第五章 向量组的线性相关性

本章主要内容:

- 向量组的线性相关性
- 向量组的秩及其与矩阵的秩的关系
- 线性方程组解的结构
- 向量空间及线性变换
- 矩阵运算的相关MATLAB应用

§5.1 向量及其线性运算

本节主要内容:

- 向量及其线性运算
- 向量组的等价

1. 向量及其向量的线性运算

【名词约定】

我们称 $n\times 1$ 实矩阵

$$(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$$

为 n 维列向量，称 a_i 为此向量的第 i 个坐标，坐标全为零的向量 $(0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 称为零向量，一切 n 维列向量的集合记为 $\mathbb{R}^n$，称其为 n 维（列）向量空间；同样有 n 维行向量和 n 维行向量空间. 以后若没有特别声明，向量为列向量，且所涉及的数都是实数；而且，每个关于列向量的结论都有一个行向量版本.

【向量的加法】

对于向量$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$, α 与β 的**和**为

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,\ \cdots,\ a_n+b_n)^{\mathrm{T}},$$

即向量的加法是对应坐标相加.

【数乘向量】

对于向量$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 和数k, k与α 的**乘积**为

$$k\alpha=(ka_1,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}},$$

即数乘向量是这个数乘此向量的每个坐标.

{向量的加法和数乘称为向量的线性运算}

2. 向量之间的线性表示

从线性运算的角度, 我们关注向量空间$\mathbb{R}^n$的整体性质, 即多个向量的线性运算关系.

【定义1】 对于n维向量$\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 若存在常数$k_1, \cdots, k_m$使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m,$$

则称β可由$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$线性表示或称$\beta$是$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$的线性组合.

【例1】 向量空间$\mathbb{R}^n$中任何向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$都可表示为向量组

$$\mathrm{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}},\ \mathrm{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \mathrm{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$$

的线性组合, 这是因为$\alpha = a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + \cdots + a_n\mathrm{e}_n$.

【例2】 求证任意三维向量$\beta=(a, b, c)^{\mathrm{T}}$都可表示为向量组

$$\alpha_1=(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

的线性组合，并写出表示关系.

【解】 令$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ \qquad x_2+x_3=b. \\ \qquad\qquad x_3=c \end{cases}$$

解此方程组,得到

$$x_1=a-b,\quad x_2=b-c,\quad x_3=c;$$

$$\beta=(a-b)\alpha_1+(b-c)\alpha_2+c\alpha_3.$$

【另一个角度看方程组】 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

若造向量

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则此方程组就是

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta;$$

其有解等价于 β 可由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

【命题 5.1】 设 $A=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$为$m\times n$矩阵，则存在不全为 0 的数$k_1,\cdots,k_n$使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$$

成立的充要条件是 $\mathrm{r}(A)<n$.

【证明】 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$就是齐次线性方程组

$$[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=0;$$

而此方程有非零解的充要条件就是 $\mathrm{r}(A)<n$.

【例3】 给定向量组Ac $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ $(m \ldots 2)$. 求证：A 中至少有一个向量可以由其余的 $m-1$ 个向量线性表示$\Leftrightarrow$存在一组不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_m$ 使得
$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

【证明】 $(\Rightarrow)$ 不妨设 $\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0 \quad (k_1 = -1 \neq 0).$$

$(\Leftarrow)$ 设不全为 0 的 $k_1, \cdots, k_m$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0:$$

若 $k_1 \neq 0$,

$$\alpha_1 = (-k_1^{-1}k_2)\alpha_2 + \cdots + (-k_1^{-1}k_m)\alpha_m;$$

若 $k_i \neq 0$ $(i \ldots 2)$, 则 α_i 可由其余的向量线性表示.

3. 向量组的等价

【定义2】 对线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量组

$$A: \alpha_1, \cdots, \alpha_r; \quad B: \beta_1, \cdots, \beta_s,$$

若A中的每个向量都可由B中的向量线性表示，则称A**可由B线性表示**(A 线性受控于B). 若两个向量组能相互线性表示，则称它们**等价**.

