



第二章 空间解析几何

本章主要内容:

- 空间直角坐标系
- 向量及其坐标
- 向量的数量积与向量积
- 平面方程
- 空间直线方程
- 曲面及其方程
- 空间曲线及其方程
- 利用MATLAB绘制空间几何图形





§ 2.1 空间直角坐标系

本节主要内容：

- 空间直角坐标系
- 空间点的坐标
- 空间两点间的距离

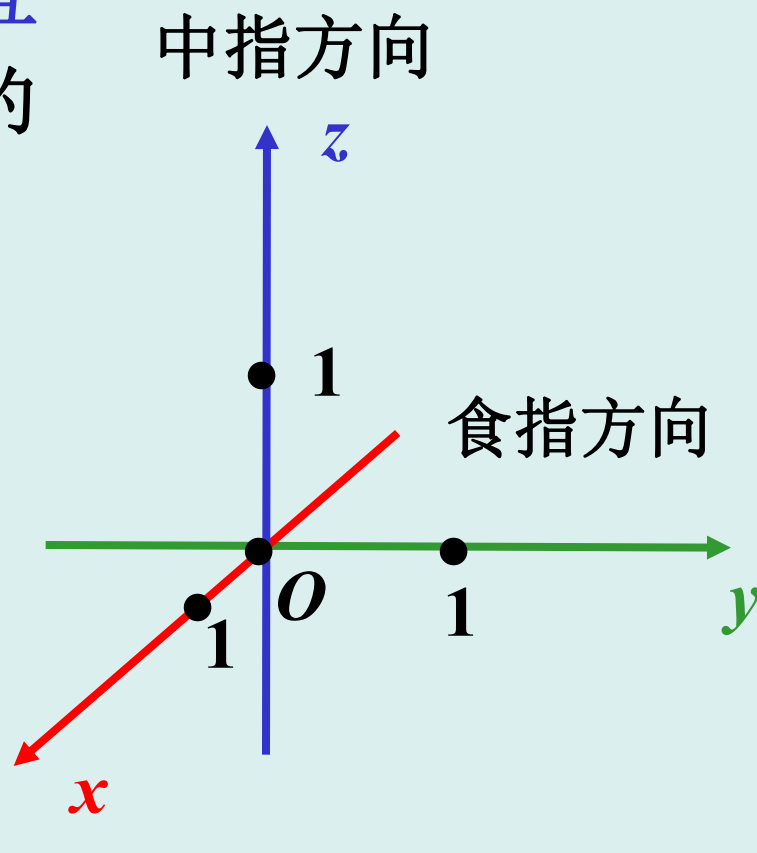




1. 空间直角坐标系

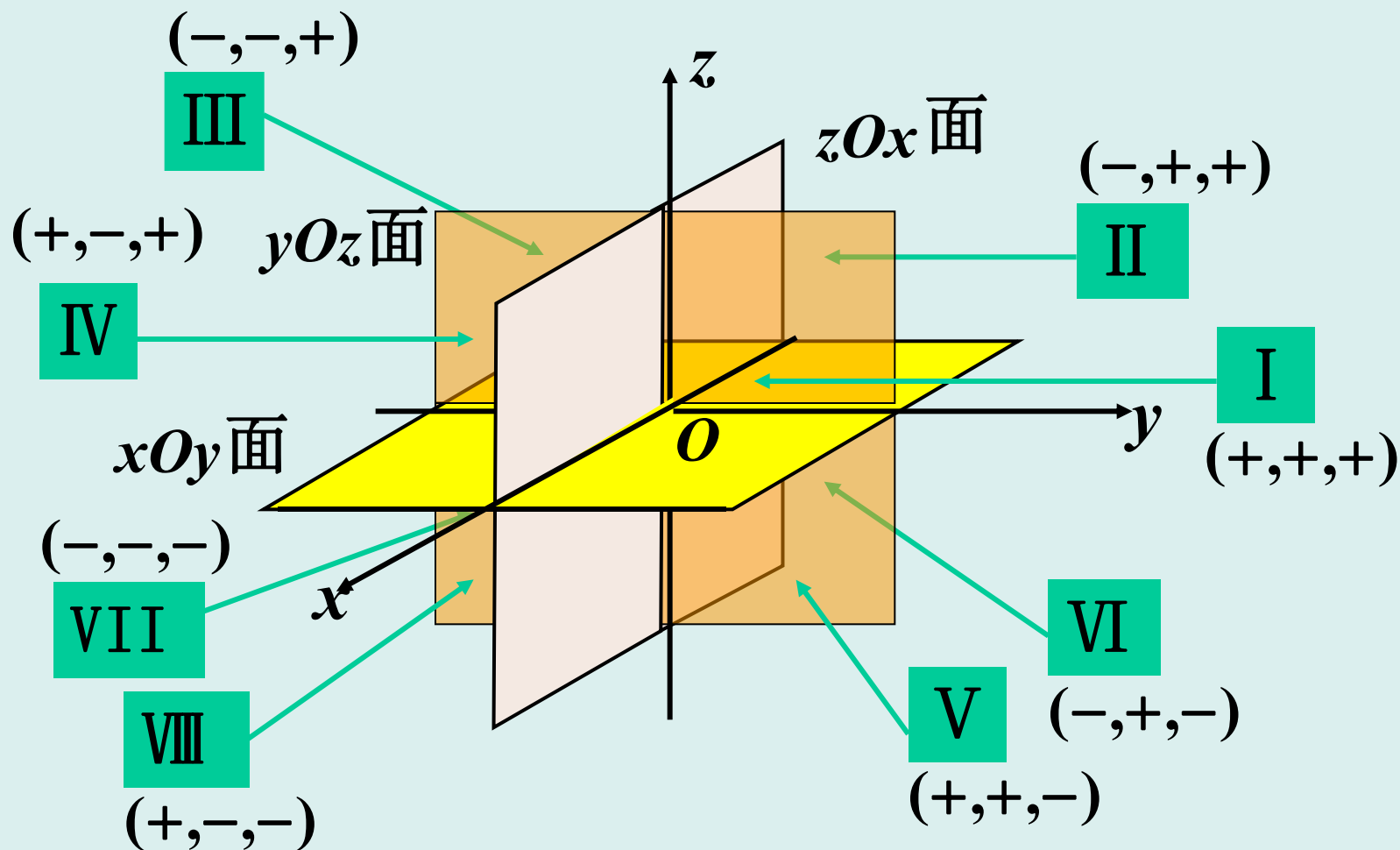
- (1) 在空间中取一定点 O 做**原点**;
- (2) 过原点作三条**两两互相垂直且成右手系的数轴**:

Ox Oy Oz





【坐标平面】 xOy , yOz , zOx 面



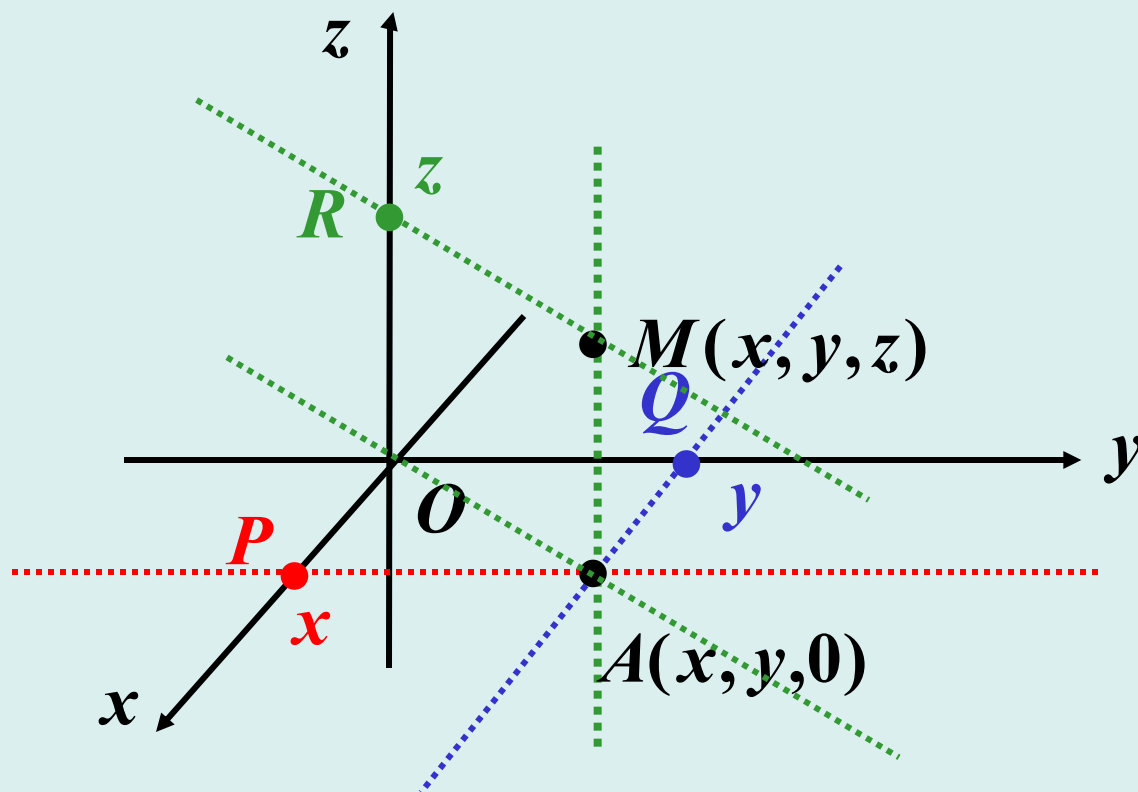
【卦限】空间直角坐标系共有八个卦限。





2. 空间点的坐标

P 点的坐标为 $(x, 0, 0)$; Q 点的坐标为 $(0, y, 0)$;
 A 点的坐标为 $(x, y, 0)$; R 点的坐标为 $(0, 0, z)$;
 M 点的坐标为 (x, y, z) .



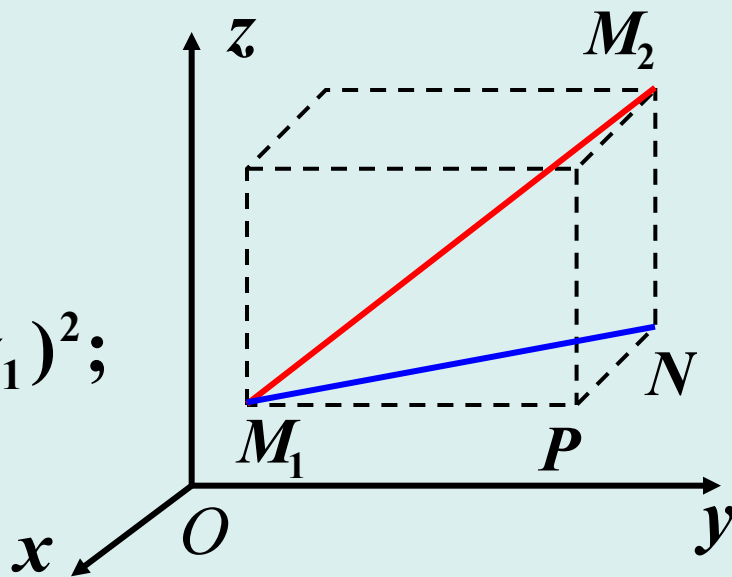


3. 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点:

在 $\text{Rt}\triangle M_1NM_2$ 和 $\text{Rt}\triangle M_1PN$ 中, 有

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= (|PN|^2 + |M_1P|^2) + |NM_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2; \end{aligned}$$



$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$





【特例】 指出下列空间点集所代表的几何图形：

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}:$$

原点 $O(0,0,0)$;

$$S_2 = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}:$$

z 坐标轴;

$$S_3 = \{(x, y, z) \mid x = y = z\}:$$

与三个坐标轴夹角都相等的直线;

$$S_4 = \{(x, y, z) \mid x = 0\}:$$

yOz 坐标面;

$$S_5 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}:$$

单位球面(以原点为心,半径为 1 的球面);





$$S_6 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}:$$

xOy 面内的单位圆上下无限移动产生的圆柱面;

$$S_7 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}:$$

过三点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 的平面;

$$S_8 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}:$$

过三点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 的平面与单位球面的交线;

$$S_9 = \{(x, y, z) \mid x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = \theta (\theta \geq 0)\}:$$

从 $(1, 0, 0)$ 出发, 沿柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 等速上升的螺旋线;

$$S_{10} = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}:$$

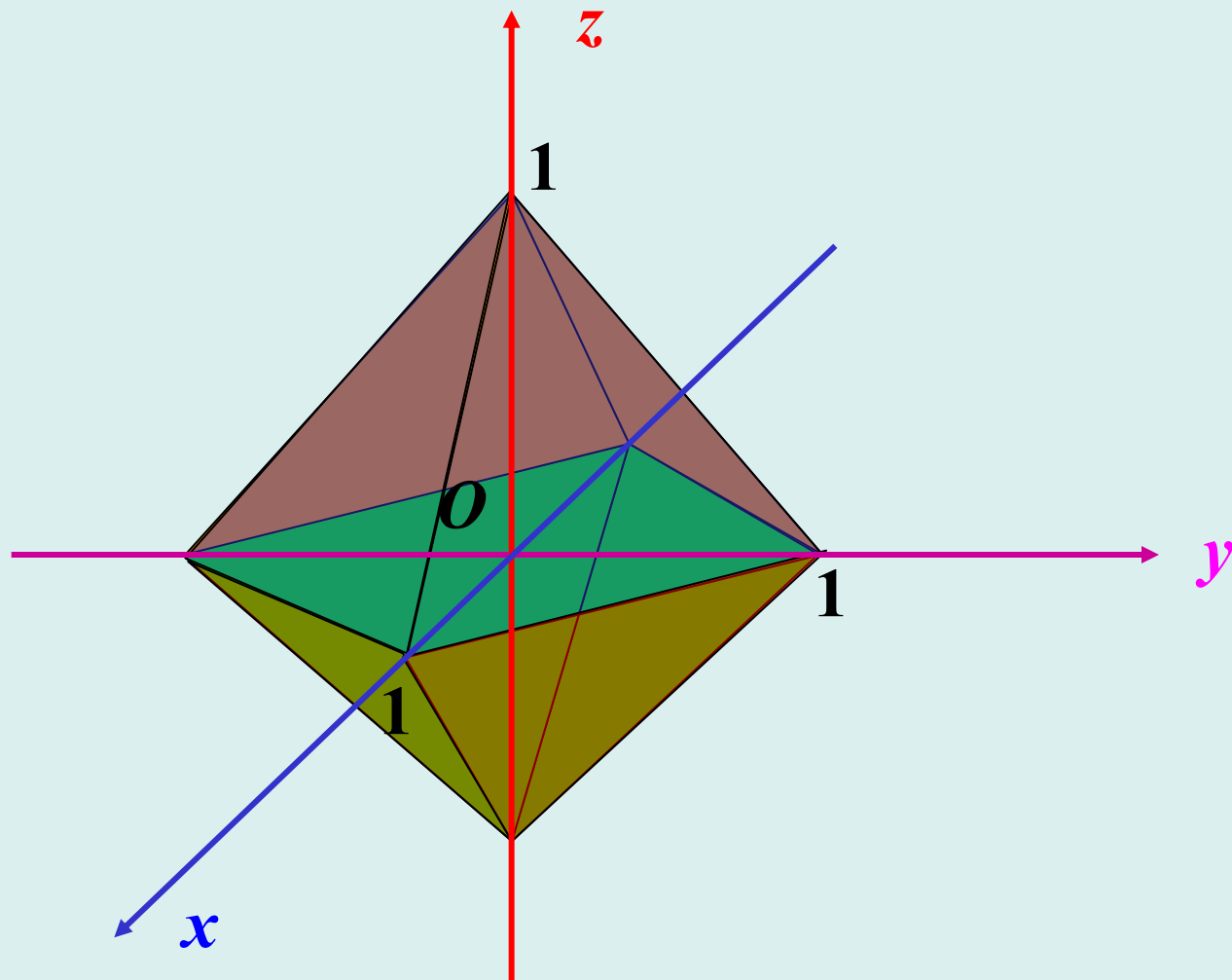
以原点为心, 半径为 1 和 2 的两个球面所夹的壳体.





【思考题】下面两集合在 $Oxyz$ 坐标系中是什么几何图形？

$$S = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| = 1\}, V = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}$$





§ 2.2 空间向量及其线性运算

本节主要内容：

- 空间向量
- 向量的坐标化
- 数乘向量
- 向量的加法和减法
- 向量的标准分解
- 向量的方向角与方向余弦

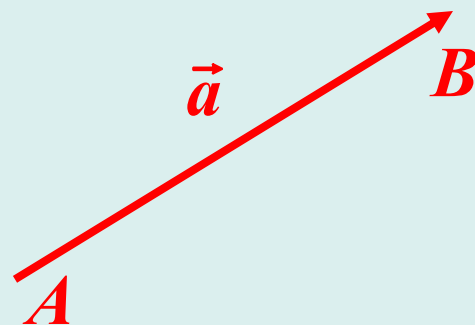




1. 空间向量

【几何空间中的向量】 空间中的有方向的线段.

【向量的表示】 若向量的起点为 A , 终点为 B , 我们用 \overrightarrow{AB} 表示此向量. 我们也用 \vec{a}, \vec{b} 等表示向量.



【向量的模】 向量 \overrightarrow{AB} 的长度称为模, 表示为 $|\overrightarrow{AB}|$.

【零向量】 模为 0 的向量称为零向量; 我们用 $\vec{0}$ 表示零向量. **约定:** 零向量的方向任意.

