第二章　空间解析几何

本章主要内容：

- 空间直角坐标系
- 向量及其坐标
- 向量的数量积与向量积
- 平面方程
- 空间直线方程
- 曲面及其方程
- 空间曲线及其方程
- 利用MATLAB绘制空间几何图形

线性代数 哈尔滨工程大学

§ 2.1 空间直角坐标系

本节主要内容：

- 空间直角坐标系
- 空间点的坐标
- 空间两点间的距离

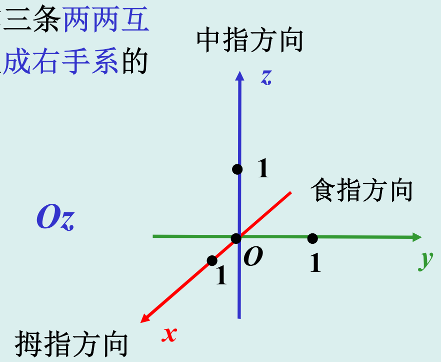
线性代数 哈尔滨工程大学

1. 空间直角坐标系

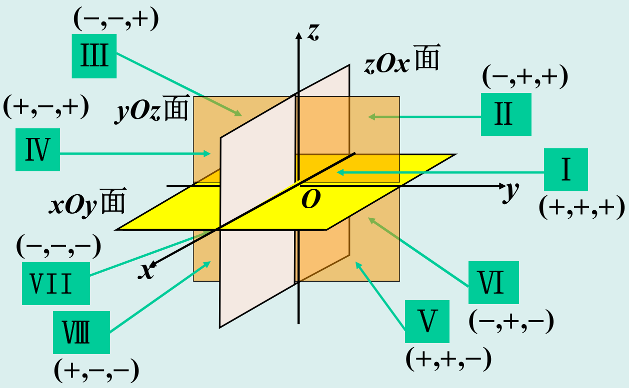
(1) 在空间中取一定点 O 做原点；

(2) 过原点作三条两两互相垂直且成右手系的数轴：

Ox　Oy　Oz



【坐标平面】xOy, yOz, zOx 面

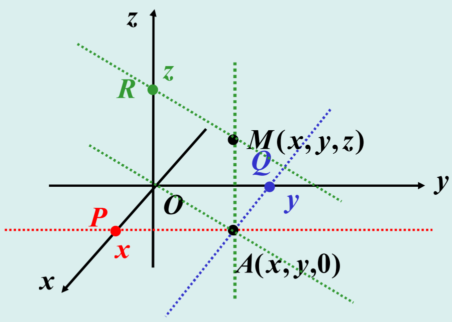


【卦限】空间直角坐标系共有八个卦限.

线性代数
哈尔滨工程大学

2. 空间点的坐标

P点的坐标为$(x,0,0)$； Q点的坐标为$(0,y,0)$；
A点的坐标为$(x,y,0)$； R点的坐标为$(0,0,z)$；
M点的坐标为(x,y,z).

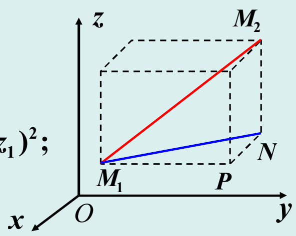


线性代数
哈尔滨工程大学

3. 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点:
在RtΔM_1NM_2和RtΔM_1PN中,有

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$
$$=(|PN|^2+|M_1P|^2)+|NM_2|^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2;$$



$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

【特例】指出下例空间点集所代表的几何图形:

$S_1=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=0\}$:
原点 $O(0,0,0)$;

$S_2=\{(x,y,z)\,|\,x=y=0\}$:
z 坐标轴;

$S_3=\{(x,y,z)\,|\,x=y=z\}$:
与三个坐标轴夹角都相等的直线;

$S_4=\{(x,y,z)\,|\,x=0\}$:
yOz 坐标面;

$S_5=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$:
单位球面(以原点为心,半径为 1 的球面);

$S_6=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=1\}$:
xOy 面内的单位圆上下无限移动产生的圆柱面;

$S_7=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1\}$:
过三点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 的平面;

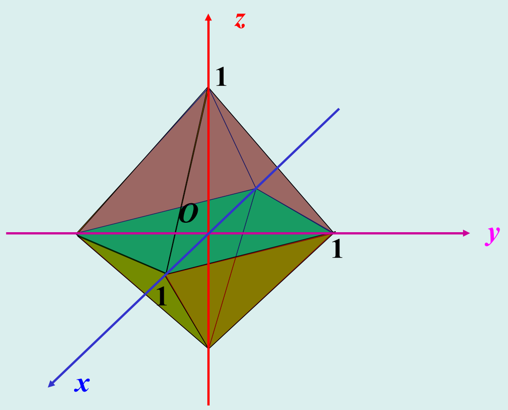
$S_8=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1,\ x^2+y^2+z^2=1\}$:
过三点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 的平面与单位球面的交线;

$S_9=\{(x,y,z)\,|\,x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=\theta\ (\theta\geqslant 0)\}$:
从 $(1,0,0)$ 出发, 沿柱面 $x^2+y^2=1$ 等速上升的螺旋线;

$S_{10}=\{(x,y,z)\,|\,1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$:
以原点为心, 半径为 1 和 2 的两个球面所夹的壳体.

【思考题】下面两集合在 $Oxyz$ 坐标系中是什么几何图形?

$S=\{(x,y,z)\,|\,|x|+|y|+|z|=1\}$, $V=\{(x,y,z)\,|\,|x|+|y|+|z|\leqslant 1\}$



§2.2 空间向量及其线性运算

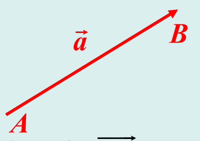
本节主要内容：

- 空间向量
- 向量的坐标化
- 数乘向量
- 向量的加法和减法
- 向量的标准分解
- 向量的方向角与方向余弦

1. 空间向量

【几何空间中的向量】空间中的有方向的线段.

【向量的表示】若向量的起点为 A，终点为 B，我们用 $\overrightarrow{AB}$ 表示此向量. 我们也用 $\vec{a},\vec{b}$ 等表示向量.



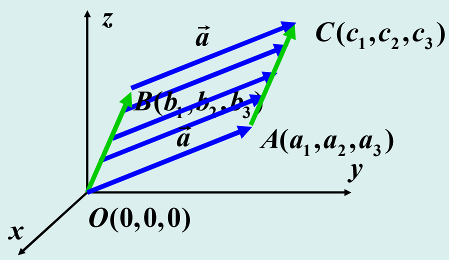
【向量的模】向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度称为模，表示为 $|\overrightarrow{AB}|$.

【零向量】模为 0 的向量称为零向量；我们用 $\vec{0}$ 表示零向量. 约定：零向量的方向任意.

【向量的相等】两个向量，只要方向相同，模相等，我们就规定它们是相等的，无论它们的空间位置如何.

【确定向量的方式】指明方向和长度.

2. 向量的坐标化(向量的另一种表示方法)



【向量的坐标】设 $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$ 为空间直角坐标系中的一个向量. 将 $\vec{a}$ 自由平移使其起点与原点 O 重合，终点为

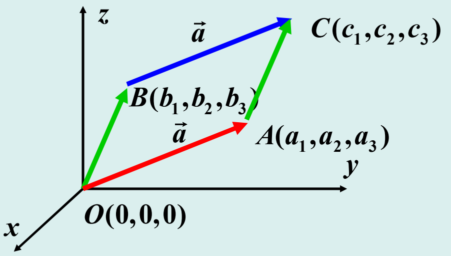
$$A(a_1,a_2,a_3);$$

有序数组 a_1,a_2,a_3 称为向量 $\vec{a}$ 的坐标，记为

$$\overrightarrow{BC}=\{a_1,a_2,a_3\}.$$

线性代数

哈尔滨工程大学



【公式1】 在前面的条件下

$$\overrightarrow{BC}=\{c_1-b_1,\ c_2-b_2,\ c_3-b_3\}.$$

由于线段 BC 平行平移与 OA 重合，因而点 C 的坐标

$$(c_1,c_2,c_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3);$$

从而

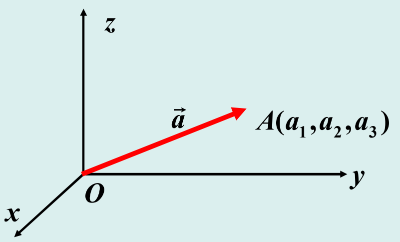
$$\overrightarrow{BC}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{c_1-b_1,\ c_2-b_2,\ c_3-b_3\}.$$

线性代数

哈尔滨工程大学

【公式2】 若向量 $\vec{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，则 $\vec{a}$ 的模

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$



线性代数

哈尔滨工程大学

【例1】 如图，用坐标表示向量 $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{DC}$.