【例4】 线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中下列两个向量组等价:

$$A: \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$B: \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

线性代数

哈尔滨工程大学

【命题 5.2】 向量组A：$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 可由B：$\beta_1, \cdots, \beta_s$，表示等同于存在一个 $s \times r$ 矩阵 K 使得

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_r] = [\beta_1, \cdots, \beta_s]K.$$

【示例】 例如,

$$\begin{cases} \alpha_1 = 3\beta_1 - 2\beta_2 \\ \alpha_2 = 4\beta_1 + 6\beta_2 \\ \alpha_3 = 5\beta_1 - 2\beta_2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\beta_1, \beta_2]\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

【推论】 若向量组A：$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$可由B：$\beta_1, \cdots, \beta_s$表示，则

$$\mathbf{r}([\alpha_1, \cdots, \alpha_r]) \text{到} \mathbf{r}([\beta_1, \cdots, \beta_s]);$$

特别是，当这两个向量组等价时，

$$\mathbf{r}([\alpha_1, \cdots, \alpha_r]) = \mathbf{r}([\beta_1, \cdots, \beta_s]).$$

【证明】（接命题5.2）

$$\mathbf{r}([\alpha_1, \cdots, \alpha_r]) = \mathbf{r}([\beta_1, \cdots, \beta_s]K)$$

$$„ \ \mathbf{r}([\beta_1, \cdots, \beta_s]).$$

§5.2 向量组的线性相关性

本节主要内容:

- 向量组的线性相关
- 向量组的线性无关

1. 向量的线性相关性

【定义1】 给定一个向量组A：$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$. 若存在一组不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_m$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

则称向量组A **线性相关**；否则，称此向量组**线性无关**，即向量组A：$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关等同于以 $x_1, \cdots, x_m$ 为未知数的方程

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

仅有零解.

【例1】 向量组 $\alpha_1 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = (1, -2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3 = (3, 0)^{\mathrm{T}}$ 线性相关:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + (-1)\alpha_3 = \mathbf{0}.$$

【例2】 线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中下列两向量组都线性无关:

$$A:\ \mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};$$

$$B:\ \alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

【命题5.3】 单个向量 α 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha\neq 0$.

【证明】 要 $k\alpha=0$ 仅当 $k=0$ 成立只有 $\alpha\neq 0$.

含有零的向量组:

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_m$$

一定线性相关.

【命题5.4】 向量组Ac $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ $(m \ldots 2)$线性相关 $\Leftrightarrow$ A中至少有一个向量可以由其余的$m-1$个向量线性表示.

【证明】(这就是上一节的例3)

【推论】 两个向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

线性相关$\Leftrightarrow a_1, a_2, \cdots, a_n$与$b_1, b_2, \cdots, b_n$对应成比例.

【证明】 由上面的命题知向量α, β线性相关等同于

$$\alpha = k\beta \text{ 或 } \beta = l\alpha.$$

这等同于$a_1, a_2, \cdots, a_n$与$b_1, b_2, \cdots, b_n$对应成比例.

2. 向量线性相关性的判定

【问题】 如何有效地判别一组向量是线性相关的还是线性无关?

【定理5.1】 矩阵

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(A)=n$.

【证明】 (这就是命题5.1的逆否命题)

【问题】 上述定理的行向量版是什么样的?

【推论1】 方阵 A 的行向量组线性无关 $\Leftrightarrow |A| \neq 0.$

【证明】 n 阶方阵 A 的行向量组线性无关等同于

$$\mathrm{r}(A) = n;$$

这等同于 $|A| \neq 0.$

【推论2】 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

【证明】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, 则

$$\mathrm{r}([\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}]) \leq n < n+1.$$

上述定理知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 线性相关.

【例3】 求证向量组

$$\alpha_1=(3,\quad 1,\quad 0,\quad 2),$$
$$\alpha_2=(1,\quad -1,\quad 2,\quad -1),$$
$$\alpha_3=(1,\quad 3,\quad -4,\quad 4)$$

线性相关性，且将其中一个向量表示成另外两个向量的线性组合.

【解】

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{bmatrix}\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\\ 3 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{matrix}\alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_1\end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathrm{r}(A) = 2$

$\Rightarrow$向量组线性相关;

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2 + \alpha_3 .$$

【例4】 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关. 令

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2,\quad \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3,\quad \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1,$$

求证向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$也线性无关.

【证明1】 由于

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故

$$r([\beta_1, \beta_2, \beta_3]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = 3,$$

向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关.

线性代数

哈尔滨工程大学

【证明2】 令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，则得到

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0;$$

而由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0. \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

由此解出 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 由定义知向量组

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3$$

线性无关.