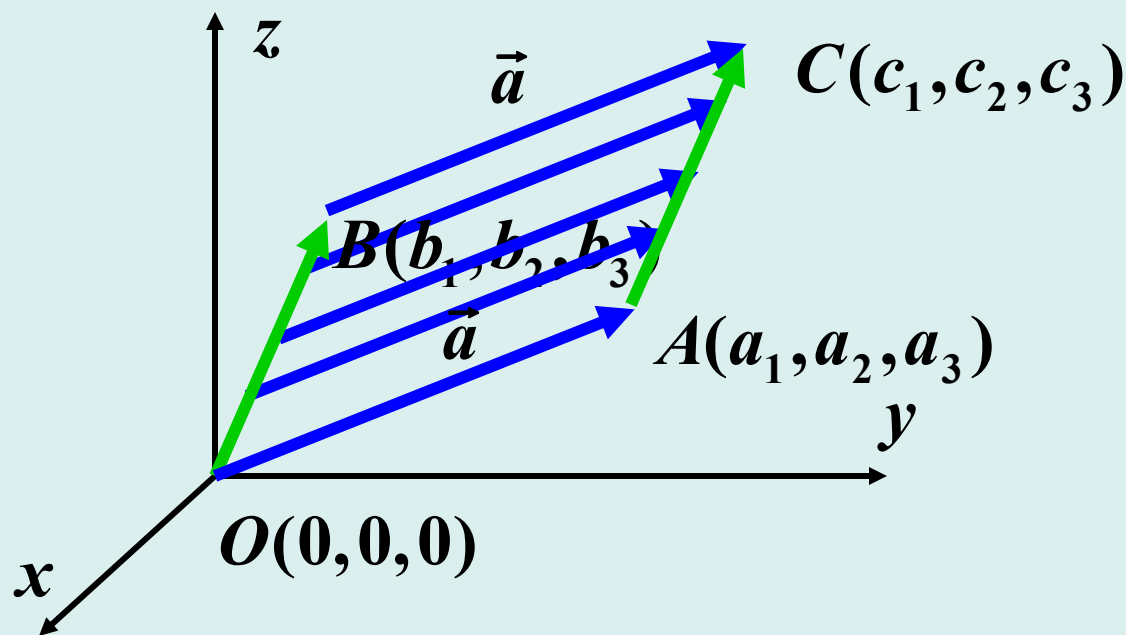
【向量的相等】 两个向量, 只要方向相同, 模相等, 我们就**规定**它们是相等的, 无论它们的空间位置如何.

【确定向量的方式】 指明方向和长度.





2. 向量的坐标化 (向量的另一种表示方法)

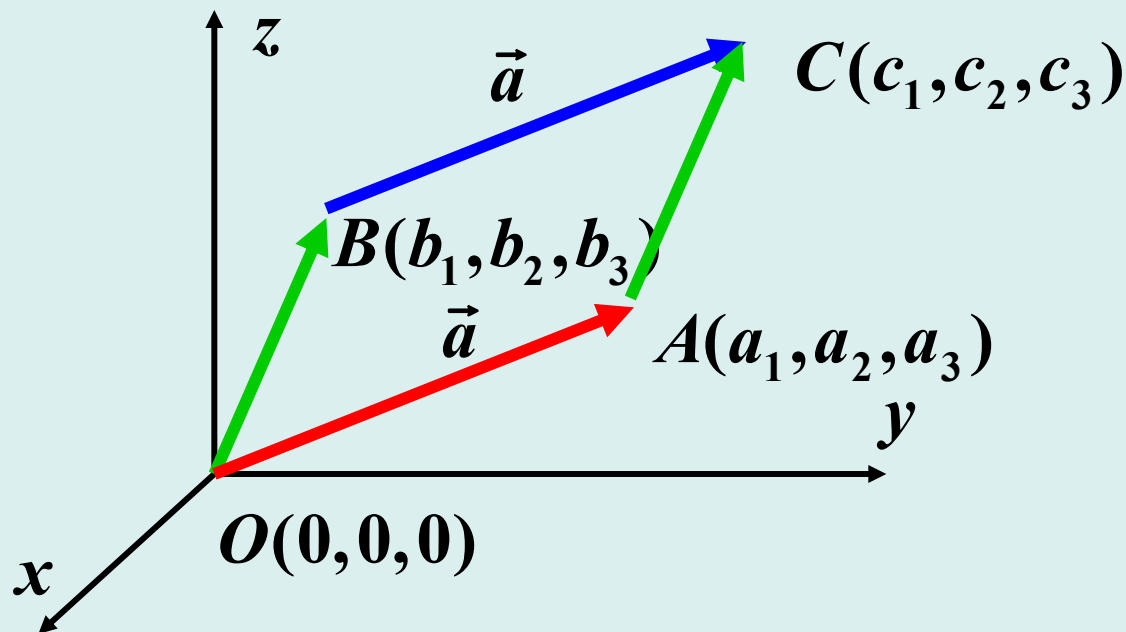


【向量的坐标】 设 $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ 为空间直角坐标系中的一个向量. 将 \vec{a} 自由平移使其起点与原点 O 重合, 终点为 $A(a_1, a_2, a_3)$;

有序数组 a_1, a_2, a_3 称为向量 \vec{a} 的坐标, 记为

$$\overrightarrow{BC} = \{a_1, a_2, a_3\}.$$





【公式1】 在前面的条件下

$$\overrightarrow{BC} = \{c_1 - b_1, c_2 - b_2, c_3 - b_3\}.$$

由于线段 BC 平行平移与 OA 重合, 因而点 C 的坐标

$$(c_1, c_2, c_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3);$$

从而

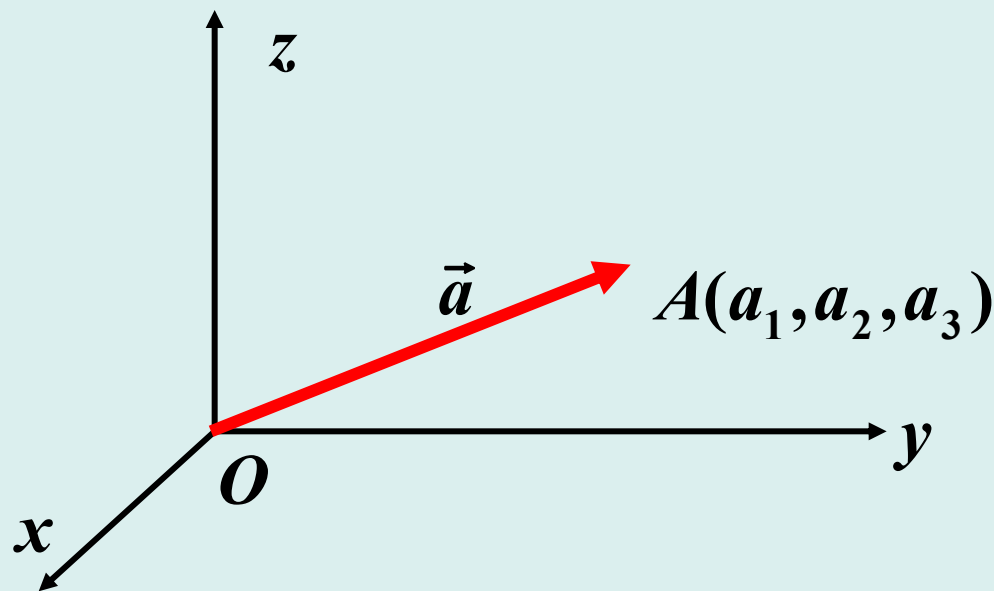
$$\overrightarrow{BC} = \{a_1, a_2, a_3\} = \{c_1 - b_1, c_2 - b_2, c_3 - b_3\}.$$





【公式2】 若向量 $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, 则 \vec{a} 的模

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$





【例1】 如图, 用坐标表示向量 \overrightarrow{OE} , \overrightarrow{GB} , \overrightarrow{DC} .

【解】 $B = (1, 1, 0),$

$$C = (0, 1, 0),$$

$$D = (1, 0, 1),$$

$$E = (1, 1, 1),$$

$$G = (0, 0, 1);$$

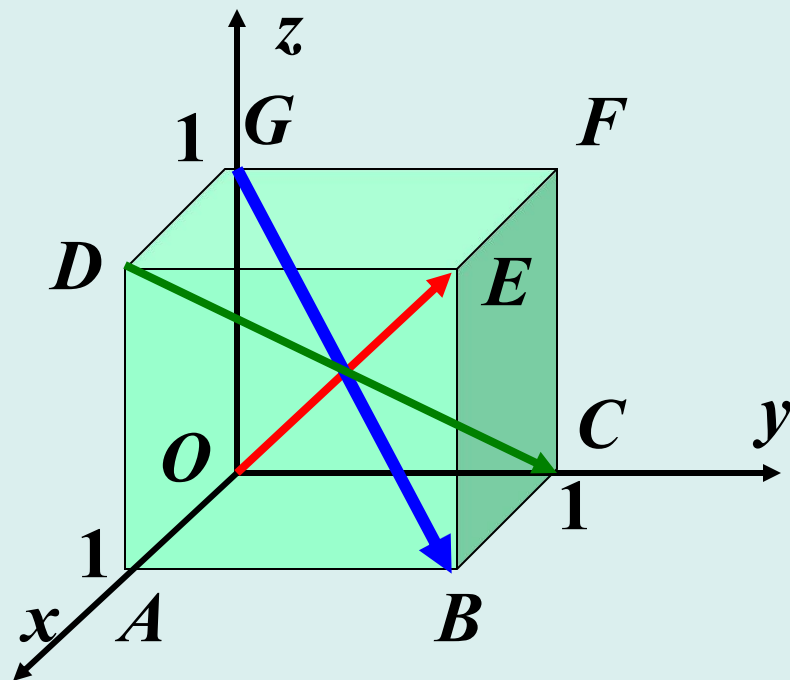
$$\overrightarrow{OE} = \{1, 1, 1\},$$

$$\overrightarrow{GB} = \{1 - 0, 1 - 0, 0 - 1\}$$

$$= \{1, 1, -1\},$$

$$\overrightarrow{DC} = \{0 - 1, 1 - 0, 0 - 1\}$$

$$= \{-1, 1, -1\}.$$





3. 数乘向量 (用一个数和一个向量构造新的向量)

【定义1】 设 \vec{a} 为一个向量, λ 为一个实数, 则 $\lambda\vec{a}$ 按下列规定表示一个向量:

(1) 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 \vec{a} 同向, $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

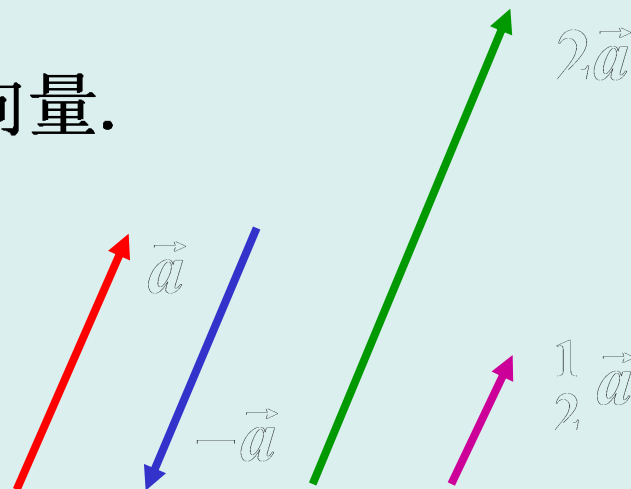
(2) 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 \vec{a} 反向, $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

(3) 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

(4) $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$;

(5) $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 为与 \vec{a} 同向的单位向量.

【例2】 参照 \vec{a} 画出 $-\vec{a}$, $2\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$.





【公式3】 $\lambda\{a_1, a_2, a_3\} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$.

【证明】 令 $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$.

$$|\vec{b}| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2 + (\lambda a_3)^2} = |\lambda| \cdot |\vec{a}| = |\lambda \vec{a}|;$$

通过检验

$$O(0, 0, 0), A(a_1, a_2, a_3), B(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

三点之间的距离知此三点共线;

当 $\lambda > 0$ 时, A, B 在 origin O 的同一侧, 即 \vec{a} 与 \vec{b} 同向;

当 $\lambda < 0$ 时, A, B 在 origin O 的两侧, 即 \vec{a} 与 \vec{b} 反向;

当 $\lambda = 0$ 时, 公式 3 平凡.



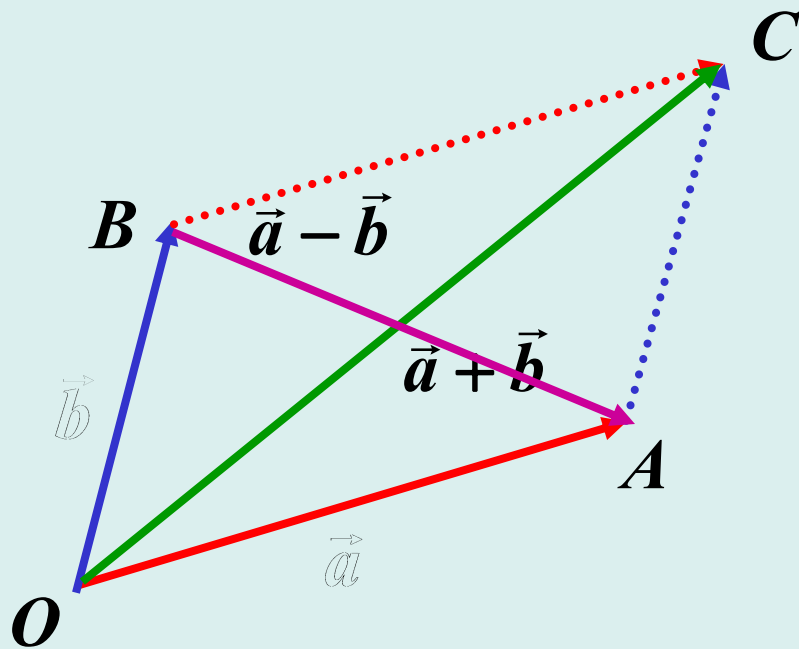


4. 向量的加法和减法

【定义2】 如图，设 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ， $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ，四边形 $OACB$ 为平行四边形：

定义 \vec{a} 与 \vec{b} 的和为 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$ ；

定义 \vec{a} 与 \vec{b} 的差为 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \overrightarrow{BA}$ 。

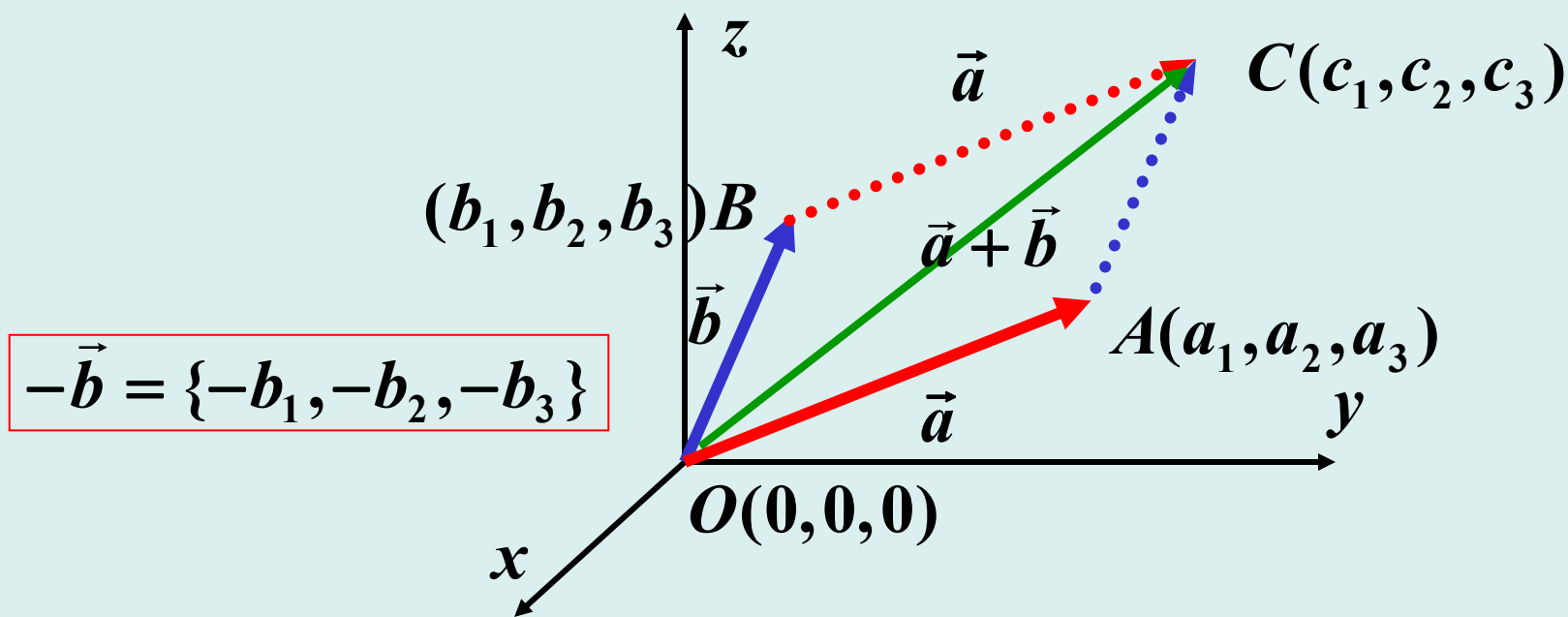




【公式4】 若向量 $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, 则
 $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\}$.

【证明】 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC} = \{c_1, c_2, c_3\}$
 $= \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$;

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\}$.





通过向量的坐标化, 很容易证明下列向量线性运算的性质.

【向量线性运算的性质】

- (1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$
- (2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c});$
- (3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b};$
- (4) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a};$
- (5) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}).$





5. 向量的标准分解

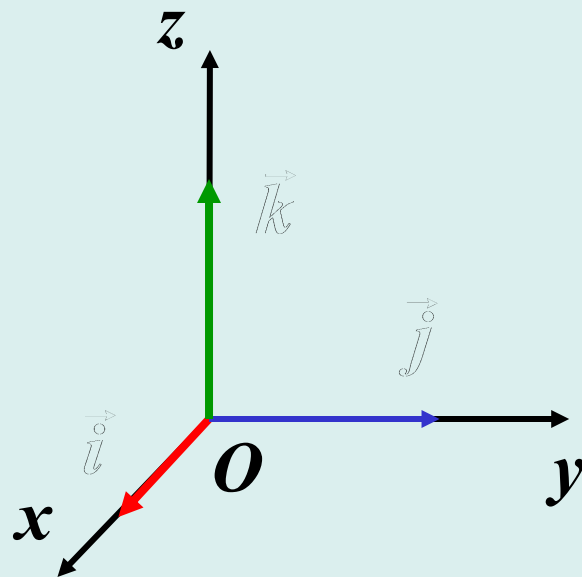
【坐标向量】 空间坐标系中，单位向量

$$\vec{i} = \{1, 0, 0\}, \quad \vec{j} = \{0, 1, 0\}, \quad \vec{k} = \{0, 0, 1\}$$

称为坐标向量.

【向量的标准分解】

$$\begin{aligned} & \{a_1, a_2, a_3\} \\ &= \{a_1, 0, 0\} + \{0, a_2, 0\} + \{0, 0, a_3\} \\ &= a_1 \{1, 0, 0\} + a_2 \{0, 1, 0\} + a_3 \{0, 0, 1\} \\ &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}. \end{aligned}$$



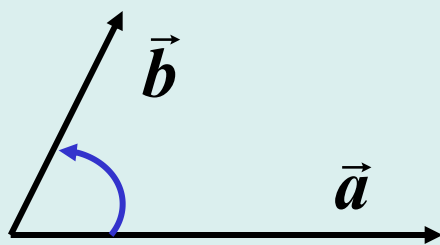
$$\{a_1, a_2, a_3\} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$





6. 向量的方向角与方向余弦

【两个向量的夹角】 对于两个向量 \vec{a} , \vec{b} , 它们之间由 0 到 π 的夹角称 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角, 记为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.