【解】 $B=(1,\ 1,\ 0)$,

$C=(0,\ 1,\ 0)$,

$D=(1,\ 0,\ 1)$,

$E=(1,\ 1,\ 1)$,

$G=(0,\ 0,\ 1)$;

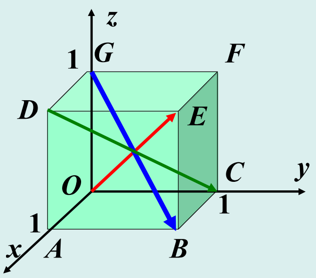
$\overrightarrow{OE}=\{1,\ 1,\ 1\}$,

$\overrightarrow{GB}=\{1-0,\ 1-0,\ 0-1\}$

$=\{1,\ 1,\ -1\}$,

$\overrightarrow{DC}=\{0-1,\ 1-0,\ 0-1\}$

$=\{-1,\ 1,\ -1\}$.



3. 数乘向量(用一个数和一个向量构造新的向量)

【定义 1】 设 $\vec{a}$ 为一个向量，λ 为一个实数，则 $\lambda\vec{a}$ 按下列规定表示一个向量:

(1) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

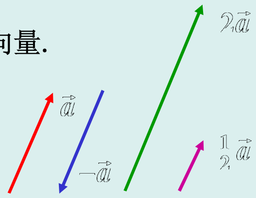
(2) 当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

(3) 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

(4) $-\vec{a}=(-1)\vec{a}$;

(5) $\vec{a}^0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 为与 $\vec{a}$ 同向的单位向量.

【例2】 参照 $\vec{a}$ 画出 $-\vec{a}$，$2\vec{a}$，$\frac{1}{2}\vec{a}$.



【公式3】 $\lambda\{a_1,a_2,a_3\}=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\}$.

【证明】 令 $\vec{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\vec{b}=\{\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3\}$.

$$|\vec{b}|=\sqrt{(\lambda a_1)^2+(\lambda a_2)^2+(\lambda a_3)^2}=|\lambda|\cdot|\vec{a}|=|\lambda\vec{a}|;$$

通过检验

$$O(0,0,0),\ A(a_1,a_2,a_3),\ B(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$$

三点之间的距离知此三点共线;

当 $\lambda>0$ 时，A, B 在原点 O 的同一侧，即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向;

当 $\lambda<0$ 时，A, B 在原点 O 的两侧，即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向;

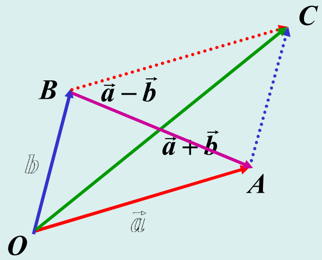
当 $\lambda=0$ 时，公式 3 平凡.

4. 向量的加法和减法

【定义2】 如图，设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，四边形 $OACB$ 为平行四边形:

定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和为 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$;

定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差为 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{BA}$.



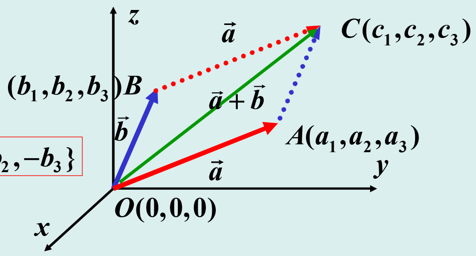
【公式4】若向量 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, 则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2,\ a_3\pm b_3\}.$$

【证明】 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}=\{c_1,c_2,c_3\}$

$$=\{a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\};$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\{a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3\}.$$



$\boxed{-\vec{b}=\{-b_1,-b_2,-b_3\}}$

线性代数
哈尔滨工程大学

通过向量的坐标化, 很容易证明下列向量线性运算的性质.

【向量线性运算的性质】

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

(3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

(4) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

(5) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$.

线性代数
哈尔滨工程大学

5. 向量的标准分解

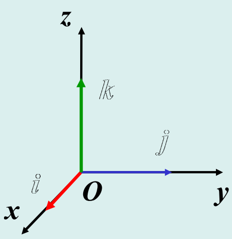
【坐标向量】 空间坐标系中, 单位向量

$$\vec{i}=\{1,\ 0,\ 0\},\quad \vec{j}=\{0,\ 1,\ 0\},\quad \vec{k}=\{0,\ 0,\ 1\}$$

称为坐标向量.

【向量的标准分解】

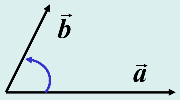
$$\begin{aligned}&\{a_1,a_2,a_3\}\\ &=\{a_1,0,0\}+\{0,a_2,0\}+\{0,0,a_3\}\\ &=a_1\{1,0,0\}+a_2\{0,1,0\}+a_3\{0,0,1\}\\ &=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}.\end{aligned}$$



$$\boxed{\{a_1,a_2,\ a_3\}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}}$$

6. 向量的方向角与方向余弦

【两个向量的夹角】 对于两个向量$\vec{a},\vec{b}$，它们之间由 0 到π的夹角称$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，记为$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.



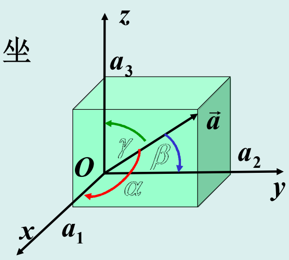
【向量的方向角】 向量$\vec{a}$与坐标向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$的夹角

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

称为向量$\vec{a}$的方向角；称

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

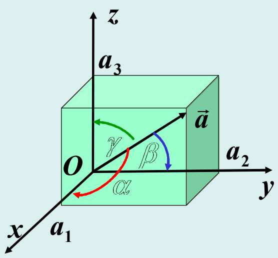
为$\vec{a}$的方向余弦.



$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\vec{a}|}=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{|\vec{a}|}=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{|\vec{a}|}=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$



$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$$

$$\boxed{\vec{a}^0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}}$$

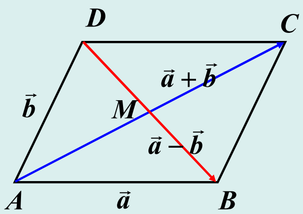
【例 3】 在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. 试用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，这里 M 为平行四边形$ABCD$的对角线的交点.

【解】 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$

$$=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b});$$

$$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$



【思考题】 若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为单位向量，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$之间的夹角.

§ 2.3 向量的数量积和向量积

本节主要内容：

- 两个向量的数量积
- 两个向量的向量积

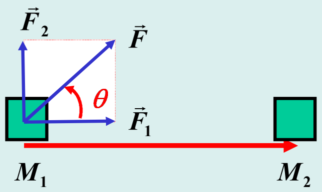
线性代数 哈尔滨工程大学

1. 两个向量的数量积

【常力作功】 如图，$\vec{F}$为一个常力(大小和方向不变的力)，一物体在$\vec{F}$的作用下沿直线由M_1移动到M_2，则在此过程中$\vec{F}$所作的功

$$W = |\vec{F}_1|\cdot|\overrightarrow{M_1M_2}| = (|\vec{F}|\cos\theta)\cdot|\overrightarrow{M_1M_2}|$$

$$= |\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{M_1M_2}|\cdot\cos\theta$$

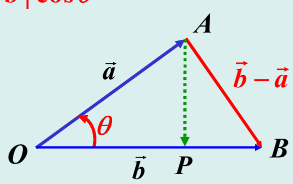


线性代数 哈尔滨工程大学

【定义1】 设$\vec{a},\vec{b}$两个向量的夹角为$\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则称实数

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \triangleq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$$

为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**.