【命题5.5】 对于两个向量组

$$\text{A}: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \quad \text{B}: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s,$$

若 A 可以由 B 线性表示 (Ax线性受控于 B), 且 A 线性无关, 则 $s..r$.

【证明】 由条件, 存在一个 $s \times r$ 矩阵 K 使得

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_r] = [\beta_1, \cdots, \beta_s]K;$$

从而

$$r = \mathrm{r}([\alpha_1, \cdots, \alpha_r]) = \mathrm{r}([\beta_1, \cdots, \beta_s]K)$$

$$„ \ \mathrm{r}([\beta_1, \cdots, \beta_s])$$

$$„ \ s.$$

【推论】 若两个向量组

$$A:\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\quad B:\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$$

都线性无关且等价，则 $r=s$.

【证明】 由上述定理知，r „ s，s „ r. 从而 $r=s$.

§5.3 向量组的秩

本节主要内容:

- 向量组的秩
- 向量组的极大线性无关组
- 向量组的秩与矩阵的秩的关系

1. 向量组的秩

【引理】 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\,(m\ldots 1)$线性无关, 则$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$线性无关$\Leftrightarrow\beta$不能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示.

【证明】 $(\Rightarrow)$ 若β能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示, 则向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关.

$(\Leftarrow)$ 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关, 则存在不全为0的$k_1,k_2,\cdots,k_m,k$使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta=0.$$

这里一定有$k=0$; 否则, β能由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示.

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_m=0,\ \text{这不可能!}$$

【定义1】 (1) 若向量组A 中有 $r\ (r \ldots 1)$ 个向量线性无关，而A 中任何 $r+1$ 个向量(若存在)都线性相关，则称数 r 为向量组A 的**秩**，记为在 $\mathbf{r}(A)$；仅含有零向量的向量组的秩约定为 0.

(2) 若向量组A 的秩为 $r\ (r \ldots 1)$，则A 中任何 r 个线性无关的向量构成的向量组称为A 的一个**极大(线性)无关组**.

例如，向量组

$$\alpha_1 = (1,\ 0),\ \alpha_2 = (0,\ 1),\ \alpha_3 = (1,\ 1)$$

的秩为2；向量组 α_1, α_2；α_1, α_3；α_2, α_3 都是此向量组的极大无关组.

【命题5.6】 向量组A : $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow \mathbf{r}(A) = r$.

【证明】 由向量组秩的定义知, 此结论成立.

2. 极大无关组的特征

【命题5.7】 线性无关的向量组 B 是向量组 A 的一部分, 则 B 是 A 的极大无关组 $\Leftrightarrow$ B 可以线性表示 A .

【证明】 ($\Rightarrow$) 令向量组A 的秩 $\mathbf{r}(A) = r$;

B : $\beta_1, \cdots, \beta_r$.

令 α 为A 中任意向量. 此时, $\beta_1, \cdots, \beta_r, \alpha$ 线性相关;

由前面的引理知, α 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表示.

(⇐) 令 B：$\beta_1, \cdots, \beta_r$ 可以线性表示A .

要说明B 是极大无关组, 我们只要说明 $\mathrm{r}(A) = r$.

在A 中任取 $r+1$ 个向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r+1}$:

这个向量组一定线性相关;

否则, 由命题5.5知, 有 $r+1,, r$.

由向量组秩的定义知 $\mathrm{r}(A) = r$.

【评注】 上述命题说明, 极大无关组的特征是, 其**本身线性无关且能够线性表示整个向量组**. 此命题也说明, 一个**向量组与它的任何一个极大无关组等价**; 且**一个向量组的任何两个极大无关组也等价**.

【命题5.8】 若向量组 A 线性受控于 B，则

$$\mathrm{r}(A) \le \mathrm{r}(B);$$

特别是，等价的向量组有相同的秩.

【证明】 令 $\bar{A}$: $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 A 的极大无关组;

$\bar{B}$: $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 B 的极大无关组.

此时, $\bar{A}$ 与 A 等价, B 与 $\bar{B}$ 等价;

从而, $\bar{A}$ 可由 $\bar{B}$ 线性表示.

于是, 由命题5.5,

$$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\bar{A})=r \le s=\mathrm{r}(\bar{B})=\mathrm{r}(B).$$

3. 向量组的秩与矩阵的秩的关系

【评注】 前面关于行向量组的理论都有列向量组版，特别是列向量组也有秩.