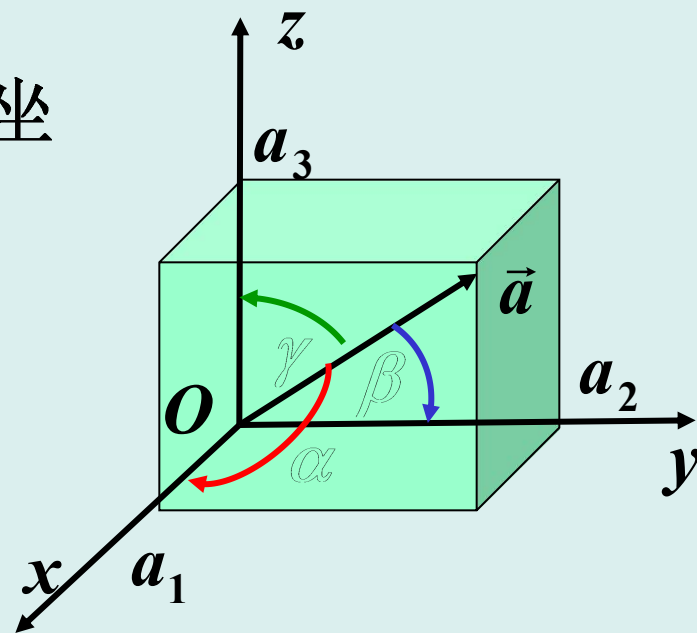
【向量的方向角】 向量 \vec{a} 与坐标向量 \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} 的夹角

$$\alpha, \beta, \gamma$$

称为向量 \vec{a} 的方向角; 称

$$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$$

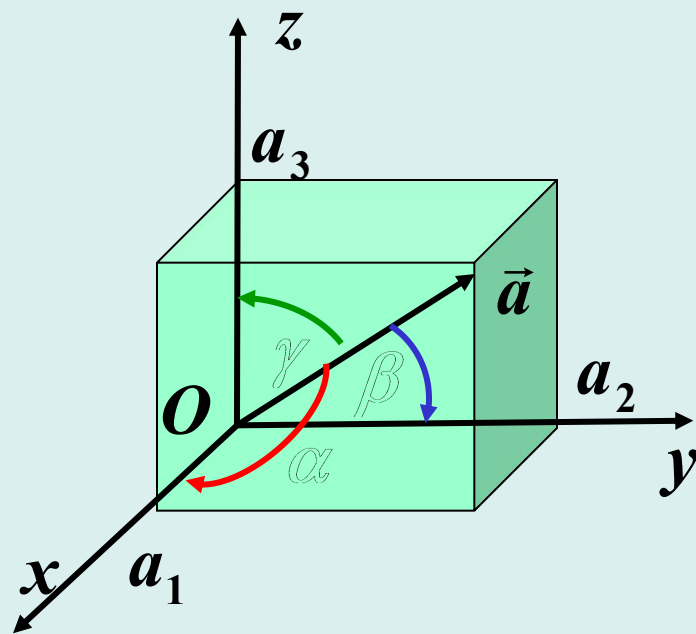
为 \vec{a} 的方向余弦.



$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$



$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

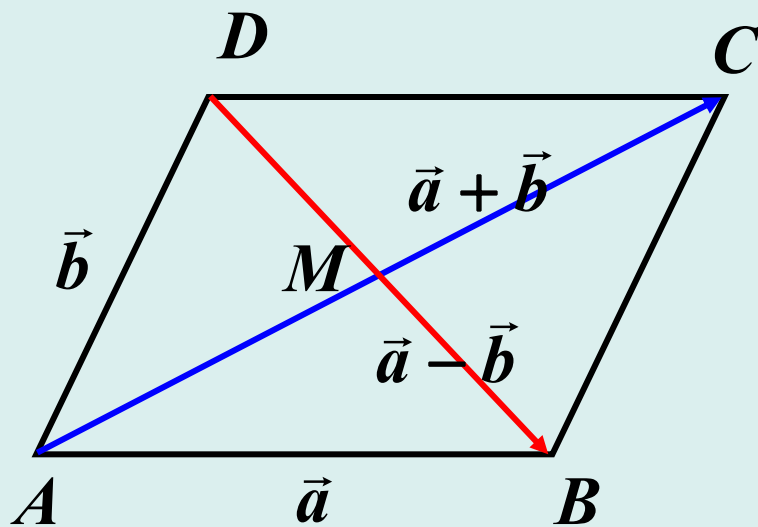




【例3】 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. 试用 \vec{a} , \vec{b} 表示向量 \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{MC} , \overrightarrow{MD} , 这里 M 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点.

【解】

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB} &= -\overrightarrow{MD} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}); \\ \overrightarrow{MC} &= -\overrightarrow{MA} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).\end{aligned}$$



【思考题】 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为单位向量, 且 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, 求 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 之间的夹角.





§ 2.3 向量的数量积和向量积

本节主要内容：

- 两个向量的数量积
- 两个向量的向量积

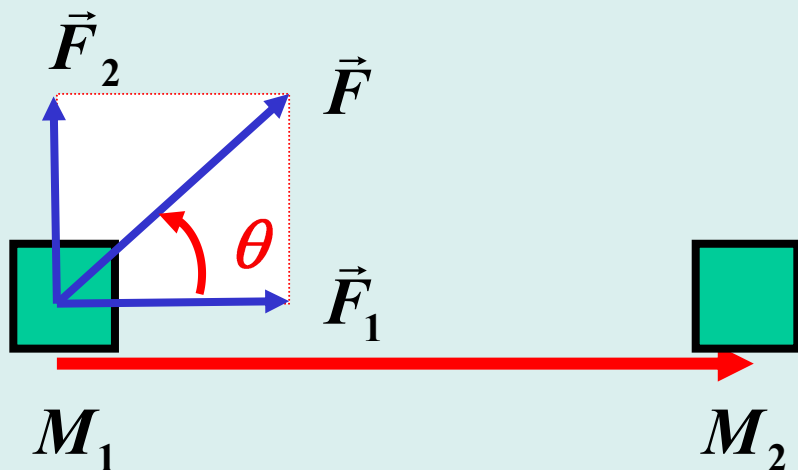




1. 两个向量的数量积

【常力作功】 如图， \vec{F} 为一个常力 (大小和方向不变的力)，一物体在 \vec{F} 的作用下沿直线由 M_1 移动到 M_2 ，则在此过程中 \vec{F} 所作的功

$$\begin{aligned} W &= |\vec{F}_1| \cdot |\overline{M_1M_2}| = (|\vec{F}| \cos \theta) \cdot |\overline{M_1M_2}| \\ &= |\vec{F}| \cdot |\overline{M_1M_2}| \cdot \cos \theta \end{aligned}$$





【定义1】 设 \vec{a}, \vec{b} 两个向量的夹角为 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$, 则称实数

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \triangleq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$$

为向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的**数量积**.

【评注】

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (交换律);

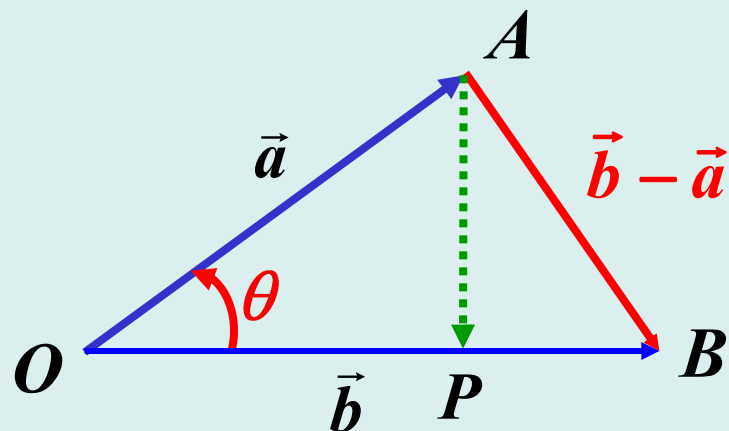
(2) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$;

(4) 实数 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} \triangleq \vec{a} \cdot \vec{b}^0 = |\vec{a}| \cos \theta$ 称向量 \vec{a} 在向量 \vec{b} 上

若 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$, 则 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = |OP|$; 的投影;

若 $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, 则 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = -|OP|$.





【定理2.1】 在空间直角坐标系中, 若 $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$,
 $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, 则 \vec{a}, \vec{b} 的数量积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

【证明】 由余弦定理,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \theta :$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta \quad (\text{改向量形式})$$

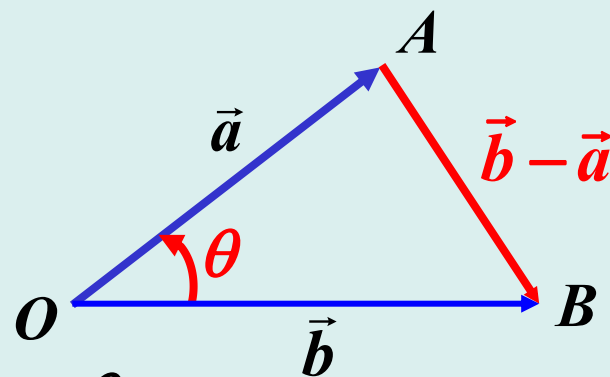
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

$$- [(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2] \}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$





由上述定理, 通过直接、简单的代数验算, 很轻松地得到下列有关数量积的性质.

【向量内积的性质】

$$(1) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{数量积对加法的分配律});$$

$$(2) \quad (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}).$$

【(1)的验证】

$$\text{令 } \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \quad \vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}:$$

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\} \cdot \{c_1, c_2, c_3\} \\&= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 \\&= (a_1c_1 + b_1c_1) + (a_2c_2 + b_2c_2) + (a_3c_3 + b_3c_3) \\&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\&= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$



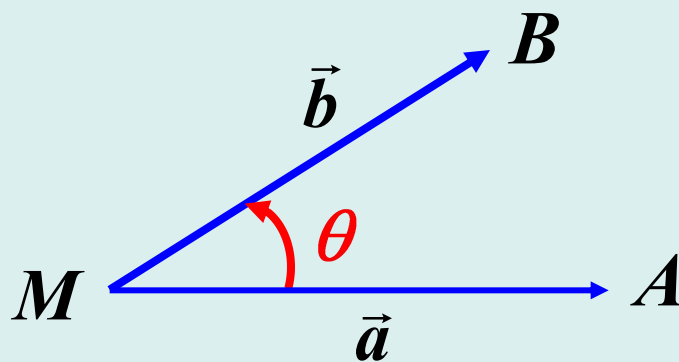


【例1】 已知空间三点 $M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$, $B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.

【解】 $\vec{a} = MA = \{1, 1, 0\}$,
 $\vec{b} = MB = \{1, 0, 1\}$;

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\begin{aligned} \angle AMB &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \arccos \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ \end{aligned}$$

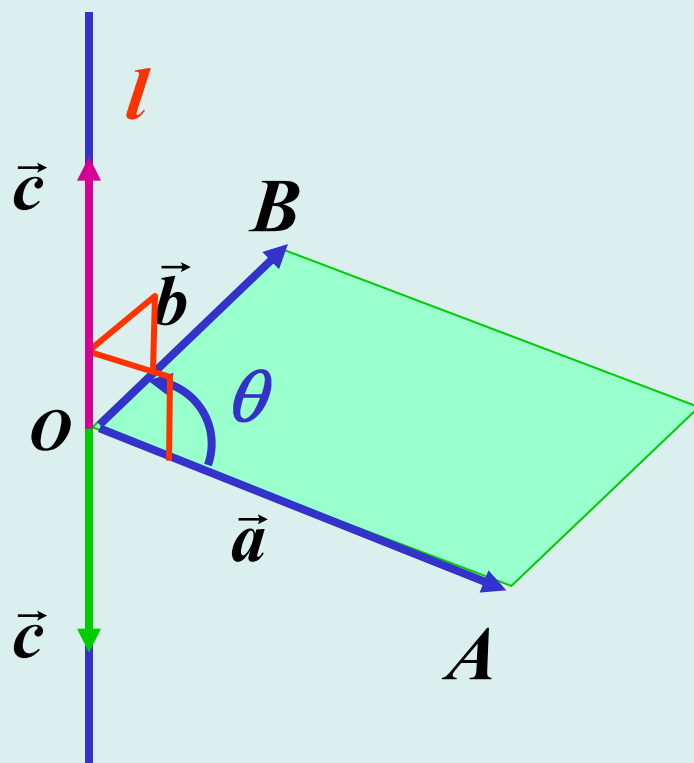




2. 两个向量的向量积 (由两个向量构造一个新向量)

在许多方面, 对于给定的两个不共线的非零向量 \vec{a} , \vec{b} , 需要找另一个同时与 \vec{a} , \vec{b} 垂直的非零向量 \vec{c} , 并且要求 \vec{c} 的模有某种特性.

如图, 由直观, 同时与 \vec{a} , \vec{b} 垂直的非零向量 \vec{c} 在直线 l 上, 有无限多个, 但方向可指向方上或下方, 且为一个非零向量 \vec{d} 的一切 ‘倍数’ $\lambda\vec{d}$.





【问题】 若向量 $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 不共线且都不是零向量, 求同时垂直于 \vec{a}, \vec{b} 的向量 \vec{c} .

【试解】 观察行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$:

其第一行的代数余子式所构成的向量

$$\{A_{11}, A_{12}, A_{13}\} = \{a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\}$$

同时垂直于 \vec{a}, \vec{b} .

此时, 若 $A_{11} = A_{12} = A_{13} = 0$, 则容易推出:

a_1, a_2, a_3 与 b_1, b_2, b_3 对应成比例(从而 \vec{a}, \vec{b} 共线)

总之, 当 λ 取遍一切实数时,

$$\vec{c} = \lambda \{a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\}$$

为所求的一切向量.



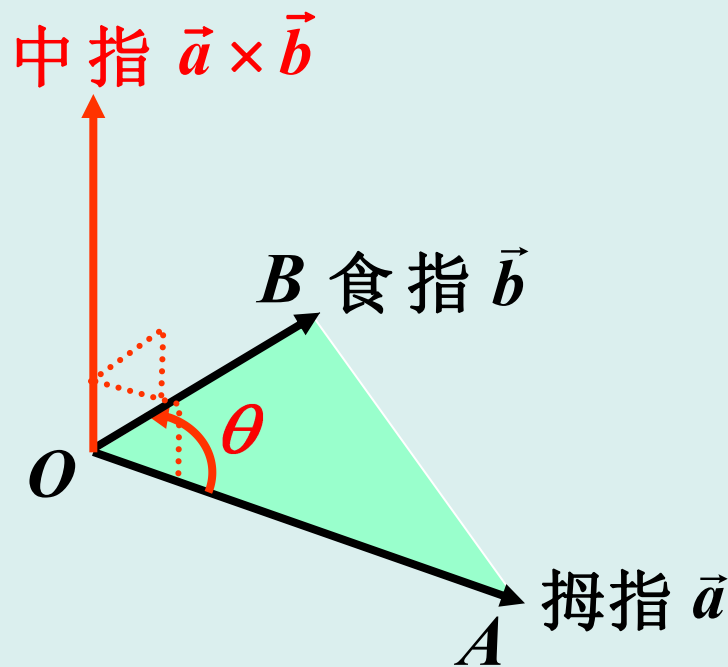


【定义2】 定义 \vec{a} 与 \vec{b} 的**向量积** $\vec{a} \times \vec{b}$ 是满足下列条件的向量：

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ 同时垂直于 \vec{a}, \vec{b} ;
- (2) 三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ 成右手系;
- (3) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ ($\triangle OAB$ 的面积的二倍).

【评注】

- (1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;
- (2) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;
- (3) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$;
- (4) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$,
 $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$,
 $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.





【定理2.2】 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，若向量 $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ ，则 \vec{a}, \vec{b} 的向量积

$$\vec{a} \times \vec{b} = \{a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1\}.$$

【记忆方式】

$$\begin{aligned} & \{a_1, a_2, a_3\} \times \{b_1, b_2, b_3\} \\ &= \{a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1\} \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\} \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$





【证明】 由前面的讨论知, 存在实数 λ 使得

$$\vec{a} \times \vec{b} = \lambda \{a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1\};$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \lambda^2 [(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2];$$

另一方面, 由向量积长度的定义:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

$$\lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1.$$

再由 $\vec{i} = \{1, 0, 0\}$, $\vec{j} = \{0, 1, 0\}$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = \{0, 0, 1\}$, 知 $\lambda = 1$.

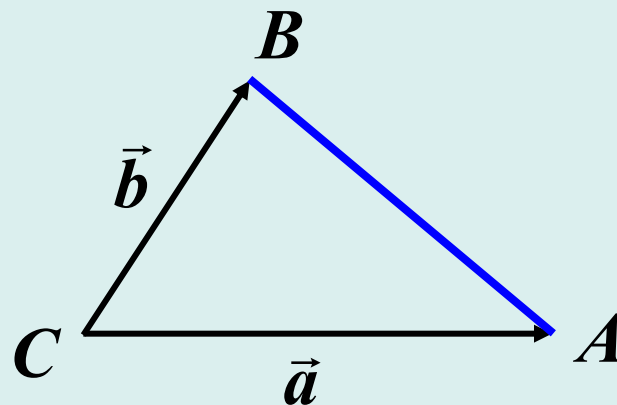




【例2】 给定三点 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$, $C(2,4,7)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

【解】 $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = \{-1, -2, -4\}$,

$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = \{1, 0, -2\}$;



$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \left\{ \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right\} \\ &= \{4, -6, 2\};\end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{14}$$





由上述定理，通过直接、简单的代数验算，很轻松地得到下列有关向量积的性质。

【向量积的性质】

- (1) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (向量积对加法的分配律);
- (2) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$.

【练习题】 验证(1).





【思考题】 用数量积证明三角形的三条高交于一点.