【评注】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$(交换律);

(2) $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$;

(3) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$;

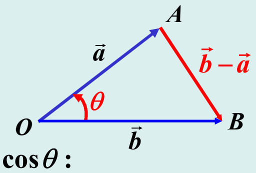
(4) 实数 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a} \triangleq \vec{a}\cdot\vec{b}^0 = |\vec{a}|\cos\theta$ 称向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影;

若 $0\leqslant\theta\leqslant 90^\circ$, 则 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = |OP|$;

若 $90^\circ\leqslant\theta\leqslant 180^\circ$, 则 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} = -|OP|$.

【定理2.1】 在空间直角坐标系中，若 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 的数量积

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$



【证明】 由余弦定理，

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\theta:$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\cdot\boxed{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta}$$ （改向量形式）

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-[(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2]\}$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

由上述定理，通过直接、简单的代数验算，很轻松地得到下列有关数量积的性质.

【向量内积的性质】

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$（数量积对加法的分配律）;

(2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$.

【(1)的验证】

令 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，$\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$：

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}&=\{a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\}\cdot\{c_1,c_2,c_3\}\\&=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+(a_3+b_3)c_3\\&=(a_1c_1+b_1c_1)+(a_2c_2+b_2c_2)+(a_3c_3+b_3c_3)\\&=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)+(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【例1】 已知空间三点 $M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$，$B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

【解】 $\vec{a}=MA=\{1,1,0\}$，

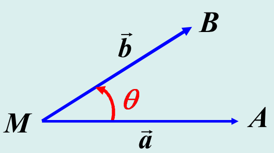
$\vec{b}=MB=\{1,0,1\}$；

$$\boxed{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$$

$$\angle AMB=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

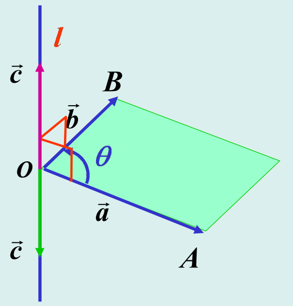
$$=\arccos\frac{1}{2}=60^\circ$$



2. 两个向量的向量积(由两个向量构造一个新向量)

在许多方面，对于给定的两个不共线的非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$，需要找另一个同时与 $\vec{a}, \vec{b}$ 垂直的非零向量 $\vec{c}$，并且要求 $\vec{c}$ 的模有某钟特性.

如图，由直观，同时与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 垂直的非零向量 $\vec{c}$ 在直线 l 上，有无限多个，但方向可指向方上或下方，且为一个非零向量 $\vec{d}$ 的一切‘倍数’ $\lambda\vec{d}$.



线性代数 哈尔滨工程大学

【问题】 若向量 $\vec{a}=\{a_1, a_2, a_3\}, \vec{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ 不共线且都不是零向量，求同时垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$ 的向量 $\vec{c}$.

【试解】 观察行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$:

其第一行的代数余子式所构成的向量

$$\{A_{11}, A_{12}, A_{13}\}=\{a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\}$$

同时垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$.

此时，若 $A_{11}=A_{12}=A_{13}=0$，则容易推出:

a_1, a_2, a_3 与 b_1, b_2, b_3 对应成比例(从而 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线)

总之，当 λ 取遍一切实数时，

$$\vec{c}=\lambda\{a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\}$$

为所求的一切向量.

线性代数 哈尔滨工程大学

【定义2】 定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**向量积** $\vec{a}\times\vec{b}$ 是满足下列条件的向量:

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ 同时垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$;

(2) 三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$ 成右手系;

(3) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$ (ΔOAB 的面积的二倍).

【评注】

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;

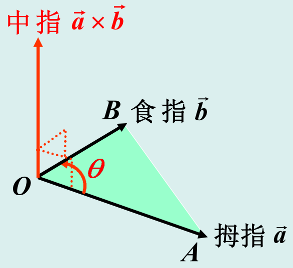
(2) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$;

(3) $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;

(4) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$,

$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$,

$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.



【定理2.2】 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，若向量 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的向量积

$$\vec{a}\times\vec{b}=\{a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\}.$$

【记忆方式】

$$\{a_1,a_2,a_3\}\times\{b_1,b_2,b_3\}$$
$$=\{a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\}$$
$$=\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\}$$
$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

【证明】 由前面的讨论知，存在实数 λ 使得

$$\vec{a}\times\vec{b}=\lambda\{a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\};$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\lambda^2[(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2];$$

另一方面，由向量积长度的定义:

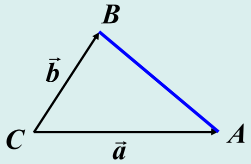
$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta\ =|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta$$
$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2,$$
$$\lambda^2=1,\quad \lambda=\pm1.$$

再由 $\vec{i}=\{1,0,0\}$，$\vec{j}=\{0,1,0\}$，$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}=\{0,0,1\}$，知 $\lambda=1$.

【例2】 给定三点 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$C(2,4,7)$，求 ΔABC 的面积 S.

【解】 $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=\{-1,-2,-4\}$，

$\vec{b}=\overrightarrow{CB}=\{1,0,-2\}$；



$$\vec{a}\times\vec{b}=\{\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\}$$
$$=\{4,-6,2\};$$
$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+4}=\sqrt{14}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

由上述定理，通过直接、简单的代数验算，很轻松地得到下列有关向量积的性质.

【向量积的性质】

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$（向量积对加法的分配律）;

(2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$.

【练习题】 验证(1).

线性代数 哈尔滨工程大学

【思考题】 用数量积证明三角形的三条高交于一点.

【证明】 如图，设

$AO\perp BC,\ BO\perp CA,\ \overrightarrow{AO}=\vec{a},\ \overrightarrow{BO}=\vec{b},\ \overrightarrow{CO}=\vec{c},$

则

$\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{c},\ \overrightarrow{CA}=\vec{c}-\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b};$

从而

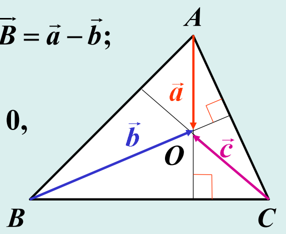
$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0,\quad \vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0,$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})+\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0,$

$-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=0,$

$\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,$

$OC\perp AB$



$OC\perp AB$?

线性代数 哈尔滨工程大学

§2.4 平面及其方程

本节主要内容：

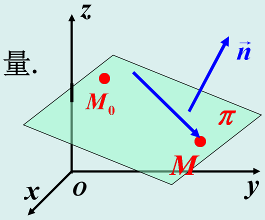
- 平面的点法式方程
- 平面的一般方程
- 平面的截距式方程
- 两平面特殊的位置关系
- 两平面的夹角
- 点到平面的距离

线性代数

哈尔滨工程大学

1. 平面的点法式方程

【法向量】垂直于平面的非零向量.



如图, 平面 π 的法向量:

$\vec{n}=\{A, B, C\}$;

$M_0(x_0, y_0, z_0)\in\pi$:

$M(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

即 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

平面的点法式方程

【求平面方程的方法】(记住!):

(1) 在平面上找出一个点;

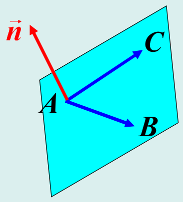
(2) 找出一个与平面垂直的非零向量(法向)。

线性代数

哈尔滨工程大学

【例1】 求过三点 $A(2,-1,4)$, $B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.