【问题】 矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}=[\gamma_1, \ \cdots, \ \gamma_n]$$

产生一个行向量组和一个列向量组

$$\mathrm{R}: \alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}^{1\times n}, \quad \mathrm{C}: \gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{R}^{m\times 1};$$

$\mathbf{r}(\mathrm{R})$, $\mathbf{r}(\mathrm{C})$, $\mathbf{r}(A)$有什么关系?

线性代数

哈尔滨工程大学

下面的定理揭示这三个秩的关系：它们相等．此结论是矩阵的最本质性质．

【定理5.2】 设矩阵

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}=[\gamma_1,\cdots,\gamma_n],$$

的行向量组R 的秩为 s，列向量组 C 的秩为 t，则

$$\mathrm{r}(A)=s=t.$$

【证明】 先证 $\mathrm{r}(A)=s$.

不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 为行向量组R 的极大无关组:

此时，我们有

线性代数

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\\ \alpha_{s+1}\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(iii) 型行初等变换}}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.$$

事实上，若 $\alpha_m=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$，$t$ 个行初等变换

$$(-k_i)\times \mathrm{r}_i\to \mathrm{r}_m\quad(i=1,\cdots,t)$$

可将 A 的最后一行变为零向量 0.

从而有
$$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}\right)=s.$$

哈尔滨工程大学

$\mathrm{r}(A)=t$ 的证明:

首先, 我们有

$$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}});$$

又C: $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 为 A^{T} 的行向量组.

再由上一部分的证明知

$$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(C)=t.$$

【评注】 上述定理将向量组的秩转化为矩阵的秩, 而我们可以用矩阵的初等变换来求矩阵的秩.

最后, 我们将指出向量组的另一个重要性质.

【命题5.9】 若

$$A=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]_{m\times n}\xrightarrow{\text{行初等变换}}B=[\beta_1,\cdots,\beta_n]_{m\times n},$$

则向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\cdots,\beta_n$有相同的线性结构，即

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}\Leftrightarrow k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n=\mathbf{0};$$

进而向量组

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\text{与}\beta_1,\cdots,\beta_n$$

有相同的线性相关性.

【证明】 本节思考题.

【例1】 求下列向量组的秩和一个极大无关组，并将其它向量表示成这个极大无关组的线性组合：

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, & 1, & 0, & 1, & 0)^{\mathrm{T}}, \\ \alpha_2 = (0, & 1, & 1, & 1, & 1)^{\mathrm{T}}, \\ \alpha_3 = (1, & 0, & 1, & 2, & 1)^{\mathrm{T}}, \\ \alpha_4 = (2, & 2, & 2, & 4, & 2)^{\mathrm{T}}, \\ \alpha_5 = (1, & 1, & 2, & 3, & 2)^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

【解】 我们的方法是对矩阵

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_5]$$

进行行初等变换，将其化简至行最简形式：

线性代数

哈尔滨工程大学

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&1&2&1\\1&1&0&2&1\\0&1&1&2&2\\1&1&2&4&3\\0&1&1&2&2\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\end{array}\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4&\beta_5\end{array}\end{array}=B.$$

由命题5.9, 只需要对$\beta_1,\cdots,\beta_5$回答我们的问题:

线性代数

$$B^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{array} \xrightarrow{\text{行初等变换}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 \\ \beta_5 - \beta_2 - \beta_3 \end{array}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_5$ 的一个极大无关组;

$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$， $\alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$.

【例2】 求证下列两个向量组等价：

A ：$\alpha_1 = (2, 0, -1, 3)$, $\alpha_2 = (3, -2, 1, -1)$;

B ：$\beta_1 = (-5, 6, -5, 9)$, $\beta_2 = (4, -4, 3, -5)$.

【证明】 由于这两个向量组的秩都是2, 若有

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = 2,$$

则 A ,B 都是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 的极大无关组,

从而 A 与 B 等价.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 9 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -15 & 10 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = r([\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]) = 2.$$

【例3】 $\mathrm{r}(A+B)$,, $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.

【证明】 令

$$A=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n],$$
$$B=[\beta_1,\cdots,\beta_n],$$
$$A+B=[\gamma_1,\cdots,\gamma_n].$$

$A+B$ 的列向量组

$$\gamma_1=\alpha_1+\beta_1,\ \cdots,\ \gamma_n=\alpha_n+\beta_n$$

可由向量组

$$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_n$$

线性表示.

