin{cases} x + y + z = 3 & ① \\ y = 1 & ② \\ y + 3z = 1 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$(-1)\times ② \xrightarrow{+} ① \quad \leftrightarrow \quad (-1)\times \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_1$$

$$(-1)\times ② \xrightarrow{+} ③ \quad \leftrightarrow \quad (-1)\times \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_3$$

$$\begin{cases} x + z = 2 & ① \\ y = 1 & ② \\ 3z = 3 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + \quad\quad z = 2 & ① \\ \quad\quad y \quad\quad = 1 & ② \\ \quad\quad\quad 3z = 3 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

$$(-\frac{1}{3})\times ③ \xrightarrow{+} ① \leftrightarrow (-\frac{1}{3})\times r_3 \to r_1$$

$$\frac{1}{3}\times ③ \leftrightarrow \frac{1}{3}\times r_3$$

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad = 1 & ① \\ \quad\quad y \quad = 1 & ② \\ \quad\quad\quad z = 1 & ③ \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

由此看到用消元法解方程组的本质是对一个数表进行运算. 现在我们就引入矩阵及其初等变换.

3. 矩阵及其初等变换

【定义1】 由$m\times n$个数a_{ij} $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$排成的如下的 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

称为一个$m\times n$ **矩阵**，简记为$[a_{ij}]_{m\times n}$，称 a_{ij}为此矩阵的第 i 行第 j列的**元素**．一般用大写英文字母A, B, C等表示矩阵．$n\times n$矩阵称为 n **阶方阵**．若$A=[a_{ij}]_{n\times n}$为方阵，我们用$|A|$表示行列式$|a_{ij}|_n$.

【定义2】 对给定的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

分别称矩阵

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ 和 } \widetilde{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

为此方程组的**系数矩阵**和**增广阵**.

【定义3】（1）对矩阵 A 进行下列三种变换称为 A 的**初等变换**:

(i) 交换 A 的两行(列);

(ii) 用一个非零常数乘 A 的某一行(列)的所有元素;

(iii) 将 A 的某一行(列)的所有元素乘以某一常数，再对应地加到另一行(列)上;

(2) 若矩阵 A 经过一系列初等变换(行初等变换和列初等变换可交替使用)化为矩阵 B，则称矩阵 A 与矩阵 B **等价**，记为

$$A \to B.$$

例如,

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{行初等变换}}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{列初等变换}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{行初等变换}}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{列初等变换}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

【定义4】 对一个线性方程组进行的如下变换称为此方程组的**同解变换**:

(i) 交换方程组中的两个方程;

(ii) 用一个非零常数乘方程组中某个方程的两边;

(iii) 将某个方程的k倍加到另一个方程上.

【评注】 方程组的同解变换不改变其解. 一个线性方程组的三种类型的同解变换对应其增广阵同类型的行初等变换. 若一个线性方程组的增广阵 $\tilde{A}$ 经过一次或若干次行初等变换化为 $\tilde{B}$, 则 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 对应的方程组是同解的.

4. 用增广阵解线性方程组举例

【例3】 解方程组$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4x+\ \ y-z=-1 \end{cases}$.

【解】 此方程组的增广阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-4)\times r_1 \to r_3]{(-2)\times r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)\times r_2 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix};$$

原方程组与方程组

$$\begin{cases} x + 2y - \quad z = 1 \\ \quad -7y + 3z = -2 \\ \qquad\qquad 0 = -3 \end{cases}$$

同解. 这是矛盾方程组, 故原方程组无解.

【例4】 解方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$.

【解】 此方程组的增广阵

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)\times r_1 \to r_4]{\substack{(-1)\times r_1 \to r_2 \\ (-2)\times r_1 \to r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\times r_2 \to r_4]{\substack{(-1)\times r_2 \to r_1 \\ (-1)\times r_2 \to r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(-1)\times r_3 \to r_1 \\ (-1)\times r_3 \to r_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

原方程组的解为 $x_1 = x_2 = x_3 = 1.$

【例5】 解方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 3. \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

【解】 此方程组的增广阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 \to r_3]{(-3)\times r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -10 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{10})\times r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-5)\times r_3\to r_2]{r_3\to r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix};$$