【解】 $\overrightarrow{AB}=\{-3, 4, -6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2, 3, -1\}$;



取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$$=\left\{\begin{vmatrix}4 & -6\\ 3 & -1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-3 & -6\\ -2 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{14, 9, -1\};$$

平面方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

化简得

$$14x+9y-z-15=0.$$

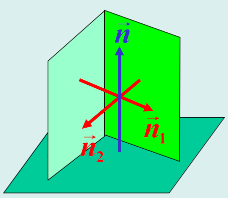
线性代数

哈尔滨工程大学

【例2】 求过点 $(1,1,1)$, 且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

【解】 $\vec{n}_1=\{1,-1, 1\}$, $\vec{n}_2=\{3, 2, -12\}$;

取法向量



$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

$$=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -12\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -12\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{10, 15, 5\}=5\{2, 3, 1\};$$

平面方程为

$$2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0,$$

化简得

$$2x+3y+z-6=0.$$

线性代数

哈尔滨工程大学

2. 平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$$

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

平面一般方程

法向量为 $\vec{n}=\{A, B, C\}$.

$(-(Ax_0+By_0+Cz_0)=D)$

几种特殊情况:

(1) $D=0$: 平面过原点;

(2) $A=0$: 平面平行于 x 轴;

(3) $A=0, D=0$: 平面过 x 轴;

(4) $A=0, B=0$: 平面平行于 xOy 平面.

线性代数

哈尔滨工程大学

【例3】 指出下列平面的特殊位置:

(1) $2x+y+z=0$; (2) $x+2z=0$;

(3) $3x-y=1$; (4) $y=1$.

【解】 (1) 过原点; (2) 过 y 轴;

(3) 平行 z 轴; (4) 平行 zOx 平面.

【例4】 求过 x 轴且与平面 $x-y+2z=0$ 垂直的平面.

【解】 平面为 $By+Cz=0$:

平面的法向 $\vec{n}=\{0, B, C\}$;

由条件知

$\{0, B, C\}\perp\{1,-1,2\}$, $B=2C$;

平面方程为 $2y+z=0$.

线性代数

哈尔滨工程大学

3. 平面的截距式方程

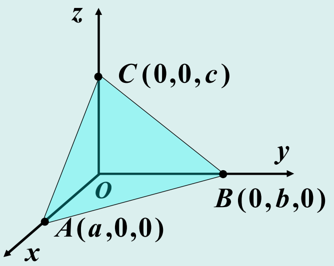
若 $abc\neq 0$, 则平面方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 过

$$A(a,0,0),\quad B(0,b,0),\quad C(0,0,c)$$

三点.

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

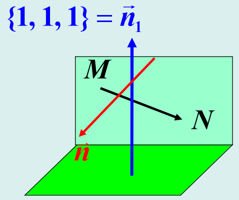
平面截距式方程



a, b, c 分别称平面在三个坐标轴上的**截距**。

【例5】 求过 $M(1,1,1)$ 和 $N(0,1,-1)$ 两点，且垂直于平面 $x+y+z=0$ 的平面方程.

【解】 取法向量



$$\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\{1,1,1\}$$
$$=\{-1,0,-2\}\times\{1,1,1\}$$
$$=\left\{\begin{vmatrix}0&-2\\1&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-1&-2\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}\right\}$$
$$=\{2,-1,-1\};$$

平面方程为

$$2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0,$$

化简得

$$2x-y-z=0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

4. 两平面特殊的位置关系

设有两个平面 $\begin{cases}\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，则

(1) $\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0;$

(2) $\pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}.$

【例6】 讨论以下各组里两平面的位置关系:

(1) $2x-y+z-1=0,\quad 4x-2y+2z-1=0;$

(2) $2x-y-z+1=0,\quad x+3y-z-2=0.$

【解】(1) $\dfrac{2}{4}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \pi_1 /\!/ \pi_2$ (不重合);

(2) $2\cdot1+(-1)\cdot3+(-1)\cdot(-1)=0\Rightarrow\pi_1\perp\pi_2$

线性代数 哈尔滨工程大学

5. 两平面的夹角

【约定】 两个平面的法线(不是法向)的夹角(锐角)称为两个平面的夹角.

若两个平面的法向为

$$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},\quad \vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\},$$

则这两个平面的夹角

$$\theta=\arccos\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$
$$=\arccos\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

6. 点到平面的距离

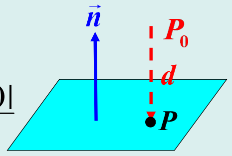
【公式】点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

【证明】 P_0在平面上的垂直投影点为$P(x,y,z)$:

$$d=|\overrightarrow{P_0P}|=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=\pm|\overrightarrow{PP_0}|\cdot|\vec{n}|$

$(Ax+By+Cz=-D)$

线性代数 哈尔滨工程大学

2.5 空间直线及其方程

本节主要内容:

- 直线的参数式与点向式方程
- 直线的一般方程
- 直线与直线、直线与平面的位置关系
- 直线与平面的夹角及位置关系
- 平面束方程

线性代数 哈尔滨工程大学

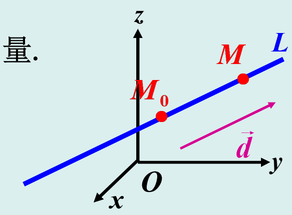
1. 直线的参数式与点向式方程

【直线的方向向量】

平行于直线的一非零向量.

设直线L的方向向量:

$\vec{d}=\{l,m,n\}$;



$M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$:

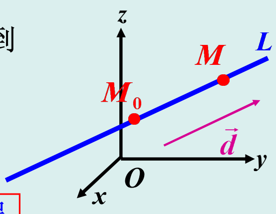
$M(x,y,z)\in L\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}\,//\,\vec{d}\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}=t\vec{d}\quad(|t|<+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt\\z=z_0+nt\end{cases}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

直线的参数式方程

由 $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ $(|t| < +\infty)$ 得到

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}}$$



直线的点向式(对称式)方程

【评注】 $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ 中 l, m, n 可以为 0；

如 $l = 0$，则 $x - x_0 = lt = 0$，因而 $\frac{x - x_0}{l}$ 视为 $\frac{0}{0}$ 即可。

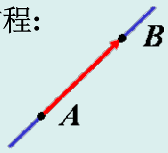
例如，$\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1}$ 为 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ $(|t| < +\infty)$，即 z 轴。

线性代数 哈尔滨工程大学

【例1】 求过 $A(1, 2, 3)$，$B(3, 2, 1)$ 两点的直线方程.

【解】 取 $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \{2, 0, -2\}$，直线方程：

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$



【例2】 求过 $A(1,0,-1)$ 点且与平面

$\pi_1: x + 2y - z = 0$，$\pi_2: 2x - y - z = 1$

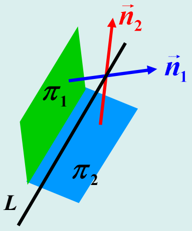
平行的直线方程.

【解】 取 L 的方向向量

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \{-3, -1, -5\};$$

直线 L 方程为 $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{5}$

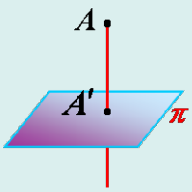


线性代数 哈尔滨工程大学

【例3】 求 $A(1, 2, 3)$ 在平面 π：$x - y + 2z + 1 = 0$ 的投影点 A' 的坐标.

【解】 过点 A 且垂直 π 的直线的参数式方程为

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases};$$



代入平面 π 的方程中得

$$1 + t - (2 - t) + 2(3 + 2t) + 1 = 0,$$

$$t = -1;$$

将 $t = -1$ 代回直线的方程得到

$$x = 0,\quad y = 3,\quad z = 1;$$

即 $A'(0, 3, 1)$.