【证明】 如图, 设

$AO \perp BC$, $BO \perp CA$, $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CO} = \vec{c}$,
则

$$\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{c} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b};$$

从而

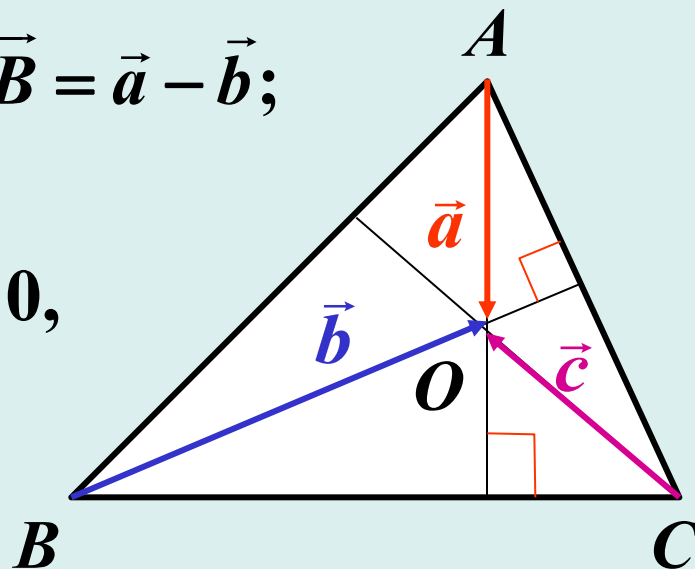
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0,$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0,$$

$$-\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0,$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0,$$

$$OC \perp AB$$



$OC \perp AB ?$





§ 2.4 平面及其方程

本节主要内容:

- 平面的点法式方程
- 平面的一般方程
- 平面的截距式方程
- 两平面特殊的位置关系
- 两平面的夹角
- 点到平面的距离





1. 平面的点法式方程

【法向量】垂直于平面的非零向量.

如图, 平面 π 的法向量:

$$\vec{n} = \{A, B, C\};$$

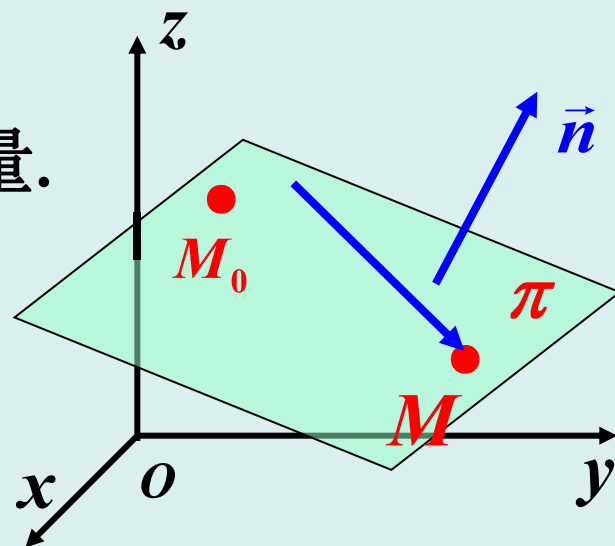
$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi:$$

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

即 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

【求平面方程的方法】(记住!):

- (1) 在平面上找出一个点;
- (2) 找出一个与平面垂直的非零向量(法向).



平面的点
法式方程





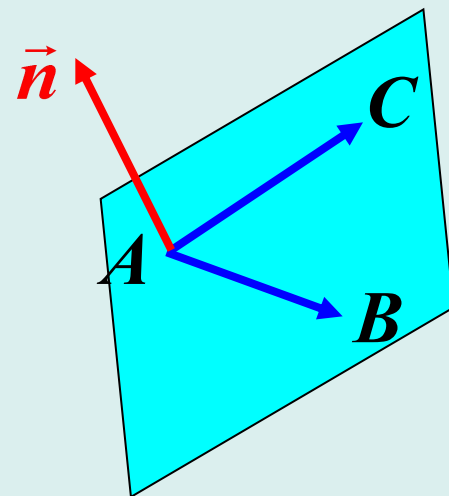
【例1】 求过三点 $A(2, -1, 4)$, $B(-1, 3, -2)$ 和 $C(0, 2, 3)$ 的平面方程.

【解】 $\overrightarrow{AB} = \{-3, 4, -6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-2, 3, -1\}$;

取 $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \{14, 9, -1\};$$



平面方程为

$$14(x - 2) + 9(y + 1) - (z - 4) = 0,$$

化简得

$$14x + 9y - z - 15 = 0.$$



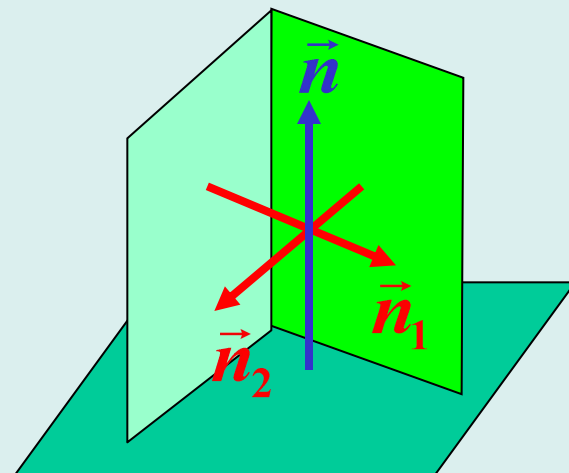


【例2】 求过点(1,1,1), 且垂直于平面 $x - y + z = 7$ 和 $3x + 2y - 12z + 5 = 0$ 的平面方程.

【解】 $\vec{n}_1 = \{1, -1, 1\}$, $\vec{n}_2 = \{3, 2, -12\}$;

取法向量

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -12 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -12 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right\} \\ &= \{10, 15, 5\} = 5\{2, 3, 1\};\end{aligned}$$



平面方程为

$$2(x-1) + 3(y-1) + (z-1) = 0,$$

化简得

$$2x + 3y + z - 6 = 0.$$





2. 平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$\begin{aligned} & A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ \Rightarrow & Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0 \end{aligned}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

平面一般方程

法向量为 $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

几种特殊情况:

$$(-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D)$$

- (1) $D = 0$: 平面过原点;
- (2) $A = 0$: 平面平行于 x 轴;
- (3) $A = 0, D = 0$: 平面过 x 轴;
- (4) $A = 0, B = 0$: 平面平行于 xOy 平面.





【例3】 指出下列平面的特殊位置：

(1) $2x + y + z = 0$; (2) $x + 2z = 0$;

(3) $3x - y = 1$; (4) $y = 1$.

【解】 (1) 过原点; (2) 过 y 轴;
(3) 平行 z 轴; (4) 平行 zOx 平面.

【例4】 求过 x 轴且与平面 $x - y + 2z = 0$ 垂直的平面.

【解】 平面为 $By + Cz = 0$:

平面的法向 $\vec{n} = \{0, B, C\}$;

由条件知

$$\{0, B, C\} \perp \{1, -1, 2\}, \quad B = 2C;$$

平面方程为 $2_1y + z = 0$.





3. 平面的截距式方程

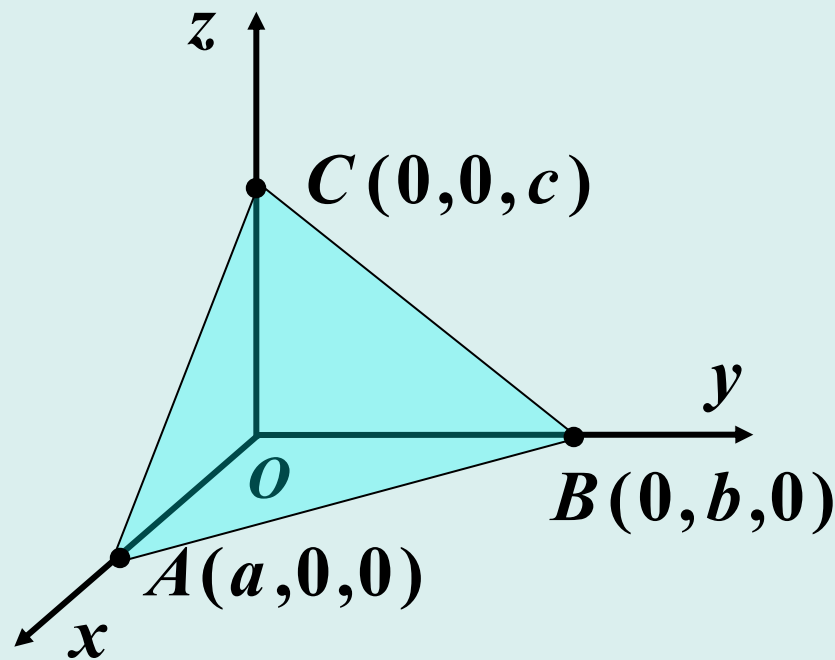
若 $abc \neq 0$, 则平面方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 过

$$A(a, 0, 0), \quad B(0, b, 0), \quad C(0, 0, c)$$

三点.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

平面截距式方程



a, b, c 分别称平面在三个坐标轴上的截距。



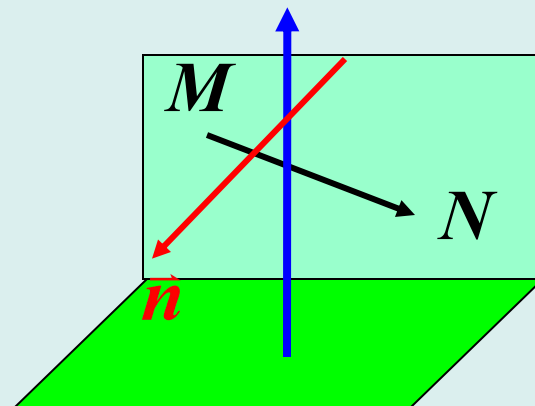


【例5】 求过 $M(1, 1, 1)$ 和 $N(0, 1, -1)$ 两点，且垂直于平面 $x + y + z = 0$ 的平面方程.

【解】 取法向量

$$\{1, 1, 1\} = \vec{n}_1$$

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{MN} \times \{1, 1, 1\} \\ &= \{-1, 0, -2\} \times \{1, 1, 1\} \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} \\ &= \{2, -1, -1\};\end{aligned}$$



平面方程为

$$2(x-1) - (y-1) - (z-1) = 0,$$

化简得

$$2x - y - z = 0.$$





4. 两平面特殊的位置关系

设有两个平面 $\begin{cases} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, 则

$$(1) \quad \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$$

$$(2) \quad \pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

【例6】 讨论以下各组里两平面的位置关系:

$$(1) \quad 2x - y + z - 1 = 0, \quad 4x - 2y + 2z - 1 = 0;$$

$$(2) \quad 2x - y - z + 1 = 0, \quad x + 3y - z - 2 = 0.$$

【解】 (1) $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \pi_1 // \pi_2$ (不重合);

$$(2) \quad 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \pi_1 \perp \pi_2$$





5. 两平面的夹角

【约定】 两个平面的法线(不是法向)的夹角(锐角)称为两个平面的夹角.

若两个平面的法向为

$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$$

则这两个平面的夹角

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \\ &= \arccos \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \end{aligned}$$





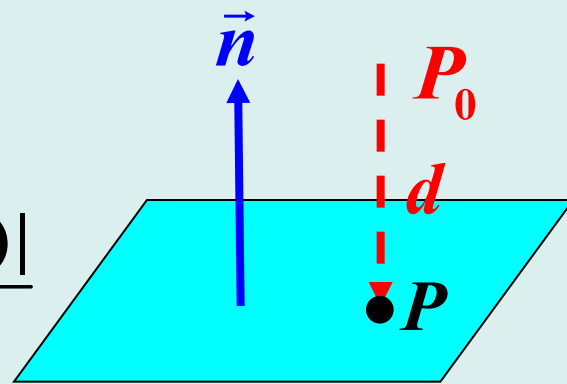
6. 点到平面的距离

【公式】点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$

的距离为 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

【证明】 P_0 在平面上的垂直投影点为 $P(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} d &= |\overrightarrow{P_0P}| = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$



$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = \pm |\overrightarrow{PP_0}| \cdot |\vec{n}|$$

$$(Ax + By + Cz = -D)$$





2.5 空间直线及其方程

本节主要内容:

- 直线的参数式与点向式方程
- 直线的一般方程
- 直线与直线、直线与平面的位置关系
- 直线与平面的夹角及位置关系
- 平面束方程





1. 直线的参数式与点向式方程

【直线的方向向量】

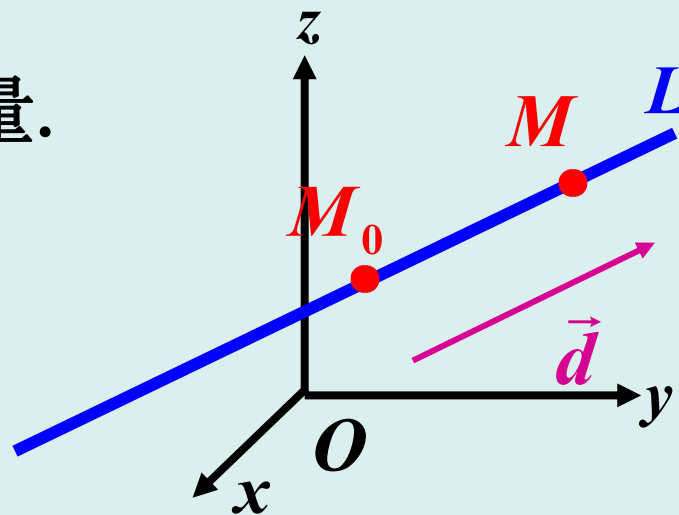
平行于直线的一非零向量.

设直线 L 的方向向量:

$$\vec{d} = \{l, m, n\};$$

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$:

$$M(x, y, z) \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{d} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{d} \quad (|t| < +\infty)$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

直线的参数式方程

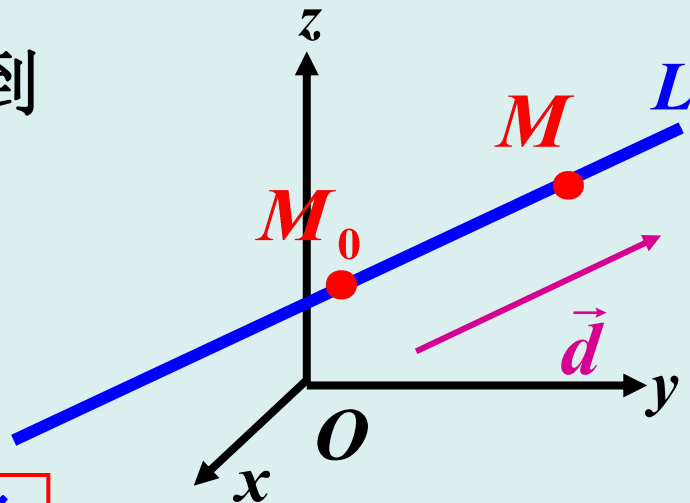




由
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \quad (|t| < +\infty) \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$
 得到

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

直线的点向式(对称式)方程



【评注】 $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ 中 l, m, n 可以为 0;

如 $l = 0$, 则 $x - x_0 = lt = 0$, 因而 $\frac{x - x_0}{l}$ 视为 $\frac{0}{0}$ 即可。

例如, $\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{1}$ 为
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad (|t| < +\infty) \\ z = t \end{cases}$$
 即 z 轴。

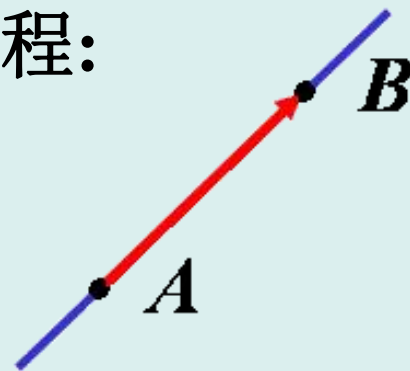




【例1】 求过 $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ 两点的直线方程。

【解】 取 $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \{2, 0, -2\}$, 直线方程:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$



【例2】 求过 $A(1, 0, -1)$ 点且与平面

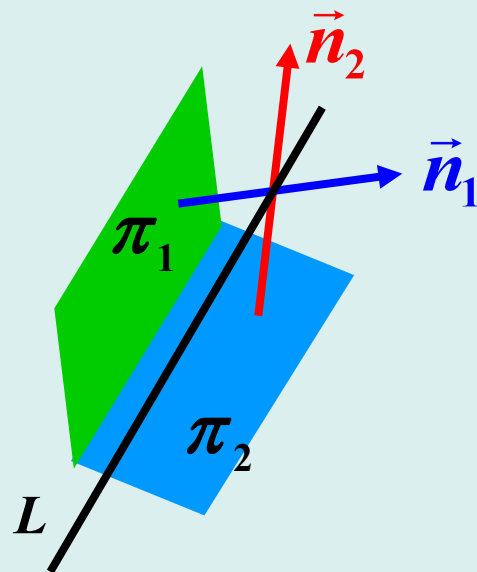
$$\pi_1 : x + 2y - z = 0, \quad \pi_2 : 2x - y - z = 1$$

平行的直线方程。

【解】 取 L 的方向向量

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right\} \\ &= \{-3, -1, -5\}; \end{aligned}$$

直线 L 方程为 $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{5}$





【例3】 求 $A(1, 2, 3)$ 在平面 $\pi: x - y + 2z + 1 = 0$ 的投影点 A' 的坐标.

【解】 过点 A 且垂直 π 的直线的参数式方程为

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases};$$

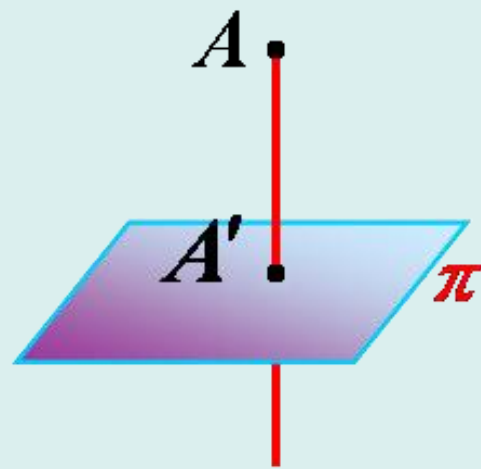
代入平面 π 的方程中得

$$\begin{aligned} 1 + t - (2 - t) + 2(3 + 2t) + 1 &= 0, \\ t &= -1; \end{aligned}$$

将 $t = -1$ 代回直线的方程得到

$$x = 0, \quad y = 3, \quad z = 1;$$

即 $A'(0, 3, 1)$.