原方程组与 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$ 同解;

$$\begin{cases} x_1 + \quad 2x_3 \quad = \frac{1}{2} \\ \quad x_2 \quad\quad = \frac{1}{2} \\ \quad\quad\quad x_4 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - 2c \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \quad c \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

【评注】 在这里x_3任取一个常数c，就得到方程组的一组解，因而原方程组有无穷多组解，这样的x_3称为**自由未知数**，而且方程组上述形式的解称此方程组的**通解**. 自由未知数是相对的，在上例中也可视x_1为自由未知数. 这样，方程组的通解就写为

$$\begin{cases} x_1 = \quad c \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}c \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

【例6】 解方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=3 \end{cases}$.

【解】 此方程组的增广阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\times r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{2})\times r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)\times r_2 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

原方程组化简为

$$\begin{cases} x_1+x_3+x_4=2 \\ x_2=-1 \end{cases},$$

其通解为

$$\begin{cases} x_1 = 2-c_1-c_2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}.$$

5. 矩阵的行最简等价标准形

行阶梯阵: 若一个矩阵的每个非零行(元素不全为零的行)的第一个(从左数)非零元素所在的列指标随行指标的增大而严格增大, 并且元素全为零的行均在所有非零行的下方, 则称此矩阵为**行阶梯阵.**

下面的矩阵都是行阶梯阵:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

行最简阵：若矩阵为行阶梯阵，且每行中第一个非零元为 1，又这个 1 所在列中其它的元素都为 0，则称此矩阵为行最简阵（行初等变换不能再简化了）.

下面的矩阵都是行最简阵：

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

线性代数

哈尔滨工程大学

【例7】 用行初等变换将矩阵 A 化为行最简阵:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & -2 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

【解】

$$A\xrightarrow{\text{(iii)型行初等变换}}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 9 & 6 & 9 & -5\\ 0 & 9 & 6 & 3 & -4\\ 0 & 9 & 6 & 9 & -5\end{bmatrix}$$

$$
\xrightarrow{\text{(iii)型行初等变换}}
\begin{bmatrix}
1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\
0 & 9 & 6 & 9 & -5 \\
0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{(ii)型行初等变换}}
\begin{bmatrix}
1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\
0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{5}{9} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{(iii)型行初等变换}}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{9} \\
0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{7}{18} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

【命题3.1】 矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 通过行初等变换可变为行最简阵.

【证明】 本命题的证明就是例11一般化, 类似与行列式可上三角化的证明.

§ 3.2 矩阵的秩与等价标准形

本节主要内容:

- 矩阵的子式
- 矩阵的秩
- 矩阵的等价标准形

1. 矩阵的子式

【定义1】 在矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$中任选k 行k 列, 其相交处的$k\times k$ 个元素按原来的相对位置所构成的k 阶行列式称为矩阵 A的一个**k 阶子式**.

例如, 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

有如下 4 个 3 阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. 矩阵的秩

【定义2】 若矩阵 A 中有一个 r 阶子式不等于零，而任何 $r+1$ 阶子式(若存在)都等于零，则称数 r 为矩阵 A 的**秩**(rank)，记为 $\mathrm{r}(A)$；约定**零矩阵**(元素都是零的矩阵)的秩为零.

【评注】

(1) 若一个矩阵的 r 阶子式都为0, 则它的所有 $r+1$ 阶子式(若有)也都为 0.

(2) $\mathrm{r}(A_{m\times n}) \leqslant \min\{m, n\}$.

(3) n 阶方阵 A 的秩为 $n \Leftrightarrow |A| \neq 0$.

【例1】 求下列矩阵的秩:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

【解】 (1) 矩阵 A 有一个非零的 3 阶子式，没有 4 阶子式，从而 A 的秩为 3.

(2) 矩阵 B 有(3个)非零 3 阶子式，所有的 4 阶子式都为 0，从而 B 的秩也为 3.

【问题】 如何有效地求一个(大型)矩阵的秩?

【定理3.1】 初等变换不改变矩阵的秩.

【证明】 我们仅对矩阵的行初等变换进行证明,对列初等变换同理可证.

(1) 设对换矩阵 A 的两行得到矩阵 B.