线性代数

哈尔滨工程大学

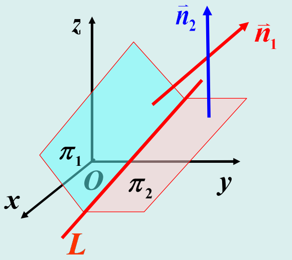
2. 直线的一般方程

空间直线 L 可看成两平面的交线:

$$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (\pi_1)\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (\pi_2)\end{cases}$$

直线的一般方程

其中 L 的方向向量 $\vec{d}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$



线性代数

哈尔滨工程大学

【例4】将直线 $L:\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x-y+3z+4=0\end{cases}$ 化为对称式方程.

【解】 取 $d=\{1,1,1\}\times\{2,-1,3\}=\{4,-1,-3\}$;

在直线上令 $z=0$, 得 $\begin{cases}x+y+1=0\\ 2x-y+4=0\end{cases}$,

$$x=-\frac{5}{3},\quad y=-\frac{2}{3};$$

L的方程:

$$\frac{x+\frac{5}{3}}{4}=\frac{y+\frac{2}{3}}{-1}=\frac{z}{-3}$$

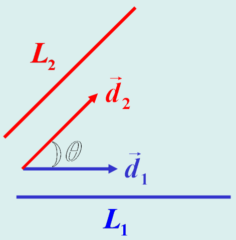
线性代数

哈尔滨工程大学

3. 直线与直线、直线与平面的位置关系

【两直线的夹角】 方向向量的夹角(锐角).

$$\boxed{\theta=\arccos\frac{|\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2|}{|\vec{d}_1|\cdot|\vec{d}_2|}}$$



【两直线的特殊位置关系判定】

(1) $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1\perp\vec{d}_2$

(2) $L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 /\!/ \vec{d}_2$

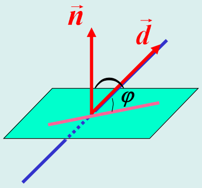
4. 直线与平面的夹角及位置关系

【直线与平面的夹角】 直线和它在平面上的投影直线的夹角φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

若 $L:\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$,

$\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$,

则 $\boxed{\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|}}$



【直线与平面的特殊位置关系判定】

(1) $L /\!/ \pi \Leftrightarrow \vec{d} \perp \vec{n}$

(2) $L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{d} /\!/ \vec{n}$

5. 平面束方程

设直线 L 为$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\ (\pi_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\ (\pi_2) \end{cases}$, 则方程

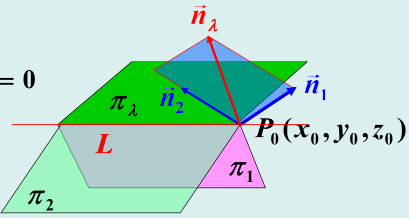
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

包罗了过直线 L 的一切平面方程(π_2除外).

$$\vec{n}_\lambda=\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2=\{A_1+\lambda A_2,\ B_1+\lambda B_2,\ C_1+\lambda C_2\},$$

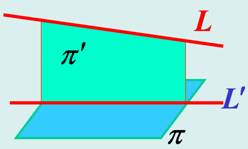
$$(A_1+\lambda A_2)(x-x_0)$$
$$+(B_1+\lambda B_2)(y-y_0)$$
$$+(C_1+\lambda C_2)(z-z_0)=0$$

化简为上述的方程.



【注意】 无论 λ 取何值, $\vec{n}_\lambda$ 都不等于 $\vec{n}_2$.

【例5】 求直线 $L:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+y+z=0$ 上的投影直线L'.



【解】 过 L 的平面束方程为

$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$,

即 $(\lambda+1)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z+\lambda-1=0$.

在平面束方程中找一个与 π 垂直的平面 π':

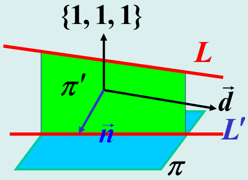
$$(\lambda+1)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(\lambda-1)\cdot 1=0,\quad \lambda=-1;$$

$$\Rightarrow \pi': y-z-1=0$$

所以投影直线 $L':\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$

【思考题】(不用平面束)求直线 $L:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x+y+z=0$ 上的投影直线 L'.

【解】 L 的方向向量



$$\vec{d}=\left\{\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{0,-2,-2\}=(-2)\{0,\ 1,\ 1\},$$

$$(0,1,0)\in L;$$

过直线 L 与 $x+y+z=0$ 垂直的平面 π' 的法向为

$$\vec{n}=\left\{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right\}=\{0,1,-1\};$$

平面 π' 的方程: $0(x-0)+1(y-1)+(-1)(z-0)=0,$

$$y-z-1=0$$

§2.6 空间曲面及其方程

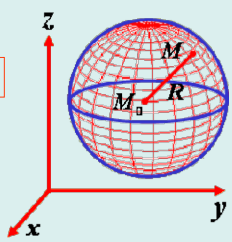
本节主要内容:

- 球面
- 柱面
- 旋转曲面
- 椭圆抛物面
- 椭球面
- 双曲抛物面(马鞍面)
- 单叶双曲面
- 双叶双曲面

1. 球面

以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为心, R 为半径的球面的方程

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$



球面的一般方程为:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0}$$

【例1】 求球面 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 的球心及半径.

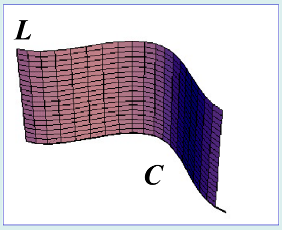
【解】 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$;

球心为 $(0, 0, R)$, 半径为 R.

2. 柱面

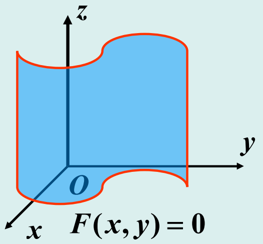
平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线 C 叫柱面的准线, 动直线 L 叫柱面的母线.



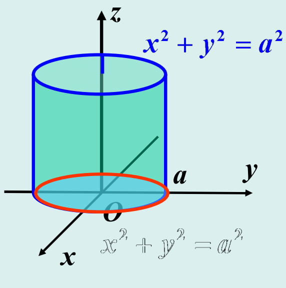
【母线平行于 z 轴的柱面方程】

缺少 z 的方程 $F(x,y)=0$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中一般为母线平行于 z 轴的柱面, 在 xOy 坐标面内 $F(x,y)=0$ 为准线.

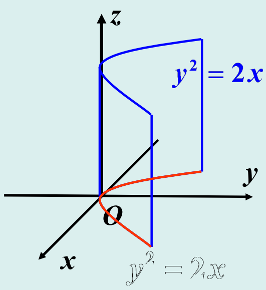


线性代数 哈尔滨工程大学

(1) 圆柱面



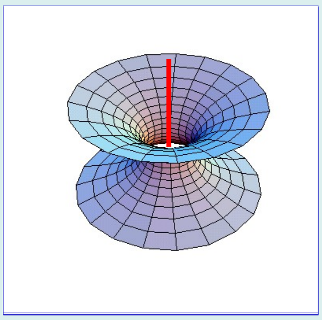
(2) 抛物柱面



线性代数 哈尔滨工程大学

3. 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面. 这条定直线叫旋转曲面的轴.