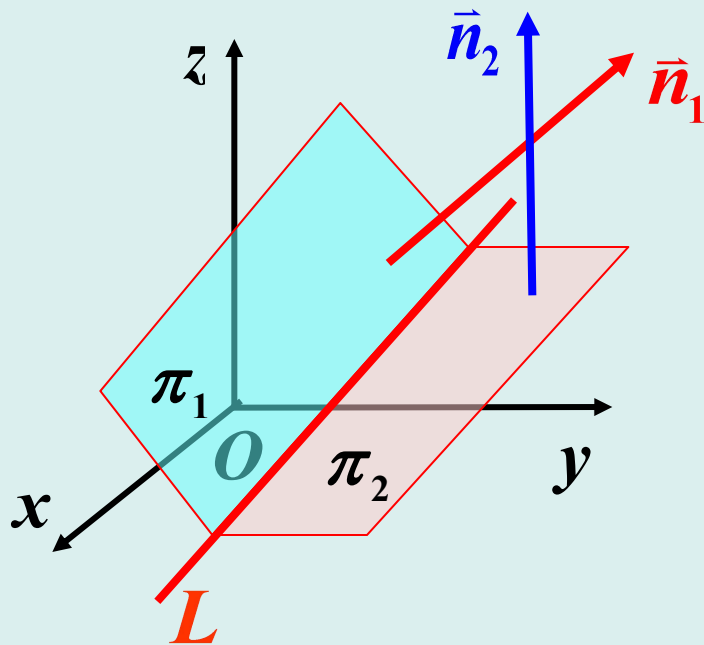


2. 直线的一般方程

空间直线 L 可看成两平面的交线：

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

其中 L 的方向向量 $\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$



直线的一般方程





【例4】 将直线 $L: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ 化为对称式方程.

【解】 取 $\vec{d} = \{1, 1, 1\} \times \{2, -1, 3\} = \{4, -1, -3\}$;

在直线上令 $z = 0$, 得 $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$,

$$x = -\frac{5}{3}, \quad y = -\frac{2}{3};$$

L 的方程:

$$\frac{x + \frac{5}{3}}{4} = \frac{y + \frac{2}{3}}{-1} = \frac{z}{-3}$$

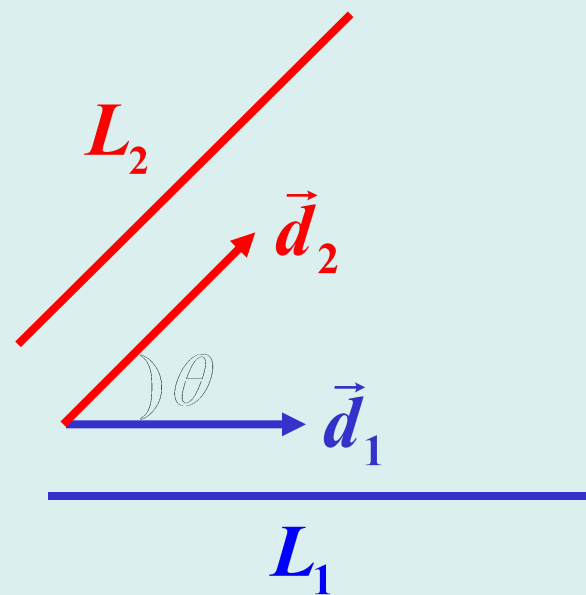




3. 直线与直线、直线与平面的位置关系

【两直线的夹角】 方向向量的夹角(锐角).

$$\theta = \arccos \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2|}$$



【两直线的特殊位置关系判定】

$$(1) L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \perp \vec{d}_2$$

$$(2) L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 \parallel \vec{d}_2$$





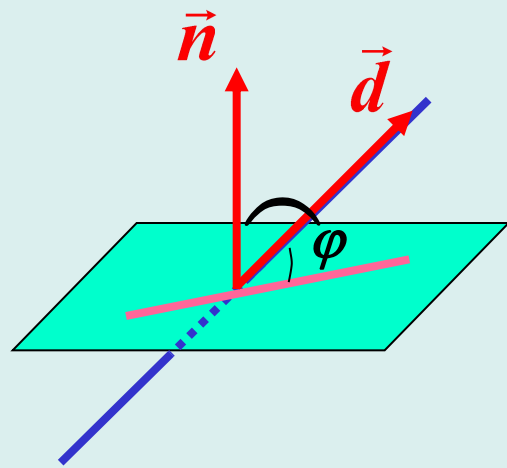
4. 直线与平面的夹角及位置关系

【直线与平面的夹角】 直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ , $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

若 $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$,
 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$,

则

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|}$$



【直线与平面的特殊位置关系判定】

(1) $L \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{d} \perp \vec{n}$

(2) $L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{d} \parallel \vec{n}$





5. 平面束方程

设直线 L 为 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\pi_2) \end{cases}$, 则方程

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

包罗了过直线 L 的一切平面方程 (π_2 除外).

$$\vec{n}_\lambda = \vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2 = \{A_1 + \lambda A_2, B_1 + \lambda B_2, C_1 + \lambda C_2\},$$

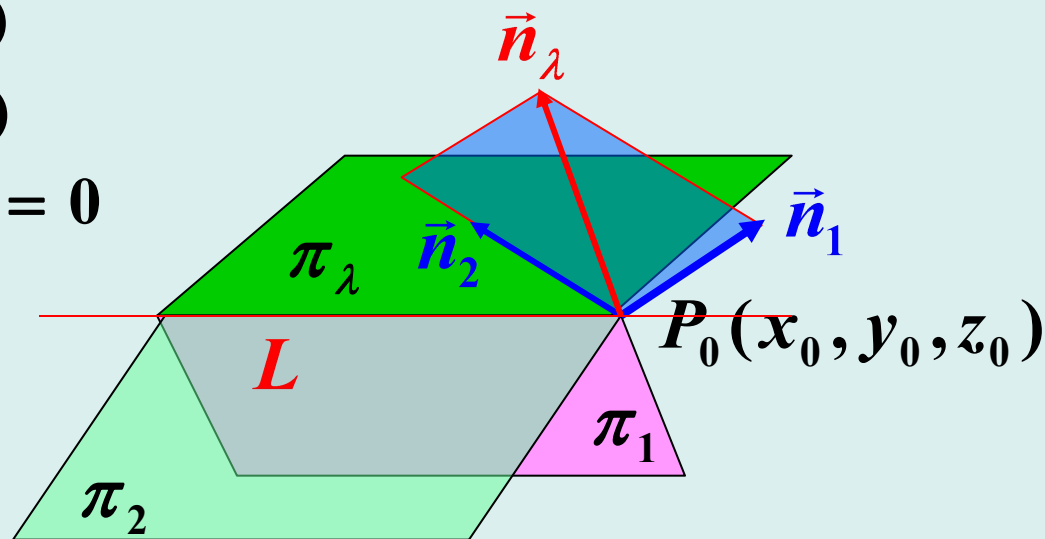
$$(A_1 + \lambda A_2)(x - x_0)$$

$$+ (B_1 + \lambda B_2)(y - y_0)$$

$$+ (C_1 + \lambda C_2)(z - z_0) = 0$$

化简为上述的方程.

【注意】 无论 λ 取何值, \vec{n}_λ 都不等于 \vec{n}_2 .





【例5】 求直线 $L: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+y+z=0$

上的投影直线 L' .

【解】 过 L 的平面束方程为

$$(x+y-z-1) + \lambda(x-y+z+1) = 0,$$

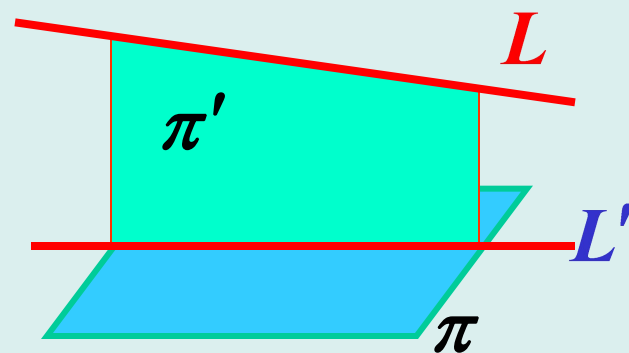
$$\text{即 } (\lambda+1)x + (1-\lambda)y + (\lambda-1)z + \lambda - 1 = 0.$$

在平面束方程中找一个与 π 垂直的平面 π' :

$$(\lambda+1) \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 + (\lambda-1) \cdot 1 = 0, \quad \lambda = -1;$$

$$\Rightarrow \pi' : y - z - 1 = 0$$

所以投影直线 $L' : \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$





【思考题】(不用平面束)求直线 $L: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$

在平面 $\pi: x + y + z = 0$ 上的投影直线 L' .

【解】 L 的方向向量

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right\} \\ &= \{0, -2, -2\} = (-2)\{0, 1, 1\}, \end{aligned}$$

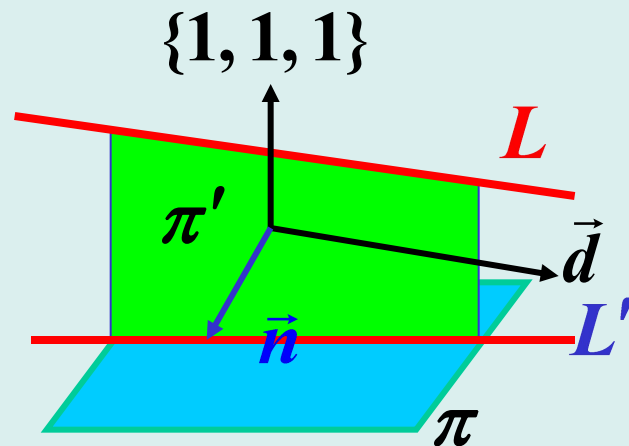
$$(0, 1, 0) \in L;$$

过直线 L 与 $x + y + z = 0$ 垂直的平面 π' 的法向为

$$\vec{n} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{0, 1, -1\};$$

平面 π' 的方程: $0(x - 0) + 1(y - 1) + (-1)(z - 0) = 0,$

$$y - z - 1 = 0$$





§ 2.6 空间曲面及其方程

本节主要内容:

- 球面
- 柱面
- 旋转曲面
- 椭圆抛物面
- 椭球面
- 双曲抛物面 (马鞍面)
- 单叶双曲面
- 双叶双曲面





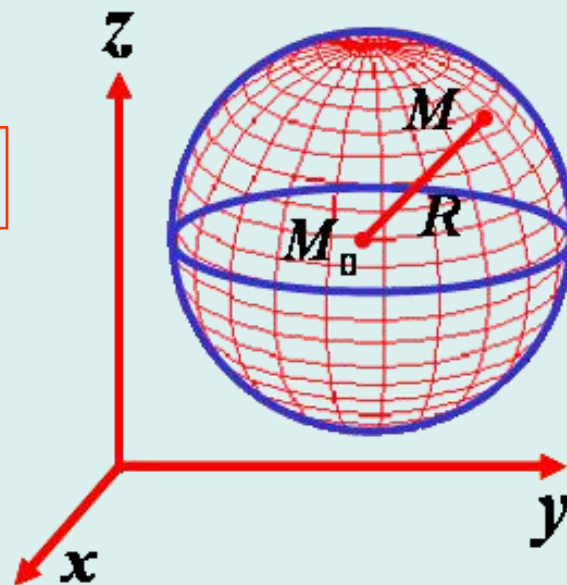
1. 球面

以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为心, R 为半径的球面的方程

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

球面的一般方程为:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$



【例1】 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ 的球心及半径.

【解】 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$;

球心为 $(0, 0, R)$, 半径为 R .

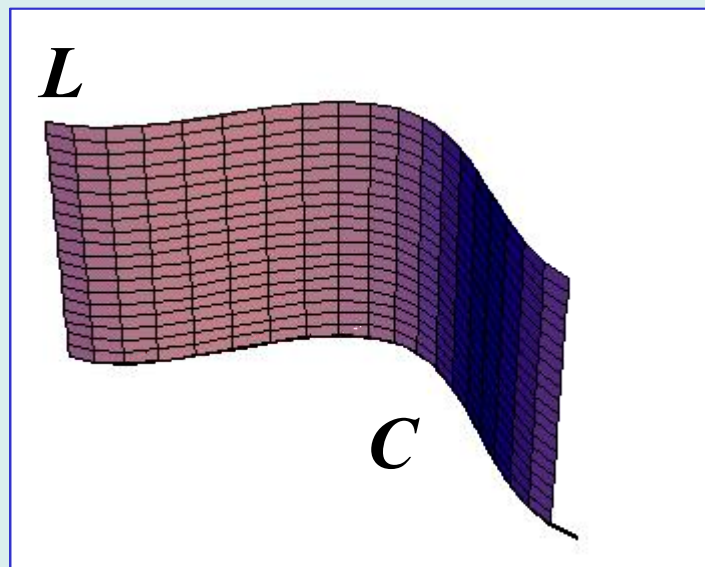




2. 柱面

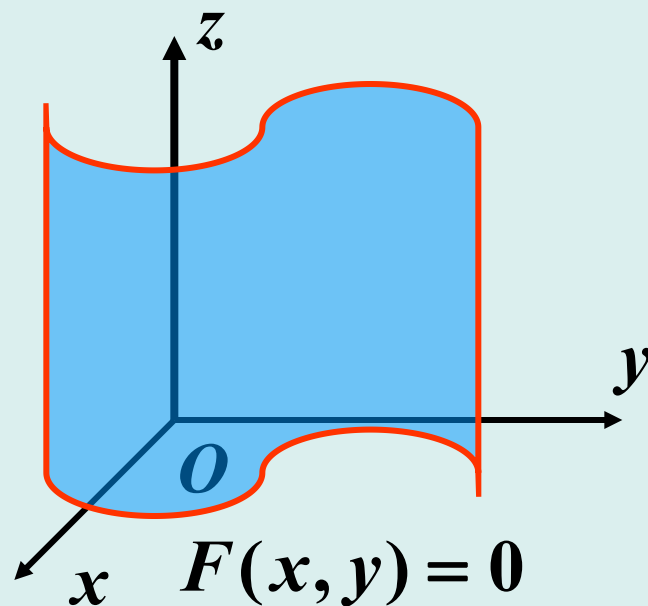
平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线 C 叫柱面的**准线**, 动直线 L 叫柱面的**母线**.



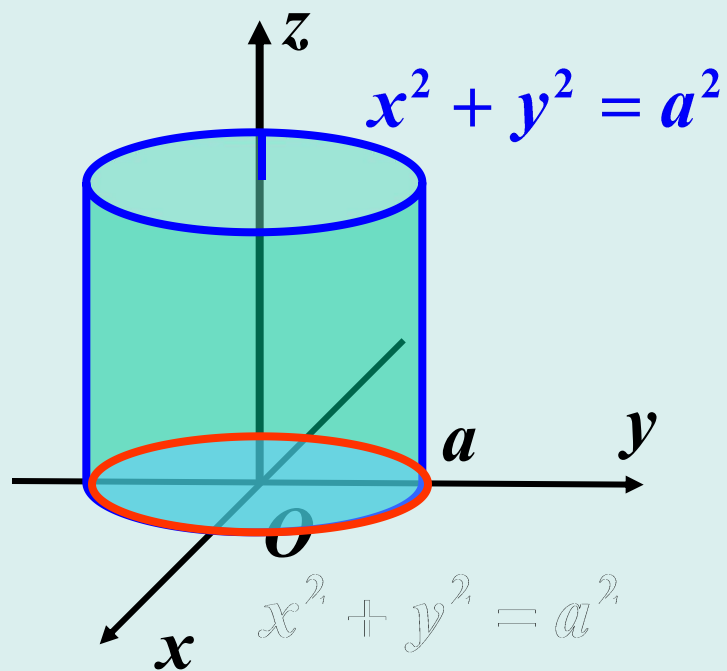
【母线平行于 z 轴的柱面方程】

缺少 z 的方程 $F(x, y) = 0$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中一般为母线平行于 z 轴的柱面, 在 xOy 坐标面内 $F(x, y) = 0$ 为准线.

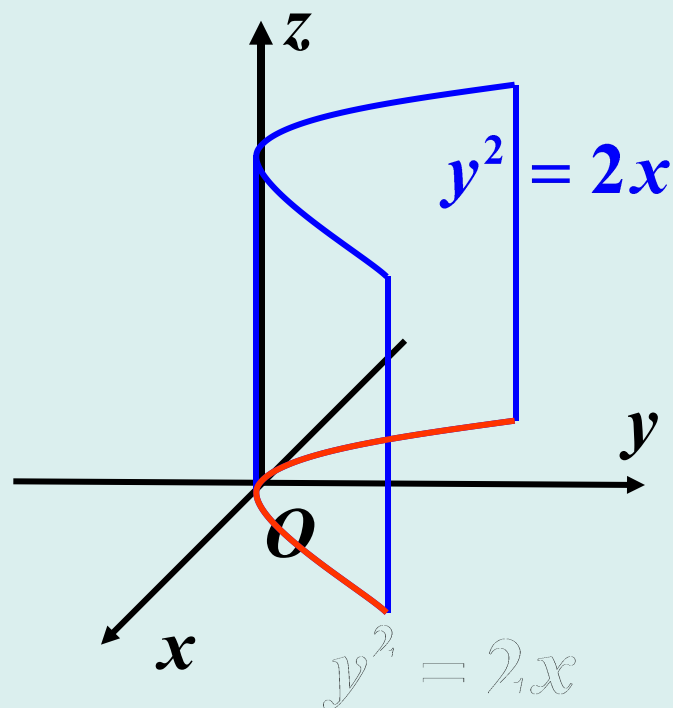




(1) 圆柱面



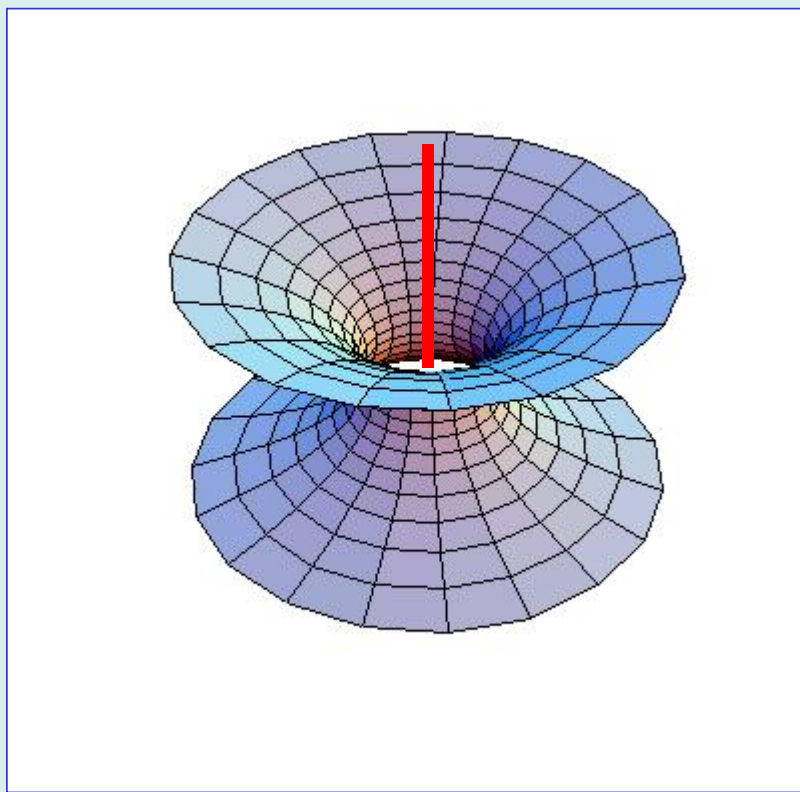
(2) 抛物柱面





3. 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**。这条定直线叫旋转曲面的**轴**。





【旋转曲面方程的形式】

在 $Oxyz$ 坐标系内, yOz 平面内的曲线 $F(y, z) = 0$ 绕 z 轴一周所成旋转曲面的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