由于对换一个行列式的两行仅改变行列式的符号,因而 B 的非零子式与 A 的非零子式相互对应,故

$$\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(A).$$

(2) 设矩阵 A 的某一行乘非零数 k 得到矩阵 B.

此时,B的子式与A的同位置的子式相等或差一个倍数k,故

$$\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(A).$$

(3) 设矩阵 A 的某一行乘数 k 加到另一行上得到矩阵 B，且 $\mathrm{r}(A)=r$.

由于(已经证明)交换矩阵的两行不改变矩阵的秩，故此时，不妨假设初等变换为 $k\times \mathrm{r}_2 \to \mathrm{r}_1$：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = B$$

(此刻，我们也将证明 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(A)$)

任取 B 的一个 $r+1$ 阶子式 M，我们将证明 $M=0$.

① M 不含 B 的第 1 行元素：

此时，M 就是 A 的一个 $r+1$ 阶子式，从而 $M=0$.

② M 含有 B 的第 1 行的元素:

$$M=\begin{vmatrix} a_{1i}+ka_{2i} & a_{1j}+ka_{2j} & \cdots \\ a_{ki} & a_{kj} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

此时，由行列式的性质 4 和性质 2 知

$$M=\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} & \cdots \\ a_{ki} & a_{kj} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{2i} & a_{2j} & \cdots \\ a_{ki} & a_{kj} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}=0+k\times 0=0.$$

由于矩阵 B 的 $r+1$ 阶子式都为 0，故 $\mathrm{r}(B)\leqslant r=\mathrm{r}(A)$.
另一方面，经过初等变换 $(-k)\times \mathrm{r}_2\to \mathrm{r}_1$，矩阵 B 也可变为 A，故 $\mathrm{r}(A)\leqslant \mathrm{r}(B)$ 也成立.

总之, 此时 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(A)$ 仍然成立.

【推论】 等价的矩阵有相同的秩.

【评注】 此定理说明，为求一个矩阵的秩，可通过一系列初等变换将此矩阵化成一个秩是明显的矩阵，如阶梯阵、行最简阵等.

【例2】 求下列矩阵 A 的秩: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

【解】

$$A \xrightarrow{\text{(i)型行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(iii)型行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(i)型行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(iii)型行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B:$$

由此容易看到 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 3.$

【命题3.2】 若 $\mathrm{r}(A_{m\times n})=r$，则通过行初等变换及列对换，矩阵$A$可化为

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & d_{1,r+1} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_{r,r+1} & \cdots & d_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \quad (r\text{ 个 }1)$$

【证明】 由命题3.1，通过行初等变换，A可以变为行最简阵B:

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B.$$

例如(第一节的例11)，

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

再交换B的列即可得到上述形式的矩阵．此时，

$$\mathrm{r}(A) = r.$$

【定理3.2】 若 $\mathrm{r}(A_{m\times n})=r$，则矩阵 A 等价于矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \quad (r\text{ 个 }1)$$

【证明】 对命题3.2中的矩阵再用列初等变换即可.

n 阶单位阵 E_n：E_n 表示主对角线上的元素都是1，其它元素都是 0 的 n 阶方阵.

例如,

$$E_1 = [1], \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

零矩阵 $0_{m\times n}$：$0_{m\times n}$ 表示元素都是 0 的 $m\times n$ 矩阵. 在上下文清楚时，我们仅用 0 表示零矩阵，但注意零矩阵 $0_{2\times 1}$ 与 $0_{1\times 2}$ 是不同的零矩阵.

【定理3.2的简化形式】 若 $\mathrm{r}(A_{m\times n})=r$，则$A$等价于

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

3. 矩阵的等价标准形

用符号$\mathbb{R}^{m\times n}$表示数域$\mathbb{R}$上的全体$m\times n$矩阵的集合. 在$\mathbb{R}^{m\times n}$的两个元素(两个$m\times n$矩阵)之间，我们定义了等价. 矩阵的等价是集合$\mathbb{R}^{m\times n}$上的一个等价关系:

(1) 对任何矩阵A，有$A\to A$;

(2) 若$A\to B$，则$B\to A$;

(3) 若$A\to B$，$B\to C$，则$A\to C$.