线性代数

哈尔滨工程大学

【旋转曲面方程的形式】

在 $Oxyz$ 坐标系内, yOz 平面内的曲线 $F(y,z)=0$ 绕 z 轴一周所成旋转曲面的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$$

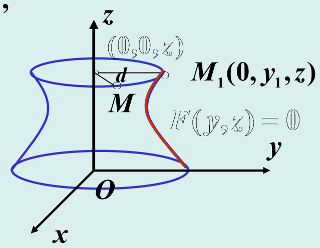
【说明】

如图, $M(x,y,z)$ 在旋转面上, $M(x,y,z)$ 由 yOz 平面内的点 $M_1(0,y_1,z)$ 旋转得到,

$$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2},$$

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0。$$



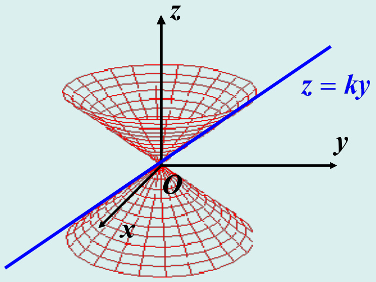
绕谁转谁不动, 另一个变量改为 ± 另两个变量的平方和

线性代数

哈尔滨工程大学

【例2】 yOz 平面内直线 $z=ky\ (k>0)$ 绕 z 轴一周所成旋转曲面(圆锥面)的方程为

$$z=\pm k\sqrt{x^2+y^2}$$

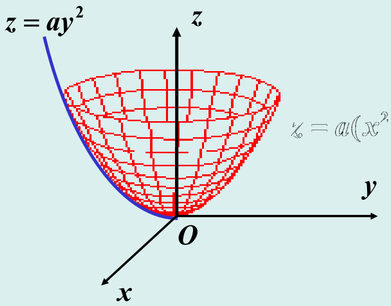


线性代数

哈尔滨工程大学

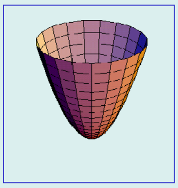
【例3】 yOz 平面内曲线 $z=ay^2$ 绕 z 轴一周所成旋转曲面为抛物面, 其方程为

$$z=a(x^2+y^2)。$$



$$z=a(x^2+y^2)。$$

4. 椭圆抛物面



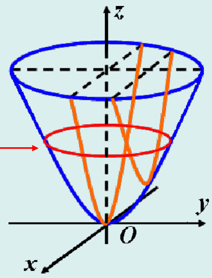
方程为 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$ （p,q 同号）

特点（$p>0,\ q>0$）：

（1） 曲面在 xOy 平面上方，在原点与xOy平面相切；

（2） 平面 $z=h(h>0)$ 与此曲面的截痕为椭圆

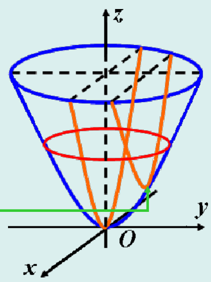
$$\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1$$



线性代数
哈尔滨工程大学

（3） 平面 $y=h$ 截此曲面为抛物线

$$x^2=2p\left(z-\frac{h^2}{2q}\right)$$



（4） 平面 $x=h$ 截此曲面为抛物线.

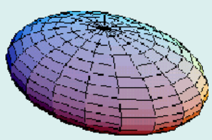
（5） 当 $p=q$ 时，此曲面为旋转抛物面

$$z=\frac{1}{2p}(x^2+y^2)$$

线性代数
哈尔滨工程大学

5. 椭球面

方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，



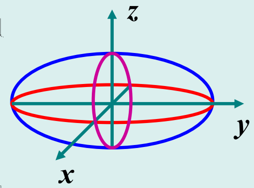
a,b,c 分别称为椭球的半轴.

特点：

（1） 与 xOy 交线为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

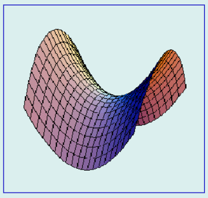
（2） 与 yOz 交线为椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（3） 与 zOx 交线为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$



6. 双曲抛物面(马鞍面)

方程 $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z\quad(pq>0)$

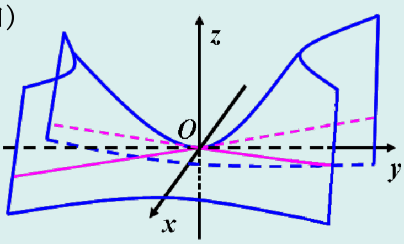


特点 $(p>0,\ q>0)$:

(1) 平面 $z=h\,(h>0)$截曲面为双曲线(左右开口)

(2) 平面 $z=0$ 截曲面两条相交直线

(3) 平面 $z=h\,(h<0)$ 截曲面为双曲线(前后开口)

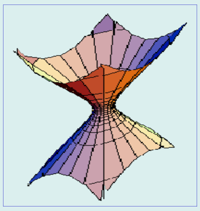


(4) 平面 $x=h,\ y=h$ 截曲面为抛物线

线性代数
哈尔滨工程大学

7. 单叶双曲面

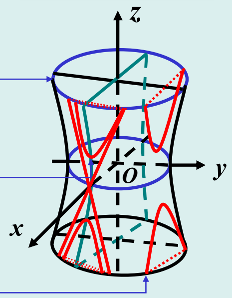
方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



平面$z=h$与此曲面的截痕为椭圆

平面 $x=h$ 与此曲面的截痕为双曲线

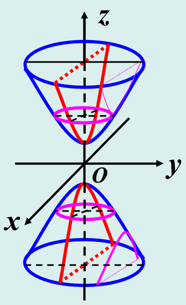
平面 $y=h$ 与此曲面的截痕为双曲线

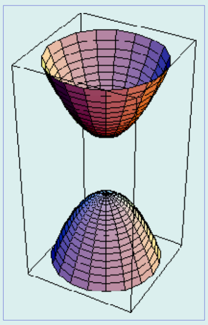


线性代数
哈尔滨工程大学

8. 双叶双曲面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$





【思考题】在$Oxyz$坐标系中，过$A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$两点的直线绕z轴一周所成曲面的方程是什么？

线性代数 哈尔滨工程大学

§ 2.7 空间曲线及其方程

本节主要内容：

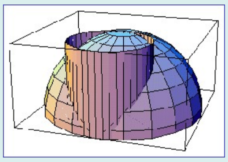
- 空间曲线的一般方程
- 空间曲线的参数方程
- 空间曲线在坐标面上的投影

线性代数 哈尔滨工程大学

1. 空间曲线的一般方程

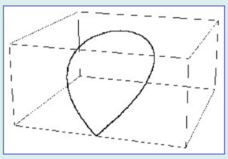
空间曲线C可看作空间两曲面的交线

$$C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$



【例1】下列方程组表示怎样的曲线？

$$\begin{cases}z=\sqrt{1-x^2-y^2}\\(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}\end{cases}$$



【解】 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 是上半球面，$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ 是圆柱面，曲线如图.

2. 空间曲线的参数方程

【空间曲线 C 的参数方程】$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad (\alpha < t < \beta) \\ z = z(t) \end{cases}$

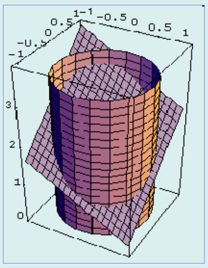
【例2】 将曲线 $C:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ 化为参数方程.

设 $x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0,\ 2\pi]$,

则 $z = 6 - \cos t - \sin t$.

曲线 C 的参数方程为

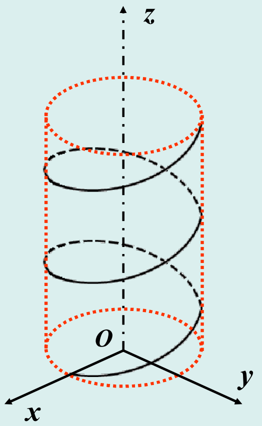
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 6 - \cos t - \sin t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$



线性代数
哈尔滨工程大学

【例3】 圆柱螺线

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \quad (-\infty < t < +\infty) \\ z = t \end{cases}$$



线性代数
哈尔滨工程大学

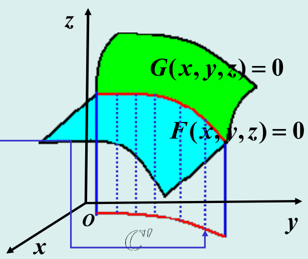
3. 空间曲线在坐标面上的投影

由空间曲线 C 的方程 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 消去 z 后得到

$H(x,y) = 0$ (母线平行 z 轴的柱面).