另一方面,

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \text{ 可由 } \mathrm{r}(A) \text{ 个向量组线性表示;}$$

$$\beta_1, \cdots, \beta_n \text{ 可由 } \mathrm{r}(B) \text{ 个向量组线性表示.}$$

总之, $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 可由 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$ 个向量组线性表示;

$$\mathrm{r}(A+B)=\mathrm{r}(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \leqslant \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B).$$

【思考题】

向量组的一个部分线性无关组能否扩展为极大无关组?

§5.4 线性方程组解的结构

本节主要内容:

- 齐次线性方程组的基础解系
- 齐次线性方程组解的结构
- 非齐次线性方程组解的结构

1. 齐次方程组解的结构

【定理5.3】 若 X_1, X_2 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，则 X_1, X_2 的线性组合 $c_1X_1+c_2X_2$ 也是方程组 $AX=0$ 的解，其中 c_1, c_2 为任意常数.

【证明】

$$\begin{aligned}
&A(c_1X_1+c_2X_2)\\
&=A(c_1X_1)+A(c_2X_2)\\
&=c_1(AX_1)+c_2(AX_2)\\
&=0+0=0.
\end{aligned}$$

线性代数

哈尔滨工程大学

【例1】 用向量形式表示 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解.

【解】 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ (行最简)

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_4 \\ x_2 = \quad x_2 \\ x_3 = \qquad 3x_4 \\ x_4 = \qquad x_4 \end{cases}$；通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

解向量 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的特点: $\begin{cases} \text{线性无关;} \\ \text{能线性表示方程组的任何一个解.} \end{cases}$

【定义1】 若齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解，满足下列条件的解向量 $X_1,\cdots,X_k$ 称为 $AX=0$ 的(一个)基础解系：

(1) $X_1,\cdots,X_k$ 线性无关；

(2) $AX=0$ 的任何解 X 都可由 $X_1,\cdots,X_k$ 线性表示；

此时

$$X=c_1X_1+\cdots+c_kX_k \ (c_1,\ \cdots,\ c_k\text{为任意常数})$$

为方程的**通解**.

【评注】

(1) n元方程组 $AX=0$ 仅当 $\mathrm{r}(A)<n$ 时才有基础解系.

(2) 方程组 $AX=0$ 的基础解系不唯一.

【定理5.4】 若 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解，则此方程组必有基础解系，且含有 $n-\mathrm{r}(A)$ 个线性无关的解向量.

【证明】 若 $\mathrm{r}(A_{m\times n})=r \ldots 1$，则 $AX=0$ 齐次线性方程组与如下的方程组同解：

$$
(\mathbf{Y}) \qquad \begin{cases} y_1 = d_{1,r+1}y_{r+1} + \cdots + d_{1n}y_n \\ y_2 = d_{2,r+1}y_{r+1} + \cdots + d_{2n}y_n \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ y_r = d_{r,r+1}y_{r+1} + \cdots + d_{rn}y_n \end{cases}
$$

这里 $y_1,\cdots,y_n$ 的为 $x_1,\cdots,x_n$ 的一个排列.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ y_{r+2} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{Y} = y_{r+1}\underbrace{\begin{bmatrix} d_{1,r+1} \\ d_{2,r+1} \\ \vdots \\ d_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{Y_1} + y_{r+2}\underbrace{\begin{bmatrix} d_{1,r+2} \\ d_{2,r+2} \\ \vdots \\ d_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{Y_2} + \cdots + y_n\underbrace{\begin{bmatrix} d_{1n} \\ d_{2n} \\ \vdots \\ d_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{Y_{n-r}}$$

$Y_1, \cdots, Y_{n-r}$ 是基础解系：$Y_1, \cdots, Y_{n-r}$ 线性无关，且能线性表示方程组的任何一个解向量 Y.

【例2】 设两个矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{n\times s}$ 的乘积 $AB=0$，则

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\le n.$$

【证明】 若令 $B=[\beta_1,\cdots,\beta_s]$，则 $AB=0$ 等同于

$$A\beta_1=0,\quad \cdots,\quad A\beta_s=0;$$

即列向量 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 都是线性方程组 $AX=0$ 的解向量. 于是矩阵 B 的列向量组可由 $n-\mathrm{r}(A)$ 个线性无关的向量线性表示(方程组 $AX=0$ 的基础解系). 从而

$$\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(\beta_1,\cdots,\beta_s)$$

$$\le n-\mathrm{r}(A),$$

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\le n.$$

2. 非齐次方程组解的结构

【例3】 求方程组$\begin{cases} 2x+y-z+w=1 \\ 4x+2y-2z+w=2 \\ 2x+y-z-w=1 \end{cases}$通解的向量形式.