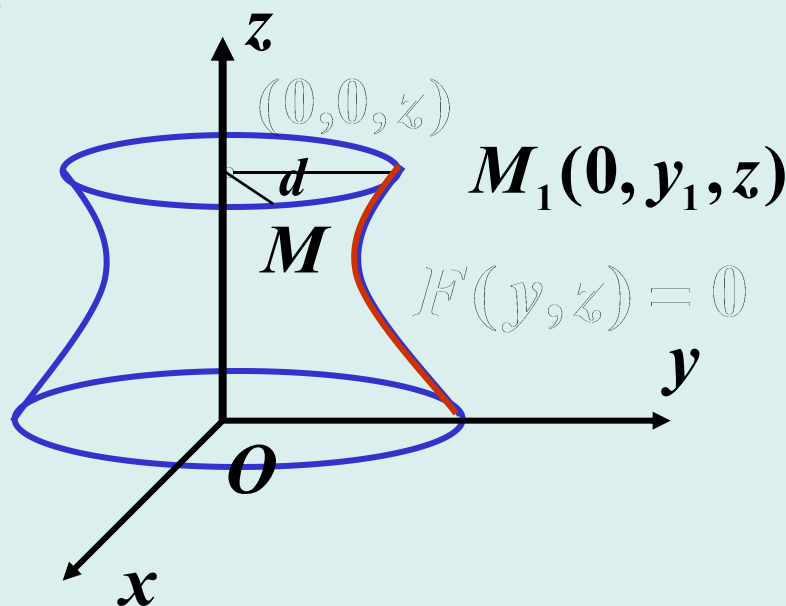
【说明】

如图, $M(x, y, z)$ 在旋转面上,
 $M(x, y, z)$ 由 yOz 平面内的
点 $M_1(0, y_1, z)$ 旋转得到,

$$|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$



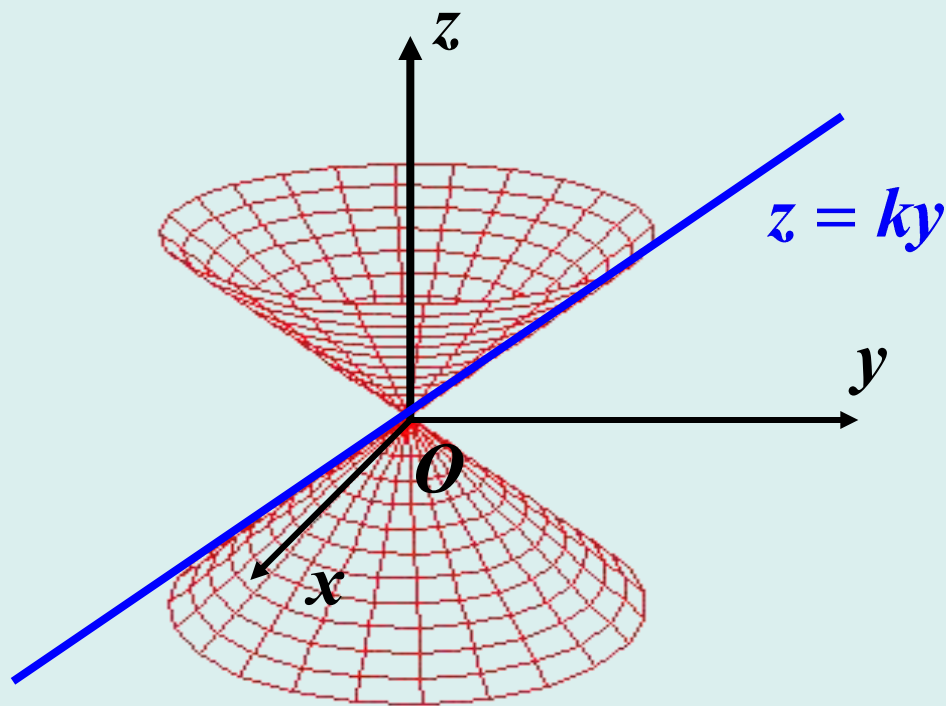
绕谁转谁不动, 另一个变量改为 $\pm\sqrt{\text{另两个变量的平方和}}$





【例2】 yOz 平面内直线 $z = ky$ ($k > 0$) 绕 z 轴一周所成旋转曲面(圆锥面)的方程为

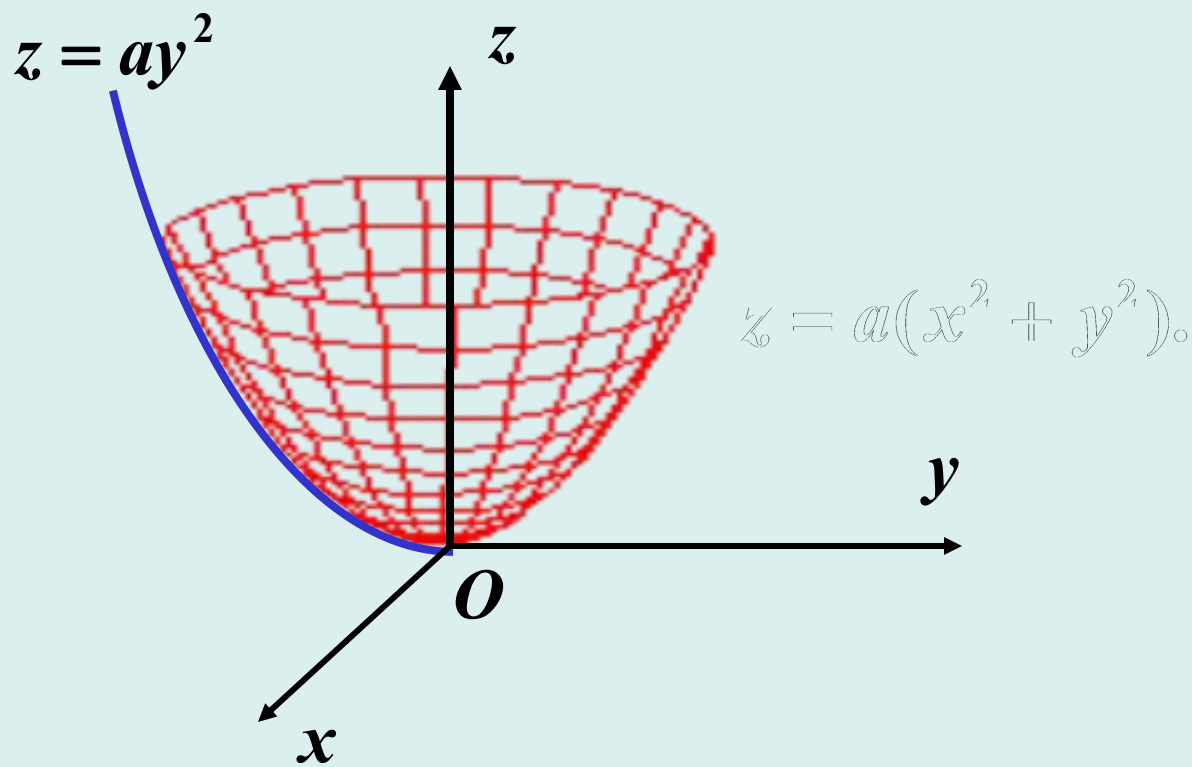
$$z = \pm k \sqrt{x^2 + y^2}$$





【例3】 yOz 平面内曲线 $z = ay^2$ 绕 z 轴一周所成旋转曲面为抛物面, 其方程为

$$z = a(x^2 + y^2).$$





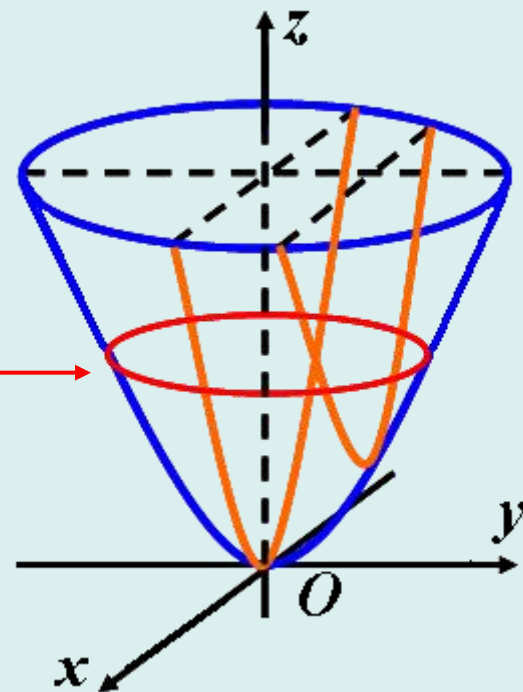
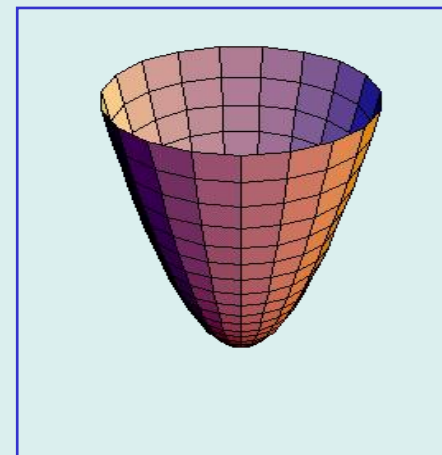
4. 椭圆抛物面

方程为 $\frac{x^2}{2_1 p} + \frac{y^2}{2_1 q} = z$ (p, q 同号)

特点 ($p > 0, q > 0$):

- (1) 曲面在 xOy 平面上方, 在原点与 xOy 平面相切;
- (2) 平面 $z = h$ ($h > 0$) 与此曲面的截痕为椭圆

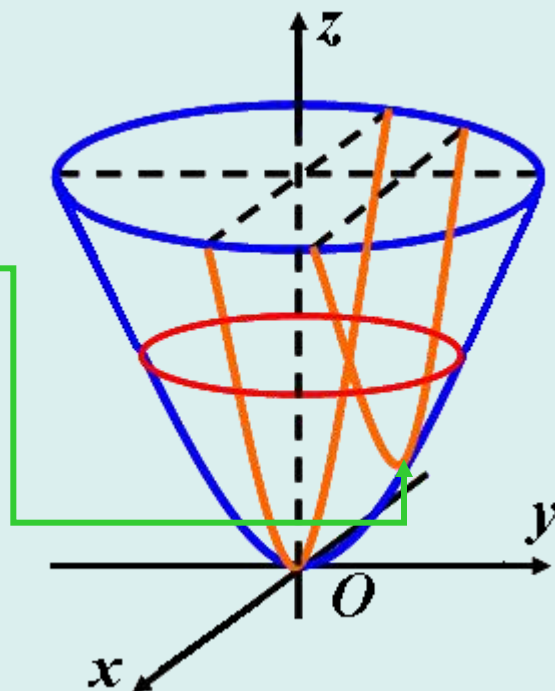
$$\frac{x^2}{2_1 p h} + \frac{y^2}{2_1 q h} = 1$$





(3) 平面 $y = h$ 截此曲面为**抛物线**

$$x^2 = 2_1 p \left(z - \frac{h^2}{2_1 q} \right)$$



(4) 平面 $x = h$ 截此曲面为**抛物线**.

(5) 当 $p = q$ 时, 此曲面为旋转抛物面

$$z = \frac{1}{2p} (x^2 + y^2)$$





5. 椭球面

方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,

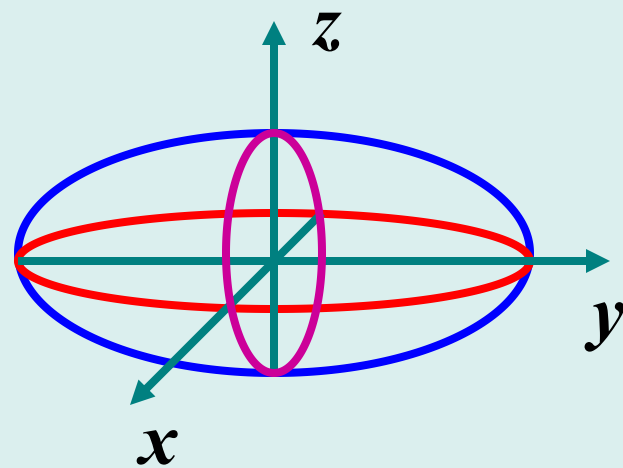
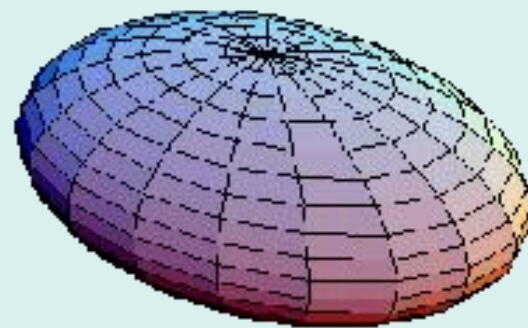
a, b, c 分别称为椭球的半轴.

特点:

(1) 与 xOy 交线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(2) 与 yOz 交线为椭圆 $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) 与 zOx 交线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$





6. 双曲抛物面 (马鞍面)

方程 $-\frac{x^2}{2_1p} + \frac{y^2}{2_1q} = z$ ($pq > 0$)

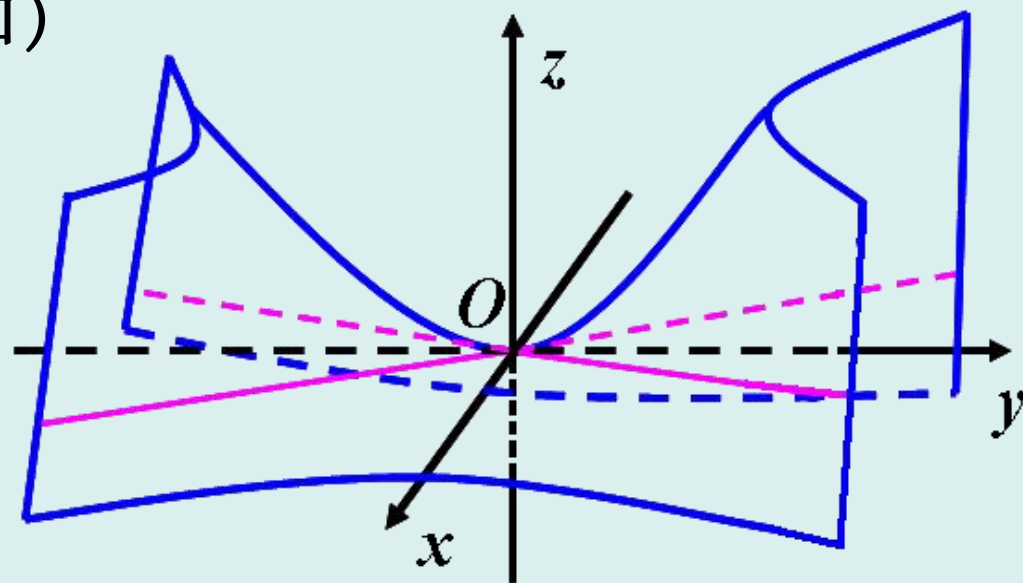
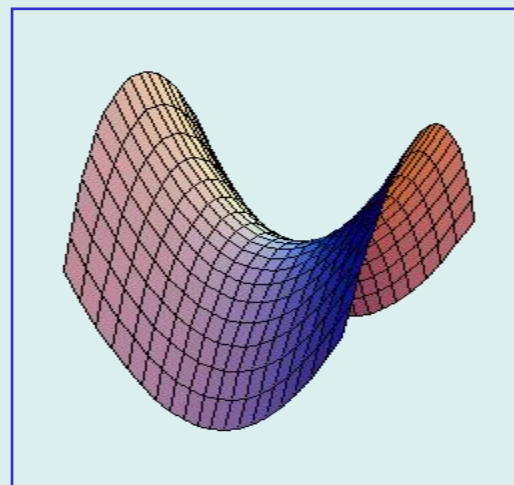
特点 ($p > 0, q > 0$):

(1) 平面 $z = h$ ($h > 0$) 截曲面为双曲线 (左右开口)

(2) 平面 $z = 0$ 截曲面两条相交直线

(3) 平面 $z = h$ ($h < 0$) 截曲面为双曲线 (前后开口)

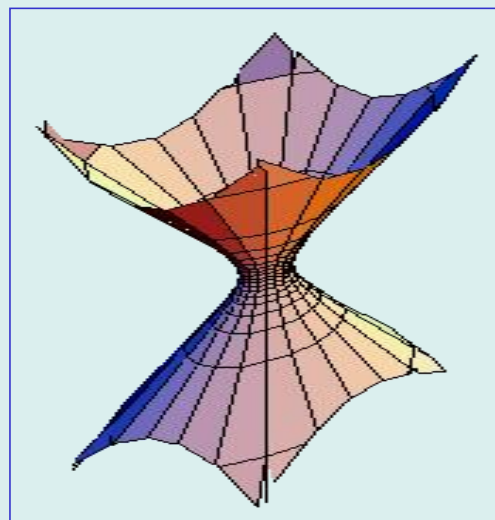
(4) 平面 $x = h, y = h$ 截曲面为抛物线





7. 单叶双曲面

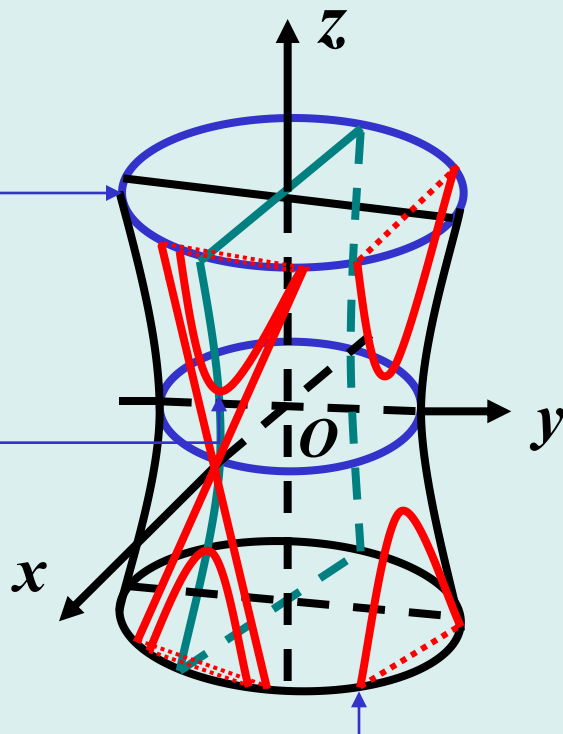
方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