空间曲线 C 在 xOy 坐标平面的投影曲线为

$$C': \begin{cases} H(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



线性代数 哈尔滨工程大学

【例4】 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影.

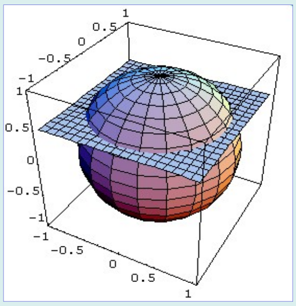
【解】 由方程 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$

消去 z 得

$$x^2+y^2=\tfrac{3}{4};$$

在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{3}{4} \\ z=0 \end{cases}$$



线性代数 哈尔滨工程大学

【例5】 求 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围立体在 xOy 面上的投影.

【解】 半球面和锥面的交线为 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$;

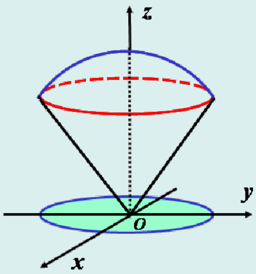
消去 z 得投影柱面 $x^2+y^2=1$.

交线 C 在 xOy 面上的投影为:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

立体在 xOy 面上的投影为:

$$x^2+y^2\leqslant 1.$$



线性代数 哈尔滨工程大学

【思考题】 如何写出空间曲线 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=3-2x^2-y^2 \end{cases}$ 的参数方程?

线性代数 哈尔滨工程大学

哈尔滨工程大学 HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

2.8利用MATLAB绘制空间几何图形

线性代数 哈尔滨工程大学

一、二维常见图形绘制

plot(x,y)	描点 x,y 绘制曲线
ezplot('f(x)')	简单绘制 f(x) 的曲线

线性代数 哈尔滨工程大学

一、二维常见图形绘制

例1. 绘制 $y=\sin x\ (x\in[0,2\pi])$ 的图像.

Plot 描点作图

```
>> X=linspace(0,2*pi,30);
>> Y=sin(X);
>> plot(X,Y)      % 以X向量为横坐标，Y向量纵坐标绘图
>> xlabel('X')    % 给X轴，Y轴添加标题
>> ylabel('Y')
>> title('Y=sinX')  % 给图添加标题
>> grid on        % 开启图像网格
```

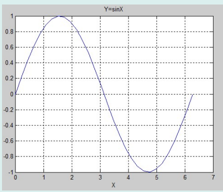
线性代数

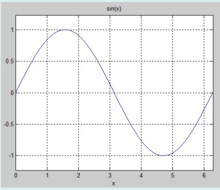
哈尔滨工程大学

一、二维常见图形绘制

例2. 绘制 $y=\sin x\ (x\in[0,2\pi])$ 的图像.

```
>> ezplot('sin(x)',[0,2*pi])
>> grid on
```





线性代数

哈尔滨工程大学

一、二维常见图形绘制

总 结

- plot(X,Y) 常用于描点作图的方法
- ezplot 可用于显示函数、隐函数、参数方程表达的曲线作图

线性代数

哈尔滨工程大学

二、三维常见图形绘制

meshgrid(x,y)	以x,y为基准，产生x-y平面坐标值
mesh(x,y,z)	绘制三维x,y,z网线图
ezmesh('f(x,y)')	简单绘制三维图形
surf(x,y,z)	带阴影绘制x,y,z网线图
ezsurf('f(x,y)')	带阴影简单绘制三维图形

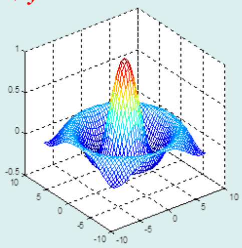
线性代数

哈尔滨工程大学

二、三维常见图形绘制

例3 绘制墨西哥帽子图形 $z=\dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

```
>> [x,y]=meshgrid(-8:.4:8);
>> c=sqrt(x.^2+y.^2)+eps;
>> z=sin(c)./c;
>> mesh(x,y,z)
>> axis square
```



```
>> ezmesh('sin(sqrt(x^2+y^2))/sqrt(x^2+y^2)')
```

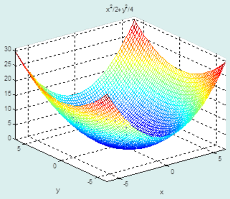
线性代数

哈尔滨工程大学

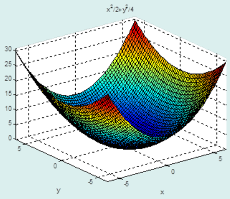
二、三维常见图形绘制

例4 绘制椭圆抛物面 $z=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}.$

```
>> ezmesh('x^2/2+y^2/4')
```



```
>> ezsurf('x^2/2+y^2/4')
```



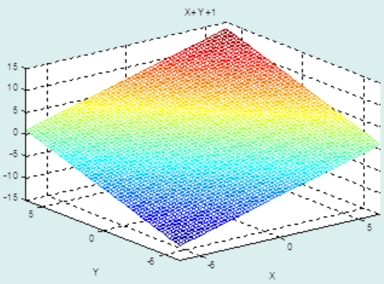
线性代数

哈尔滨工程大学

二、三维常见图形绘制

例5 绘制平面 $x+y-z=1.$

```
>> ezmesh('X+Y-1')
```



习题课二

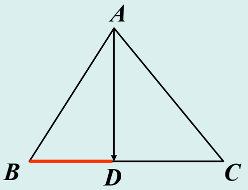
1. 给定三点 $A(4,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$, 对于三角形ΔABC, 求

(1) 向量$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$上的投影.

(2) ΔABC的面积.

(3) BC上高AD的长度.

(4) 过C的中线CE的长度.



解 (1) $\overrightarrow{BC}=\{0,-2,2\}$,

$\overrightarrow{BA}=\{4,-2,0\}$,

$$\text{Prj}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{|\overrightarrow{BC}|}(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA})=\sqrt{2}.$$

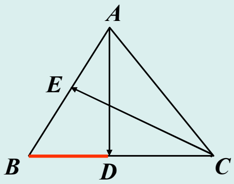
线性代数
哈尔滨工程大学

(2) ΔABC的面积.

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\{4,-2,0\}\times\{0,-2,2\}$$

$$=\{-4,-8,-8\};$$

$$S_{\Delta ABC}=\tfrac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=6.$$



(3) BC上高AD的长度.

$$\left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|=6\\ |\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow|\overrightarrow{AD}|=3\sqrt{2}.$$

(4) 过C的中线CE的长度.

E点的坐标为$(2,1,0)$;

$$|\overrightarrow{CE}|=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(0-2)^2}=3.$$

线性代数
哈尔滨工程大学

2. 若$|\vec a|=\sqrt{3}$, $|\vec b|=1$, $\langle\vec a,\vec b\rangle=\frac{\pi}{6}$.

(1) 求$\langle\vec a+\vec b,\vec a-\vec b\rangle$;

(2) 求以$\vec a+\vec b$, $\vec a-\vec b$为邻边的平行四边形的面积.

解 (1) $\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|\cos\langle\vec a,\vec b\rangle=\frac{3}{2}$,

$$(\vec a+\vec b)\cdot(\vec a-\vec b)=\vec a\cdot\vec a-\vec b\cdot\vec b=2,$$

$$|\vec a+\vec b|^2=(\vec a+\vec b)\cdot(\vec a+\vec b)=|\vec a|^2+|\vec b|^2+2\vec a\cdot\vec b$$

$$=3+1+2\times\tfrac{3}{2}=7,$$

$$|\vec a-\vec b|^2=|\vec a|^2+|\vec b|^2-2\vec a\cdot\vec b=1,$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$\cos\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\rangle=\frac{2}{\sqrt{7}},$$

$$\theta=\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\rangle=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

(2) $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|\cdot\sin\theta$

$$=\sqrt{7}\times1\times\sqrt{1-\tfrac{4}{7}}=\sqrt{3}.$$

另解 $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}+b\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}$

$$=2(\vec{b}\times\vec{a});$$

$|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=2\cdot|b\times\vec{a}|$

$$=2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

3. 求下列平面方程:

(1) 过三点 $O(0,0,0)$, $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$.