【解】 $\tilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z \\ y=y \\ z=z \\ w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

【定理5.5】 设n元线性方程组$AX=b$有无穷多组解即有$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\widetilde{A})=r<n$. 若 X_0 是 $AX=b$ 的一个解向量, $X_1, \cdots, X_{n-r}$是$AX=0$的基础解系, 则

$$X=X_0+c_1X_1+\cdots+c_{n-r}X_{n-r}$$

$$(c_1, \cdots, c_{n-r}\text{为任意常数})$$

是$AX=b$的通解.

【证明】 设$\widetilde{X}$为方程组$AX=b$的任何一个解向量:

$$A\widetilde{X}=b,\ AX_0=b \Rightarrow A(\widetilde{X}-X_0)=0;$$

$$\widetilde{X}-X_0=c_1X_1+\cdots+c_{n-r}X_{n-r},$$

$$\widetilde{X}=X_0+c_1X_1+\cdots+c_{n-r}X_{n-r}.$$

【例4】 设4元非齐次线性方程组$AX=b$的系数阵的秩为3. 已知X_1, X_2, X_3是它的三个解向量，且

$$X_1=(2,\ 3,\ 4,\ 5)^{\mathrm{T}},\qquad X_2+X_3=(1,\ 2,\ 3,\ 4)^{\mathrm{T}},$$

求此方程组的通解.

【解】 方程 $AX=0$ 的基础解系有$4-3=1$个解向量;

方程 $AX=b$两个解的差 $AX=0$的解，而齐次方程解的线性组合还是其解，从而

$$X_0=(X_3-X_1)+(X_2-X_1)=(X_3+X_2)-2X_1$$
$$=(-3,\ -4,\ -5,\ -6)^{\mathrm{T}}$$

为 $AX=0$ 的非零解; $AX=b$ 的通解为

$$X=(2,\ 3,\ 4,\ 5)^{\mathrm{T}}+c(3,\ 4,\ 5,\ 6)^{\mathrm{T}}.$$

3. 几个关于矩阵秩的例题

由齐次线性方程组解的理论可以得到许多关于矩阵秩的有趣结论

【例5】 对于矩阵 $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$, 求证 $\mathbf{r}(AB)\leq \mathbf{r}(B)$.

【证明】 我们考察方程组:

$$BX=0,\quad ABX=0.$$

$$BX=0\Rightarrow ABX=0:$$

方程 $BX=0$ 的解都是 $ABX=0$ 的解;

方程 $BX=0$ 的基础解系可以由方程 $ABX=0$ 的基础解系线性表示; 从而

$$\boxed{BX=0 \Rightarrow ABX=0}$$

$$s-\mathrm{r}(B),\quad s-\mathrm{r}(AB),\quad \mathrm{r}(AB),\quad \mathrm{r}(B).$$

【例6】 设$A=[a_{ij}]_{n\times n}$，求证$\mathrm{r}(A^n)=\mathrm{r}(A^{n+1})$.

【证明】 我们将证明下面两个方程组同解:

$$A^nX=0,\quad A^{n+1}X=0.$$

从而

$$n-\mathrm{r}(A^n)=n-\mathrm{r}(A^{n+1}),\qquad \mathrm{r}(A^n)=\mathrm{r}(A^{n+1}).$$

$A^nX=0 \Rightarrow A^{n+1}X=0$是明显的;

我们用反证法证明$A^{n+1}X=0 \Rightarrow A^nX=0$也成立:

假设 $A^{n+1}X_0=0$, 但 $A^nX_0\neq 0$.

此时, 我们断言列向量组

$$X_0,\ AX_0,\ A^2X_0,\ \cdots,\ A^nX_0$$

线性无关.

事实上, 由

$$k_0X_0+k_1AX_0+k_2A^2X_0+\cdots+k_nA^nX_0=0$$

可推出 $k_0=k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. (?)

这是不可能, 因为 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

【思考题】

设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 为实数矩阵, 求证 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)$.