平面 $z = h$ 与此曲面的截痕为椭圆

平面 $x = h$ 与此曲面的截痕为双曲线

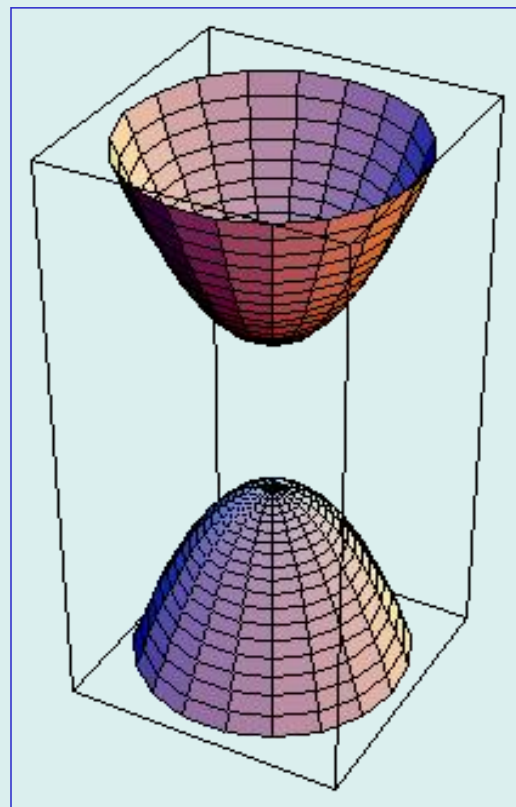
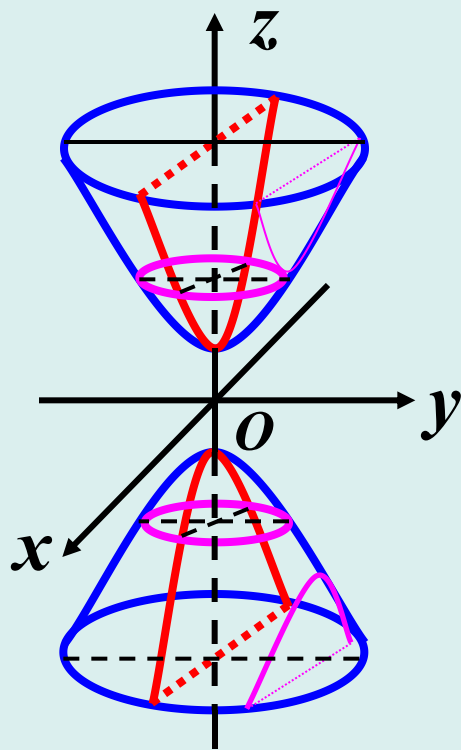
平面 $y = h$ 与此曲面的截痕为双曲线





8. 双叶双曲面

方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$





【思考题】在 $Oxyz$ 坐标系中, 过 $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$ 两点的直线绕 z 轴一周所成曲面的方程是什么?





§ 2.7 空间曲线及其方程

本节主要内容:

- 空间曲线的一般方程
- 空间曲线的参数方程
- 空间曲线在坐标面上的投影





1. 空间曲线的一般方程

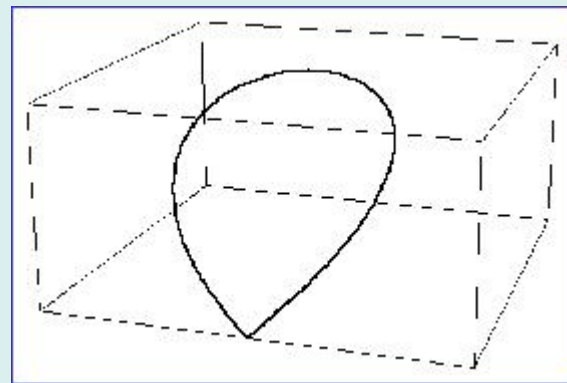
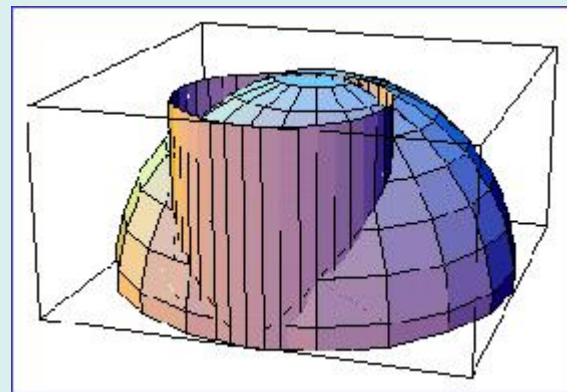
空间曲线 C 可看作空间两曲面的交线

$$C : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

【例1】 下列方程组表示怎样的曲线？

$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

【解】 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 是上半球面，
 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 是圆柱面，
曲线如图.





2. 空间曲线的参数方程

【空间曲线 C 的参数方程】

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (\alpha < t < \beta) \\ z = z(t) \end{cases}$$

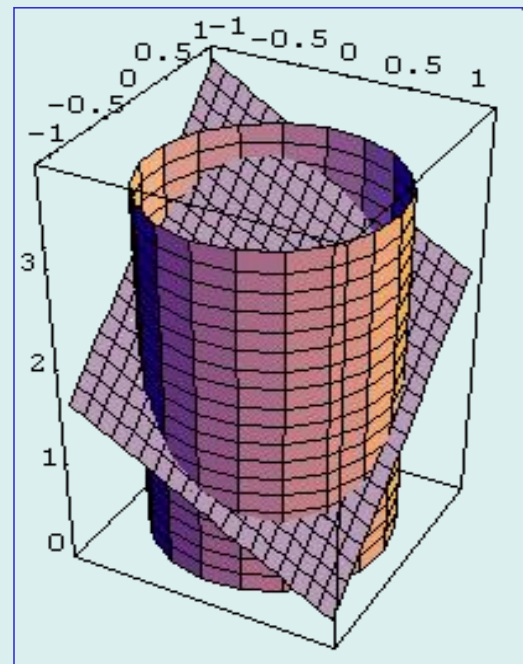
【例2】 将曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ 化为参数方程.

设 $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$,

则 $z = 6 - \cos t - \sin t$.

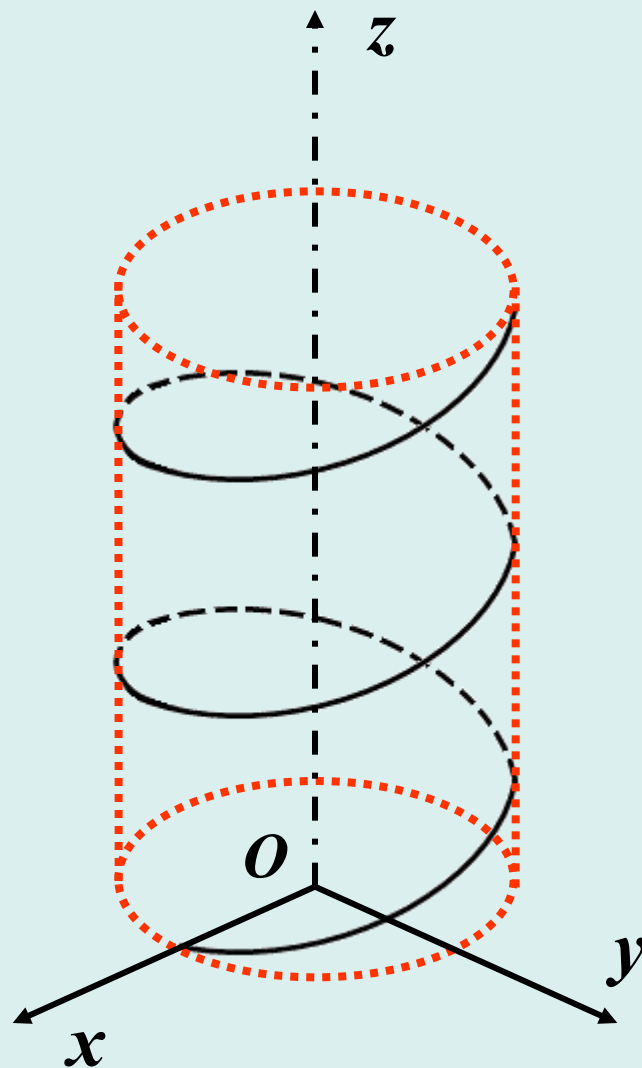
曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 6 - \cos t - \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$



【例3】 圆柱螺线

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \quad (-\infty < t < +\infty) \\ z = t \end{cases}$$





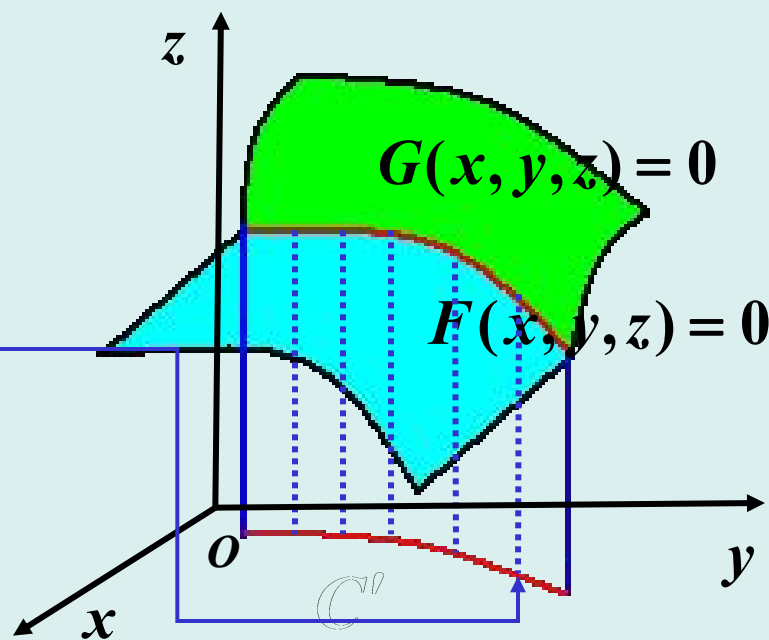
3. 空间曲线在坐标面上的投影

由空间曲线 C 的方程 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 消去 z 后得到

$$H(x, y) = 0 \quad (\text{母线平行 } z \text{ 轴的柱面}).$$

空间曲线 C 在 xOy 坐标平面的投影曲线为

$$C' : \begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$





【例4】 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影。

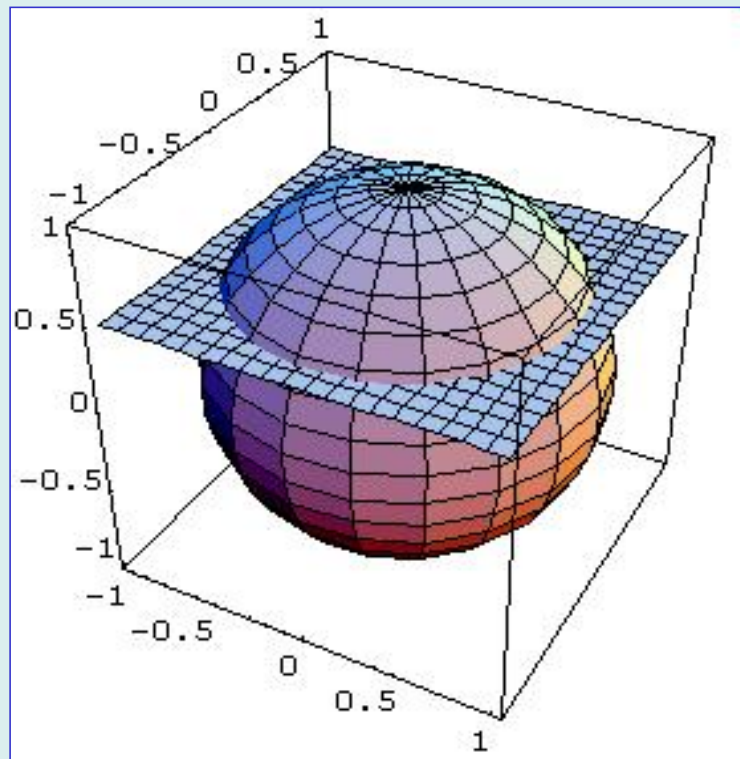
【解】 由方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

消去 z 得

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4};$$

在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$





【例5】 求 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围立体在 xOy 面上的投影.

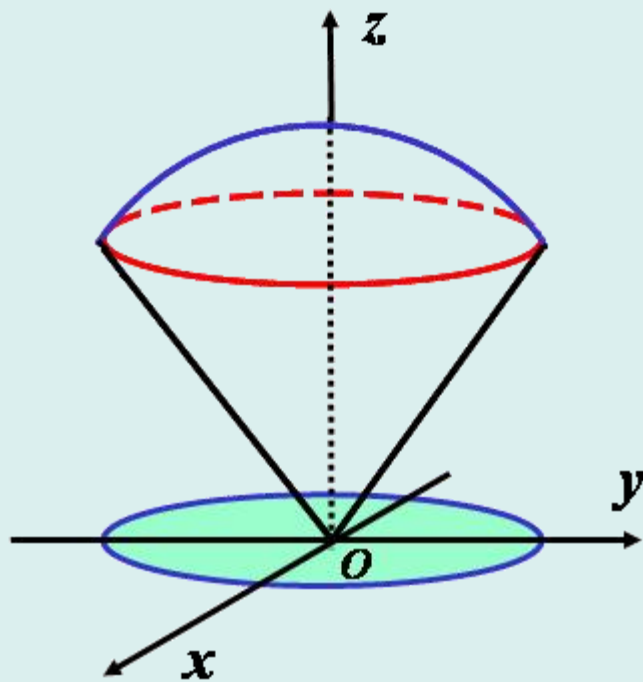
【解】 半球面和锥面的交线为 $C: \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}; \end{cases}$
消去 z 得投影柱面 $x^2 + y^2 = 1$.

交线 C 在 xOy 面上的投影为:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

立体在 xOy 面上的投影为:

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$



【思考题】 如何写出空间曲线 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 3 - 2x^2 - y^2 \end{cases}$ 的参数方程?





哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

2.8 利用MATLAB绘制 空间几何图形





一、二维常见图形绘制

<code>plot(x,y)</code>	描点 x,y 绘制曲线
<code>ezplot('f(x)')</code>	简单绘制 $f(x)$ 的曲线





一、二维常见图形绘制

例1. 绘制 $y = \sin x (x \in [0, 2\pi])$ 的图像.

Plot 描点作图

```
>> X=linspace(0,2*pi,30);
```

```
>> Y=sin(X);
```

```
>> plot(X,Y)      % 以X向量为横坐标，Y向量纵坐标绘图
```

```
>> xlabel('X')    % 给X轴，Y轴添加标题
```

```
>> ylabel('Y')
```

```
>> title('Y=sinX') % 给图添加标题
```

```
>> grid on        % 开启图像网格
```



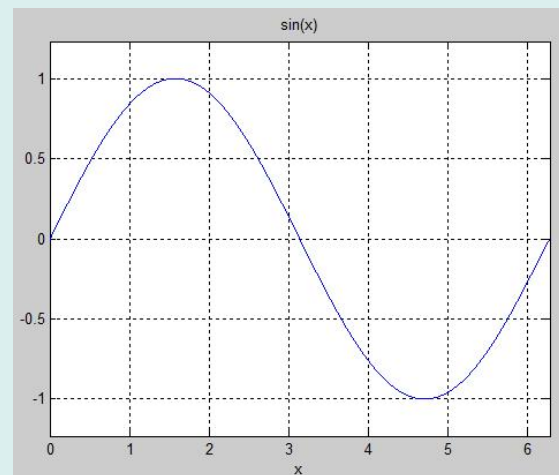
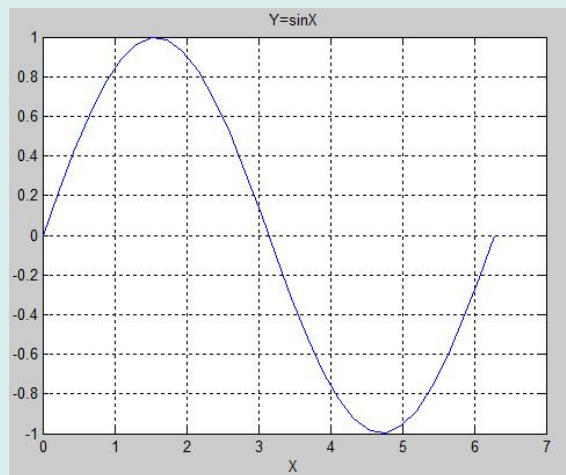


一、二维常见图形绘制

例2. 绘制 $y = \sin x$ ($x \in [0, 2\pi]$) 的图像.

```
>> ezplot('sin(x)',[0,2*pi])
```

```
>> grid on
```





一、二维常见图形绘制

总结

- `plot(X,Y)` 常用于描点作图的方法
- `ezplot` 可用于显示函数、隐函数、参数方程表达的曲线作图





二、三维常见图形绘制

<code>meshgrid(x,y)</code>	以 x,y 为基准，产生 $x-y$ 平面坐标值
<code>mesh(x,y,z)</code>	绘制三维 x,y,z 网线图
<code>ezmesh('f(x,y)')</code>	简单绘制三维图形
<code>surf(x,y,z)</code>	带阴影绘制 x,y,z 网线图
<code>ezsurf('f(x,y)')</code>	带阴影简单绘制三维图形