(2) 过点 $M(1,2,1)$, 与平面 $\pi_1: x-y+z-1=0$ 垂直, 与直线 $L_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ 平行.

(3) 过直线 $L: \begin{cases}x-z=0\\ x+y+z=1\end{cases}$, 且平行于 x轴.

解 (1) (i) 用点法式:

$$\vec{n}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\{1,0,1\}\times\{2,1,0\}=\{-1,2,1\};$$

所求平面方程为 $-x+2y+z=0.$

线性代数 哈尔滨工程大学

(1) 过三点 $O(0,0,0)$, $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$.

(ii) 用一般方程:

因为平面过原点, 故可设方程为

$$\pi: Ax+By+Cz=0.$$

将A, B两点的坐标代入得:

$$\begin{cases}A+C=0\\ 2A+B=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow C=-A,\ B=-2A;$$

所求平面方程为 $-x+2y+z=0.$

线性代数 哈尔滨工程大学

(2) 过点 $M(1,2,1)$, 与平面 $\pi_1 : x-y+z-1=0$ 垂直, 与直线 L_1: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ 平行.

解 π_1 的法向 $\vec{n}_1=\{1,-1,1\}$, L_1 的方向向量 $\vec{d}=\{1,1,2\}$;

所求平面的法向可为

$$\vec{n}_1=\vec{n}_1\times\vec{d}=\{1,-1,1\}\times\{1,1,2\}$$
$$=\{-3,\ -1,\ 2\};$$

平面方程为:

$$-3(x-1)-(y-2)+2(z-1)=0,$$
$$3x+y-2z-3=0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

(3) 过直线 L: $\begin{cases} x-z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, 且平行于 x 轴.

解 (i) 用点法式:

将 $x=1$ 代入解得 $y=-1,\ z=1$，得 $M_0(1,-1,1)$;

直线 L 的方向向量为

$$\vec{d}=\{1,0,-1\}\times\{1,1,1\}=\{1,-2,1\};$$

因为所求平面过直线 L, 所以其法向 $\vec{n}\perp\vec{d}$;

因为所求平面平行于 x轴, 所以其法向 $\vec{n}\perp\vec{i}$;

故所求平面的法向可取为

$$\vec{n}=\vec{d}\times\vec{i}=\{1,-2,1\}\times\{1,0,0\}=\{0,1,2\};$$

平面方程为: $(y+1)+2(z-1)=0$

$$y+2z-1=0$$

线性代数 哈尔滨工程大学

(ii) 用一般方程:

平面平行 x 轴, 可设平面方程为

$$By+Cz+D=0;$$

又由已知平面过 L, 故 $\vec{n}\perp\vec{d}$, 从而

$$-2B+C=0;$$

点 $M_0(1,-1,1)$ 在平面上, 从而

$$-B+C+D=0;$$

由上面两式得到

$$B:C:D=-1:-2:1;$$

平面方程为:

$$y+2z-1=0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

(iii) 用平面束:

设平面π的方程为

$$\pi:\quad x-z+\lambda(x+y+z-1)=0,$$

此平面的法向 $\vec{n}=\{1+\lambda,\ \lambda,\ -1+\lambda\}$.

因为所求平面平行于x轴, 所以其法向 $\vec{n}\perp\vec{i}$,

$$1+\lambda=0,\quad \lambda=-1.$$

平面方程为:

$$y+2z-1=0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

4. 求下列直线方程:

(1) 过点$A(2,-3,4)$, 且与平面 $2x-y+3z-3=0$ 和 $5x+4y-z-7=0$平行.

(2) 过点$A(1,-2,3)$, 与z轴相交, 且与 L_1 垂直:

$$L_1:\ \frac{x}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{-2}.$$

解 (1) 直线的方向向量

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-11,\ 17,\ 13\};$$

直线方程为

$$\frac{x-2}{-11}=\frac{y+3}{17}=\frac{z-4}{13}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

(2) 设直线的方向向量为 $\vec{s}=\{m,n,p\}$.

$$L\perp L_1\Rightarrow \vec{s}\perp\{4,3,-2\}\Rightarrow 4m+3n-2p=0;$$

由直线过点A且与z轴相交知:

$$\vec{s}\perp(\overrightarrow{OA}\times\vec{k})=\vec{s}\times\{-2,-1,0\}\Rightarrow -2m-n=0;$$

$$\begin{cases}4m+3n-2p=0\\ -2m-n=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=-2m\\ p=-m\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{s}=m\{1,-2,-1\}.$$

所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{-1}.$$

【注】在研究有关直线及平面的一些复杂问题时，关键是利用向量这一工具，通过分析图形找思路.

5. 若已知两异面直线为

$$L_1:\ \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{1},\quad L_2:\ \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

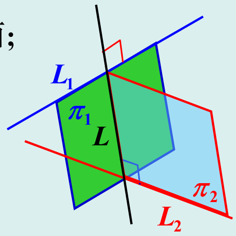
求这两条直线公垂线 L 的方程.

解 如图，π_1 为 L_1 和 L 张成的平面；

π_2 为 L_2 和 L 张成的平面.

L 的方向向量

$$\vec{s}=\{-2,0,1\}\times\{1,2,-1\}$$
$$=\{-2,-1,-4\};$$



线性代数 哈尔滨工程大学

π_1 的法向

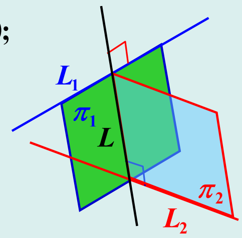
$$\vec{n}_1=\{2,1,4\}\times\{-2,0,1\}$$
$$=\{1,-10,2\},$$

π_1 的方程为 $x-10y+2z+14=0$;

π_2 的法向

$$\vec{n}_2=\{2,1,4\}\times\{1,2,-1\}$$
$$=\{-9,6,3\},$$

π_2 的方程为 $-3x+2y+z-3=0$.



L 的方程为

$$\begin{cases}x-10y+2z+14=0\\-3x+2y+z-3=0\end{cases}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

6. 解答下问题：

(1) 求点 $A(1,1,1)$ 到平面 $\pi:\ x+y+z+1=0$ 的距离 d 及 A 在平面 π 上的投影.

(2) 求点 A 到直线 $L:\ \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的距离.

(3) 上述直线 L 与平面 π 的夹角 φ.

解 (1) $d=\dfrac{|1+1+1+1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$;

过点 $A(1,1,1)$ 作垂直于平面 π 的直线

$$L_1:\ \begin{cases}x=t+1\\y=t+1;\\z=t+1\end{cases}$$

线性代数

哈尔滨工程大学

将 $x=t+1,\ y=t+1,\ z=t+1$ 代入平面 π 的方程得到

$$t=-\frac{4}{3},$$

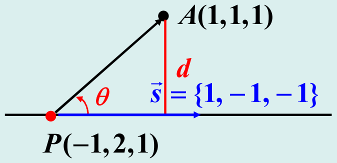
$M(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ 为所求投影点.

(2) 求点 A 到直线 L: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的距离.

解 $d=|\overrightarrow{PA}|\sin\theta$

$$=|\overrightarrow{PA}|\frac{|\overrightarrow{PA}\times\vec{s}\,|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\vec{s}\,|}$$

$$=\frac{|\overrightarrow{PA}\times\vec{s}\,|}{|\vec{s}\,|}=\sqrt{2}.$$



线性代数

哈尔滨工程大学

(3) 上述直线 L 与平面 π 的夹角 φ.

解 $\sin\varphi=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{s}\,|}{|\vec{n}\,|\cdot|\vec{s}\,|}=\dfrac{1}{3},\quad \varphi=\arcsin\dfrac{1}{3}.$