§5.5 向量空间与线性变换

本节主要内容:

- 向量空间
- 向量空间的基和维数
- 生成子空间
- 矩阵的值域与核
- 线性变换
- 向量空间中两个基的联系

1. 向量空间

【定义1】设V是$\mathbb{R}^n$的一个非空子集. 若V满足如下两项，则称V为向量空间:

(1) (加法封闭)对任意$\alpha, \beta \in V$，有$\alpha + \beta \in V$;

(2) (数乘封闭)对任意$\alpha \in V$, $k \in \mathbb{R}$，有$k\alpha \in V$.

【评注】

(1) 加法、数乘封闭可合并成线性运算封闭:

对任意$\alpha, \beta \in V, k, l \in \mathbb{R}$, 有$k\alpha + l\beta \in V$;

(2) 由于$\mathbb{R}^n$本身为向量空间, 当$V \subseteq \mathbb{R}^n$为向量空间时, 我们也说V为$\mathbb{R}^n$的子空间.

(3) 仅有一个零向量的集合$V=\{(0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\}\subseteq\mathbb{R}^n$是一个向量空间．这是唯一一个仅有有限个向量构成的向量空间．事实上，若V是向量空间，且$\mathbf{0}\neq\alpha\in V$，则向量

$$\pm\alpha,\quad \pm 2\alpha,\quad \pm 3\alpha,\quad \cdots$$

为V中无限个不同的向量．

【例1】 集合$V=\{(0,a,b)^{\mathrm{T}}\mid a,b\in\mathbb{R}\}$是一个向量空间．若$k,l\in\mathbb{R}$，$\alpha=(0,a,b)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(0,c,d)^{\mathrm{T}}\in V$：

$$k\alpha+l\beta=(0,ka+lc,kb+ld)^{\mathrm{T}}\in V.$$

【例2】 集合$V=\{(1,a)^{\mathrm{T}}\mid a\in\mathbb{R}\}$不是向量空间．例如，$\alpha=(1,1)^{\mathrm{T}},\beta=(1,-1)^{\mathrm{T}}\in V$，$\alpha+\beta=(2,0)^{\mathrm{T}}\notin V$.

2. 向量空间的基与维数

【定义2】

(1) 若向量空间 V 中有向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 满足:

1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 可以线性表示 V 中任何一个向量;

则称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 V 的一个基; 此时, 对于 V 中任何一个向量 α, 存在唯一的一组数 $k_1,\cdots,k_r$ 使得

$$\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r,$$

称 $(k_1,\cdots,k_r)^T$ 为向量 α 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 下的坐标.

(2) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 V 的基, 则称 r 为 V 的维数, 记为

$$r = \dim V.$$

(3) 零向量空间 $\{0\}$ 没有基, 约定它的维数为 0.

【例3】 线性无关的向量组

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \mathbf{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix},$$

为$\mathbb{R}^n$的基，$\dim\mathbb{R}^n=n$.

【例4】 向量空间$V=\{(0,a,b)^{\mathrm{T}}\mid a,b\in\mathbb{R}\}$的维数为2，向量组$\mathbf{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$为$V$的一个基.

【例5】 求证向量组

$$\alpha_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \alpha_3=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$$

为向量空间$\mathbb{R}^3$一个基，并求向量$\alpha=(a,b,c)^{\mathrm{T}}$在此基下的坐标.

线性代数

哈尔滨工程大学

【证明】 矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 的行列式

$$|A|=4;$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且可以线性表示 $\mathbb{R}^3$ 中的任何一个向量：

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的基.

方程组 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ 的解为:

$$x_1=\frac{1}{2}(b+c),\ x_2=\frac{1}{2}(a+c),\ x_3=\frac{1}{2}(a+b);$$

向量 $\alpha=(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 在此基下的坐标为

$$\left(\frac{1}{2}(b+c),\frac{1}{2}(a+c),\frac{1}{2}(a+b)\right)^{\mathrm{T}}.$$

3. $\mathbb{R}^n$ 的生成子空间

【例6】 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{R}^n$，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的一切线性组合的集合

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\equiv\{k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\mid k_1,\cdots,k_m\in\mathbb{R}\}$$

在线性运算下是封闭的，从而为向量空间.

【定义3】 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{R}^n$，称

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$$

为$\mathbb{R}^n$ 的由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$生成的子空间.