二、三维常见图形绘制

例3 绘制墨西哥帽子图形 $z = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

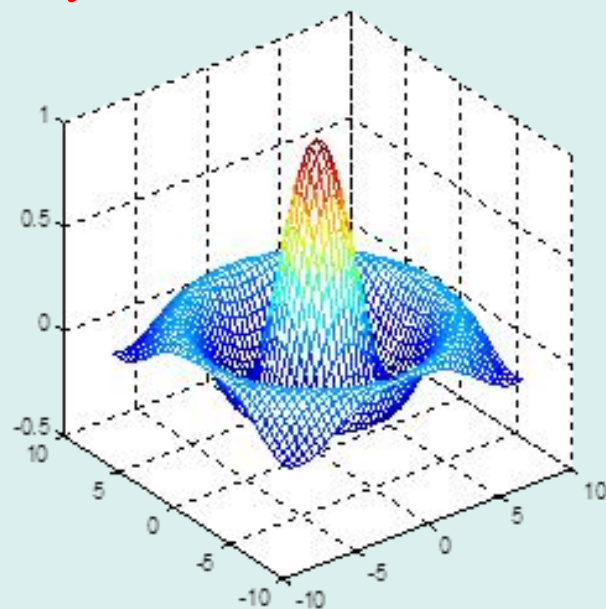
```
>> [x,y]=meshgrid(-8:4:8);
```

```
>> c=sqrt(x.^2+y.^2)+eps;
```

```
>> z=sin(c)./c;
```

```
>> mesh(x,y,z)
```

```
>> axis square
```



```
>> ezmesh('sin(sqrt(x^2+y^2))/sqrt(x^2+y^2)')
```

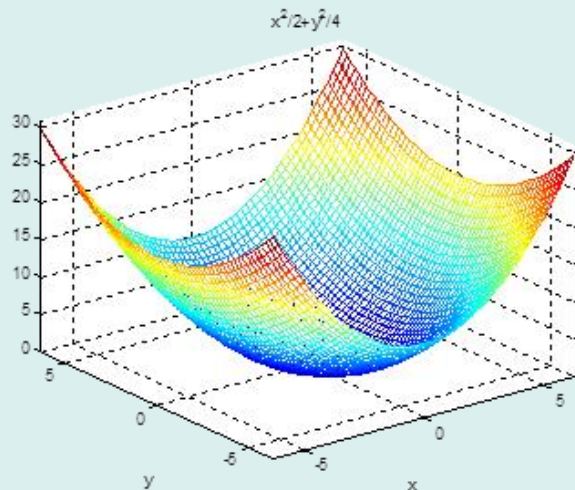




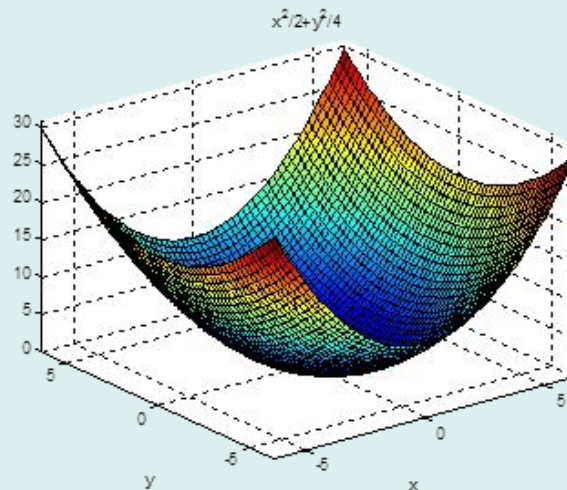
二、三维常见图形绘制

例4 绘制椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$.

```
>> ezmesh('x^2/2+y^2/4')
```



```
>> ezsurf('x^2/2+y^2/4')
```

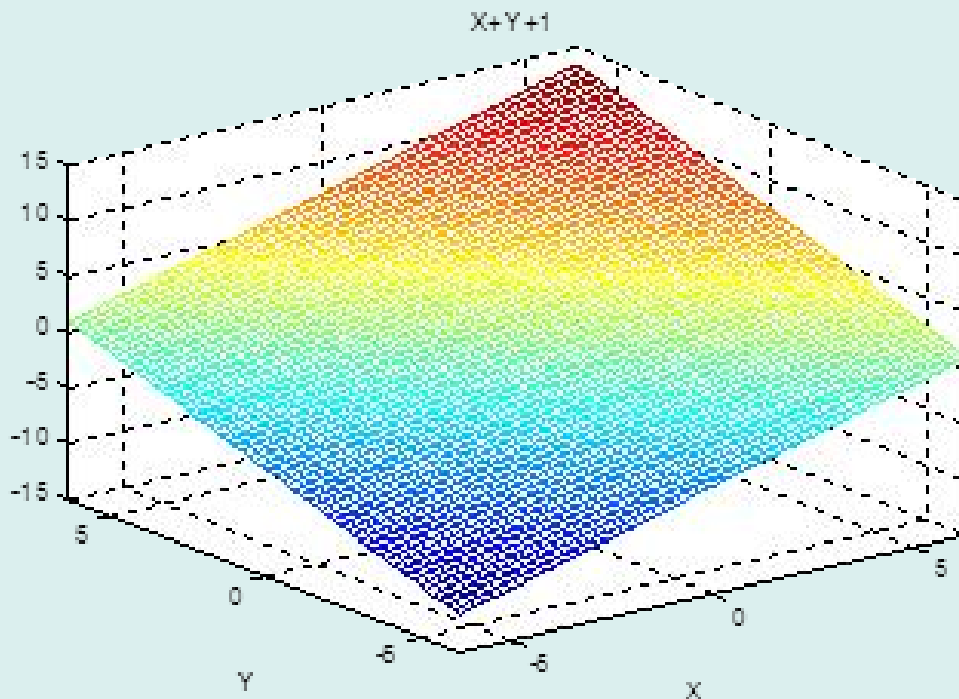




二、三维常见图形绘制

例5 绘制平面 $x + y - z = 1$.

```
>> ezmesh('X+Y-1')
```





习题课二

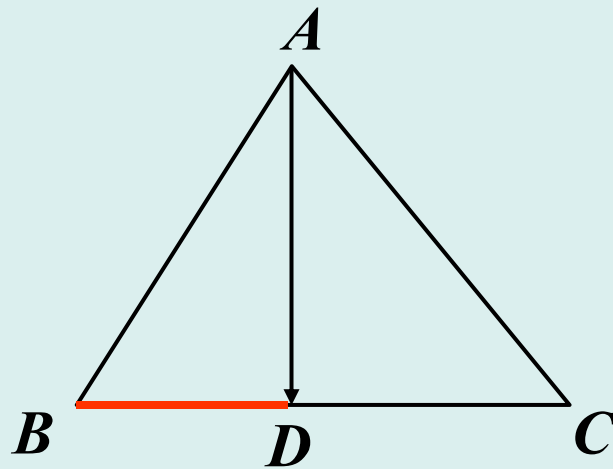
1. 给定三点 $A(4,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$, 对于三角形 $\triangle ABC$, 求

(1) 向量 \overrightarrow{BA} 在 \overrightarrow{BC} 上的投影.

(2) $\triangle ABC$ 的面积.

(3) BC 上高 AD 的长度.

(4) 过 C 的中线 CE 的长度.



解 (1) $\overrightarrow{BC} = \{0, -2, 2\},$

$$\overrightarrow{BA} = \{4, -2, 0\},$$

$$\text{Prj}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA} = \frac{1}{|\overrightarrow{BC}|} (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}) = \sqrt{2}.$$

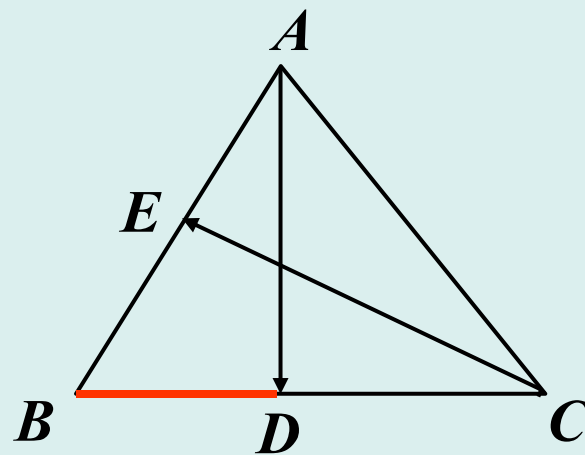




(2) ΔABC 的面积.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} &= \{4, -2, 0\} \times \{0, -2, 2\} \\ &= \{-4, -8, -8\};\end{aligned}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = 6.$$



(3) BC 上高 AD 的长度.

$$\left. \begin{aligned}\frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| &= 6 \\ |\overrightarrow{BC}| &= 2\sqrt{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = 3\sqrt{2}.$$

(4) 过 C 的中线 CE 的长度.

E 点的坐标为 $(2, 1, 0)$;

$$|\overrightarrow{CE}| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2 + (0-2)^2} = 3.$$





2. 若 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{6}$.

(1) 求 $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle$;

(2) 求以 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

解 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{3}{2},$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 2,$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 3 + 1 + 2 \times \frac{3}{2} = 7, \end{aligned}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1,$$





$$\cos \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \frac{2}{\sqrt{7}},$$

$$\theta = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| &= |\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}| \cdot \sin \theta \\ &= \sqrt{7} \times 1 \times \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

另解 $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b}$
 $= 2(\vec{b} \times \vec{a});$

$$\begin{aligned} |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| &= 2 \cdot |\vec{b} \times \vec{a}| \\ &= 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$





3. 求下列平面方程:

(1) 过三点 $O(0,0,0)$, $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$.

(2) 过点 $M(1,2,1)$, 与平面 $\pi_1: x - y + z - 1 = 0$ 垂直, 与直线 $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ 平行.

(3) 过直线 $L: \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, 且平行于 x 轴.

解 (1) (i) 用点法式:

$$\vec{n} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \{1, 0, 1\} \times \{2, 1, 0\} = \{-1, 2, 1\};$$

所求平面方程为 $-x + 2y + z = 0$.





(1) 过三点 $O(0,0,0)$, $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$.

(ii) 用一般方程:

因为平面过原点, 故可设方程为

$$\pi: Ax + By + Cz = 0.$$

将 A, B 两点的坐标代入得:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = -A, B = -2A;$$

所求平面方程为 $-x + 2y + z = 0$.





(2) 过点 $M(1,2,1)$, 与平面 $\pi_1: x - y + z - 1 = 0$ 垂直,
与直线 $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ 平行.

解 π_1 的法向 $\vec{n}_1 = \{1, -1, 1\}$, L_1 的方向向量 $\vec{d} = \{1, 1, 2\}$;
所求平面的法向可为

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= \vec{n}_1 \times \vec{d} = \{1, -1, 1\} \times \{1, 1, 2\} \\ &= \{-3, -1, 2\};\end{aligned}$$

平面方程为:

$$\begin{aligned}-3(x-1) - (y-2) + 2(z-1) &= 0, \\ 3x + y - 2z - 3 &= 0.\end{aligned}$$





(3) 过直线 $L: \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, 且平行于 x 轴.

解 (i) 用点法式:

将 $x = 1$ 代入解得 $y = -1, z = 1$, 得 $M_0(1, -1, 1)$;
直线 L 的方向向量为

$$\vec{d} = \{1, 0, -1\} \times \{1, 1, 1\} = \{1, -2, 1\};$$

因为所求平面过直线 L , 所以其法向 $\vec{n} \perp \vec{d}$;

因为所求平面平行于 x 轴, 所以其法向 $\vec{n} \perp \vec{i}$;

故所求平面的法向可取为

$$\vec{n} = \vec{d} \times \vec{i} = \{1, -2, 1\} \times \{1, 0, 0\} = \{0, 1, 2\};$$

平面方程为: $(y + 1) + 2(z - 1) = 0$

$$y + 2z - 1 = 0$$





(ii) 用一般方程:

平面平行 x 轴, 可设平面方程为

$$By + Cz + D = 0;$$

又由已知平面过 L , 故 $\vec{n} \perp \vec{d}$, 从而

$$-2B + C = 0;$$

点 $M_0(1, -1, 1)$ 在平面上, 从而

$$-B + C + D = 0;$$

由上面两式得到

$$B : C : D = -1 : -2 : 1;$$

平面方程为:

$$y + 2z - 1 = 0.$$





(iii) 用平面束:

设平面 π 的方程为

$$\pi: x - z + \lambda(x + y + z - 1) = 0,$$

此平面的法向 $\vec{n} = \{1 + \lambda, \lambda, -1 + \lambda\}$.

因为所求平面平行于 x 轴, 所以其法向 $\vec{n} \perp \vec{i}$,

$$1 + \lambda = 0, \quad \lambda = -1.$$

平面方程为:

$$y + 2z - 1 = 0.$$





4. 求下列直线方程:

(1) 过点 $A(2, -3, 4)$, 且与平面 $2x - y + 3z - 3 = 0$ 和 $5x + 4y - z - 7 = 0$ 平行.

(2) 过点 $A(1, -2, 3)$, 与 z 轴相交, 且与 L_1 垂直:

$$L_1: \frac{x}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{-2}.$$

解 (1) 直线的方向向量

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{-11, 17, 13\};$$

直线方程为

$$\frac{x-2}{-11} = \frac{y+3}{17} = \frac{z-4}{13}.$$





(2) 设直线的方向向量为 $\vec{s} = \{m, n, p\}$.

$$L \perp L_1 \Rightarrow \vec{s} \perp \{4, 3, -2\} \Rightarrow 4m + 3n - 2p = 0;$$

由直线过点 A 且与 z 轴相交知:

$$\vec{s} \perp (\overrightarrow{OA} \times \vec{k}) = \vec{s} \times \{-2, -1, 0\} \Rightarrow -2m - n = 0;$$

$$\begin{cases} 4m + 3n - 2p = 0 \\ -2m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -2m \\ p = -m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{s} = m\{1, -2, -1\}.$$

所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-1}.$$





【注】 在研究有关直线及平面的一些复杂问题时，关键是利用向量这一工具，通过分析图形找思路。

5. 若已知两异面直线为

$$L_1: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1}, \quad L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

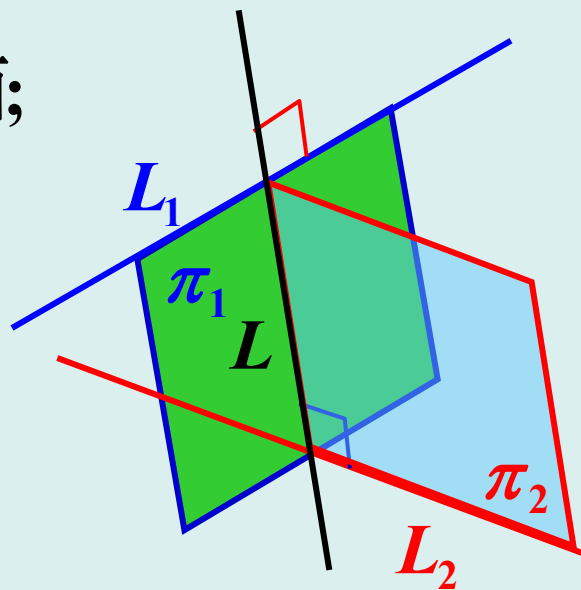
求这两条直线公垂线 L 的方程.

解 如图, π_1 为 L_1 和 L 张成的平面;

π_2 为 L_2 和 L 张成的平面.

L 的方向向量

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \{-2, 0, 1\} \times \{1, 2, -1\} \\ &= \{-2, -1, -4\}; \end{aligned}$$





π_1 的法向

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= \{2, 1, 4\} \times \{-2, 0, 1\} \\ &= \{1, -10, 2\},\end{aligned}$$

π_1 的方程为 $x - 10y + 2z + 14 = 0$;

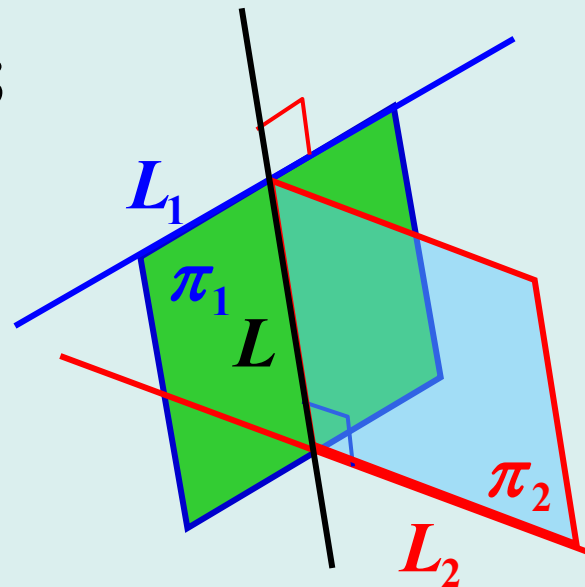
π_2 的法向

$$\begin{aligned}\vec{n}_2 &= \{2, 1, 4\} \times \{1, 2, -1\} \\ &= \{-9, 6, 3\},\end{aligned}$$

π_2 的方程为 $-3x + 2y + z - 3 = 0$.

L 的方程为

$$\begin{cases} x - 10y + 2z + 14 = 0 \\ -3x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$





6. 解答下问题:

- (1) 求点 $A(1,1,1)$ 到平面 $\pi: x + y + z + 1 = 0$ 的距离 d 及 A 在平面 π 上的投影.
- (2) 求点 A 到直线 $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ 的距离.
- (3) 上述直线 L 与平面 π 的夹角 φ .

解 (1) $d = \frac{|1+1+1+1|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}};$

过点 $A(1,1,1)$ 作垂直于平面 π 的直线

$$L_1: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1; \\ z = t + 1 \end{cases}$$





将 $x = t + 1$, $y = t + 1$, $z = t + 1$ 代入平面 π 的方程得到

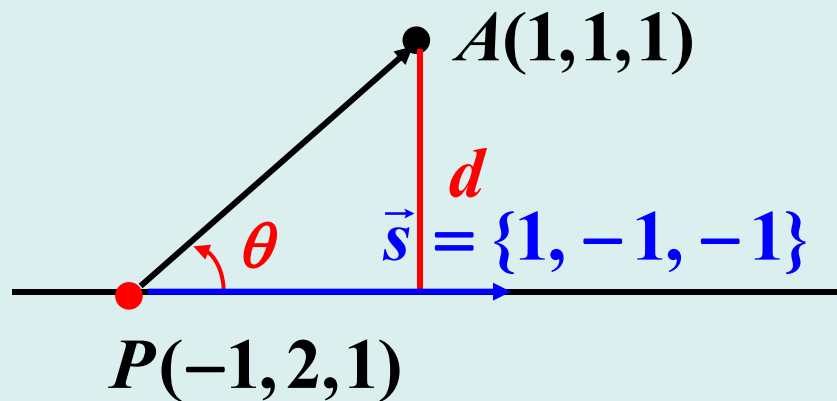
$$t = -\frac{4}{3},$$

$M(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ 为所求投影点.

(2) 求点 A 到直线 $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ 的距离.

解

$$\begin{aligned} d &= |\overrightarrow{PA}| \sin \theta \\ &= |\overrightarrow{PA}| \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{s}|}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\vec{s}|} \\ &= \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$





(3) 上述直线 L 与平面 π 的夹角 φ .

解
$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{1}{3}, \quad \varphi = \arcsin \frac{1}{3}.$$