【定理3.3】 若$A, B\in\mathbb{R}^{m\times n}$，则$A\to B \Leftrightarrow \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$.

【证明】 ($\Rightarrow$) 这就是定理 3. 1 的推论.

($\Leftarrow$) 令$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)=r$. 由定理 3. 2 知

$$A\to\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B\to\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是

$$A\to\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\to B,$$

从而

$$A\to B.$$

等价标准形：若 $\mathrm{r}(A_{m\times n})=r$，我们称

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 的**等价标准形**.

例如，$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的等价标准形都是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

【评注】

定理3.3说明，两个矩阵等价等同于它们有相同的等价标准形.

矩阵等价的一个通俗说明：若将集合 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 视为一个学校，一切 $m\times n$ 矩阵为此学校的全体学生. 现在给此学校的学生分班：等价的矩阵分在同一个班中. 每个班中的矩阵有相同的秩，我们就用这个秩做这个班的班号. 矩阵

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在 r 班中，这是此班中最"英俊"的学生.

例如，一切 2×3 实数矩阵，按等价分 3 个班：

0班：此班中仅有一个学生 $0_{2\times3}$；

1班：此班中有无穷多个学生，$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$在此班中；

2班：此班中有无穷多个学生，$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$在此班中.

§3.3 线性方程组可解性判别定理

本节主要内容:

- 线性方程组可解性判别
- 齐次线性方程组有非零解判别

1. 线性方程组可解性判别

【定理3.4】 线性方程组的系数矩阵为 $A_{m\times n}$，增广阵为 $\widetilde{A}$，则：

(1) 此方程组有解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\widetilde{A})$;

(2) 当 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\widetilde{A})=n$ 时 (n 为未知数的个数)，此方程组有唯一一组解;

(3) 当 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\widetilde{A})=r<n$ 时，此方程组有无穷多组解，且自由未知数的个数是 $n-r$.

【评注】 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\widetilde{A})$ 的含义是：

在 A 的最右边增加一列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 后秩没有增加.

【证明】 由前面的命题3.2, 若$\mathrm{r}(A)=r$, 则

$$A \xrightarrow[\text{列对换}]{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & d_{1,r+1} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_{r,r+1} & \cdots & d_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n},$$

因而

$$\tilde{A} \xrightarrow[\text{前 } n \text{ 列的对换}]{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & d_{1,r+1} & \cdots & d_{1n} & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_{r,r+1} & \cdots & d_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times(n+1)} = \tilde{D}.$$

线性代数

由于对 $\tilde{A}$ 进行行初等变换不改变其所对应线性方程组的解，而对换 $\tilde{A}$ 的前 n 列中的两列相当于重排未知数的次序，因而 $\tilde{D}$ 对应的方程组与 $\tilde{A}$ 所对应的方程组可解性是相同的，仅仅是未知数的排列次序不同. 不妨设原方程组同解转化为方程组:

$$
\text{(a)}\quad \begin{cases} x_1 = d_1 - d_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - d_{1n}x_n \\ \quad\cdots\cdots \\ x_r = d_r - d_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - d_{rn}x_n \\ 0 = d_{r+1} \end{cases}
$$

(a) $$\begin{cases} x_1 = d_1 - d_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - d_{1n}x_n \\ \quad\cdots\cdots \\ x_r = d_r - d_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - d_{rn}x_n \\ 0 = d_{r+1} \end{cases}$$

这时:

(1) 方程组(a)有解 $\Leftrightarrow d_{r+1} = 0$

$$\Leftrightarrow \mathrm{r}(\tilde{A}) = \mathrm{r}(\tilde{D}) = r = \mathrm{r}(A);$$

(2) 若 $\mathrm{r}(\tilde{A}) = \mathrm{r}(A) = n$, 则方程组(a)有唯一一组解:

$$x_1 = d_1,\ \cdots,\ x_n = d_n;$$

(3) 当 $\mathrm{r}(\tilde{A}) = \mathrm{r}(A) = r < n$ 时, 在方程组(a)中,

$x_{r+1}, \cdots, x_n$ 为 $n-r$ 个自由未知数,

方程组有无穷多组解.

【例1】 讨论方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

何时无解，何时有唯一一组解，何时有无穷多组解.

【解】 此方程组的增广阵

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & 1-\lambda \end{bmatrix};$$

由此可得出:

(1) 方程组有唯一一组解:

当 $\lambda \neq 1$, 且 $\lambda \neq -2$ 时, $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$;

(2) 方程组无解:

当 $\lambda = -2$ 时, $r(A) = 2$, $r(\tilde{A}) = 3$;

(3) 方程组有无穷多组解:

当 $\lambda = 1$ 时, $r(A) = r(\tilde{A}) = 1 < 3$.

【例2】 问常数a, b为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多组解？并在有无穷多组解时，写出通解.

【解】 此方程组的增广阵

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\\1&2&3&3&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\\0&1&2&2&1\end{bmatrix}$$

线性代数

哈尔滨工程大学

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & -4 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 当 $a=1$ 时,

$$\widetilde{A} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & -4 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(b-3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(b+1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4}(b-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

方程组有无穷多组解, 通解:

$$x_1 = -\frac{(b+3)}{4},\ x_2 = \frac{(b+1)}{2},\ x_3 = -\frac{(b-1)}{4} - c,\ x_4 = c;$$

当 $a \neq 1$ 时,

$$\tilde{A} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

(2) 当 $a \neq 1, a \neq 5$ 时, 有唯一一组解;

(3) 当 $a = 5, b \neq 1$ 时, 无解;

(4) 当 $a = 5, b = 1$ 时, 有无穷多组解, 通解:

$$x_1 = -1 + c,\ x_2 = 1 - 2c,\ x_3 = c,\ x_4 = 0.$$

2. 齐次线性方程组有非零解判别

【定理3.5】 齐次线性方程组

$$(b)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(A) < n$, 即齐次线性方程组(b)仅有零解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(A) = n$.

【证明】 方程组(b)有非零解就是有解且不唯一;

(由定理4) 方程组(b)有非零解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(A) < n$.

$\boxed{\text{对于齐次线性方程组 } \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\tilde{A})}$

线性代数

哈尔滨工程大学

由上面齐次线性方程组有非零解的一般判别定理，我们可以得到两个特殊结论：

【推论1】 当 $m<n$ 时，齐次线性方程组(b)有非零解.

【证明】 因为，当 $m<n$ 时，$\mathrm{r}(A)\leqslant m<n$.

【推论2】 当 $m=n$ 时，齐次线性方程组(b)有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$.

【证明】 因为，当 $m=n$ 时，$\mathrm{r}(A)<n \Leftrightarrow |A|=0$.

注：在第二章中，我们用克莱默法则证明过此结论.

【例3】 讨论线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

有非零解的条件，并给出一切非零解.

【解】 此方程组作为齐次线性方程组, 系数行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & -1 \\ \lambda-4 & \lambda-2 & -1 \\ \lambda-4 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-4);$$

因而此方程组有非零解的充要条件是

$$\lambda = 1 \text{ 或 } \lambda = 4.$$

(1) 当 $\lambda = 1$ 时，方程组为 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$，其通解为

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases};$$

此时，只要 c_1, c_2 不全为0，此解就是非零解.

(2) 当 $\lambda = 4$ 时，方程组系数阵

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

此方程组化为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases};$$

其通解为

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = c, \\ x_3 = c \end{cases}$$

此时, 只要 $c \neq 0$, 此解就是非零解.

哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

3.4矩阵的秩与行最简形相关MATLAB应用

一、矩阵输入及特殊矩阵

逗号，空格	列分隔符
分号	行分隔符 或者在表达式后不显示结果
eye(3)	构造3阶单位阵
ones(2,3)	构造2x3阶元素全为1的矩阵
zeros(2,3)	构造2x3阶零矩阵
rand(2,3)	构造2x3阶随机矩阵
round(rand(2,3)*10)	构造元素为0-10的2x3阶 随机矩阵
rot90(vander([3,4,5,6]))	构造3,4,5,6的范德蒙矩阵

二、矩阵的运算

A’	矩阵A的转置
det(A)	方阵A的行列式
rank(A)	矩阵A的秩
rref(B)	化矩阵B为行最简型

例1 利用初等变换求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ -x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

```
>> B=[1 3 1 2 1;3 4 2 -3 2;-1 -5 4 1 3;2 7 1 -6 4]
>> rref(B)
```

例2 生成元素为 0 到 1 间的随机矩阵 $A_{3\times 3}$， 生成元素为 0 到 100 并且元素全是随机整数的矩阵 $B_{3\times 3}$.

(1) 求出矩阵 A 与 B 的行列式.

```
>> A=rand(3,3)
>> B=round(rand(3,3)*100)
>> det(A)
>> det(B)
```

(2) 求出矩阵A的秩.

```
>>rank(A)
```

习题课三

1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, 删去 A 的一行(列)得到矩阵 B, 求证: $r(B)\geqslant r(A)-1$.

解 首先应注意:

$r(B)\geqslant r(A)-1$ 等同于 $r(B)=r(A)$ 或 $r(B)=r(A)-1$.

不妨令 $r(A)=r>0$.

(1) 矩阵 B 中仍然有一个 r 阶子式不为 0: 此时,

$$r(B)=r=r(A);$$

(2) 矩阵 B 中没有非零的 r 阶子式:

$$r(B)\leqslant r-1=r(A)-1;$$

再令 $\begin{vmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{r1} & \cdots & k_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$ 为 A 的非零 r 阶子式:

此时, 一定是这个 r 阶行列式对应的矩阵被删去一行后为 B 的一部分;

由行列式展开定理, 这个 r 阶行列式一定有一个 $r-1$ 阶子式不为0.

从而 $$r(B)=r-1=r(A)-1.$$

2. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=-2 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-5 \end{cases}$ 的通解

线性代数

解 增广矩阵为

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&-2\\1&-1&1&-3&4\\1&-1&-2&3&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&-2\\0&0&2&-4&6\\0&0&-1&2&-3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&1\\0&0&1&-2&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2-x_4=1\\ \quad x_3-2x_4=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=1+x_2+x_4\\x_3=3+2x_4\end{cases};$$

通解为 $\begin{cases}x_1=1+k_1+k_2\\x_2=k_1\\x_3=3+2k_2\\x_4=k_2\end{cases}$ (其中 k_1, k_2为任意常数).

3. 求线性方程组
$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=0 \\ x_1+3x_2-2x_3=0 \\ 3x_1+7x_2+8x_3=0 \\ x_1+4x_2-9x_3=0 \end{cases}$$
的通解.

解 齐次方程组的系数阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-19x_3 \\ x_2=7x_3 \end{cases};\ \text{通解为} \begin{cases} x_1=-19k \\ x_2=7k \\ x_3=k \end{cases} \quad (k\ \text{为任意常数}).$$

4. 当 c, d 取何值时，线性方程组有解？试求其解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=c \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=d \end{cases}$$

解 对方程组的增广矩阵作初等变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & c \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & c-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & d-5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&c\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&d-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&c\\0&0&0&0&0&d-2\end{bmatrix}.$$

由此可知，当 $c=0,\ d=2$ 时，方程组有无穷多解，通解

$$\begin{cases}x_1=-2+c_1+c_2+5c_3\\x_2=3-2c_1-2c_2-6c_3\\x_3=c_1\\x_4=c_2\\x_5=c_3\end{cases}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数 .

哈尔滨工程大学

5. 求证三次多项式 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ (a_3\neq 0)$ 不能有 4 个不同的根.

解 假设此多项式有四个不同的根 $a,\ b,\ c,\ d$, 则

$$\begin{cases} a_0\cdot 1+a_1a+a_2a^2+a_3a^3=0, \\ a_0\cdot 1+a_1b+a_2b^2+a_3b^3=0, \\ a_0\cdot 1+a_1c+a_2c^2+a_3c^3=0, \\ a_0\cdot 1+a_1d+a_2d^2+a_3d^3=0. \end{cases}$$

视其为未知数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ 的齐次线性方程组:

其系数行列式 D 为范德蒙行列式, $D\neq 0$;

此齐次方程组仅有零解: $a_0=a_1=a_2=a_3=0$;

这同 $a_3\neq 0$ 矛盾.