【命题 5.10】 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组为生成子空间 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 的基，从而

$$\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\mathrm{r}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m).$$

【证明】 由极大无关组的性质知这是明显的.

4. 矩阵的值域与核

若 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则称映射 $\sigma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $X \mapsto AX$ 为由向量空间 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射, 即 σ 为 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射, 且保持线性运算:

$$\begin{aligned}\sigma(k_1X_1+k_2X_2) &= A(k_1X_1+k_2X_2)\\ &= k_1(AX_1)+k_2(AX_2)\\ &= k_1\sigma(X_1)+k_2\sigma(X_2).\end{aligned}$$

以后, 我们就用关系式 $Y = AX$ 来表示这个线性映射其类似于线性函数 $y = ax$.

【矩阵的值域】 若$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则容易验证集合

$$\mathrm{R}(A) \triangleq \{AX \mid X \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

为向量空间($\mathbb{R}^m$的子空间)，$\mathrm{R}(A)$就是线性映射$Y = AX$的值域，称其为矩阵A的**值域**.

【矩阵的核】 若$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，也容易验证集合

$$\mathrm{N}(A) \triangleq \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

为向量空间($\mathbb{R}^n$的子空间)，其就是齐次线性方程组$AX = 0$的一切解向量构成的向量空间，称其为矩阵A的**核**，也称其为方程$AX = 0$的**解空间**.

【定理 5.6】 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 则:

(1) $\dim \mathrm{R}(A)=\mathrm{r}(A)$;

(2) $n=\dim \mathrm{R}(A)+\dim \mathrm{N}(A)$.

【证明】 (1) $\mathrm{R}(A)$中的一般向量

$$AX=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n;$$

$$\mathrm{R}(A)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\quad \dim \mathrm{R}(A)=\mathrm{r}(A).$$

(2) $\mathrm{N}(A)$方程组$AX=0$的解空间, 此方程组的一个基础解系就是$\mathrm{N}(A)$的基:

$$\dim \mathrm{N}(A)=n-\mathrm{r}(A),$$

$$n=\dim \mathrm{R}(A)+\dim \mathrm{N}(A).$$

线性代数 哈尔滨工程大学

5. 向量空间的线性变换(从另一个角度看方阵)

【定义 4】

(1) 若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则关系式

$$Y = AX \ \ (X \in \mathbb{R}^n)$$

称为向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的线性变换.

(2) 若 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，则我们有

$$\begin{cases} A\beta_1 = b_{11}\beta_1 + \cdots + b_{n1}\beta_n \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ A\beta_n = b_{1n}\beta_1 + \cdots + b_{nn}\beta_n \end{cases},$$

即

$$A[\beta_1, \cdots, \beta_n] = [\beta_1, \cdots, \beta_n]B,$$

称 B 为线性变换 $Y = AX$ 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵.

【例7】 令 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$, 求线性变换 $Y=AX$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的基

$$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\quad \beta_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

下的矩阵 B.

【解】 令 $P=[\beta_1,\beta_2]$, 则

$$A[\beta_1,\beta_2]=[\beta_1,\beta_2](P^{-1}AP)$$

$$=[\beta_1,\beta_2]\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$=[\beta_1,\beta_2]\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$$

6. 向量空间中两个基的联系

【评注】 若$\dim V = r > 0$，则V的基不是唯一的. 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$和$\beta_1,\cdots,\beta_r$都是V的基，则由基的性质知$\beta_1,\cdots,\beta_r$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表示，从而存在一个r阶方阵$K=[k_{ij}]_{r\times r}$使得

$$[\beta_1,\cdots,\beta_r]=[\alpha_1,\cdots,\alpha_r]\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{r1} & \cdots & k_{rr} \end{bmatrix},$$

这个方阵K称基$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$到基$\beta_1,\cdots,\beta_r$的**过渡阵**，它是沟通这两个基的媒介.

【命题 5.11】 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$和$\beta_1, \cdots, \beta_r$为向量空间$V$的两个基，基$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$到基$\beta_1, \cdots, \beta_r$的过渡阵为$K$. 若向量$v$在基$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$下的坐标为$(x_1, \cdots, x_r)^{\mathrm{T}}$，在基$\beta_1, \cdots, \beta_r$下的坐标为$(y_1, \cdots, y_r)^{\mathrm{T}}$，则

$$(y_1, \cdots, y_r)^{\mathrm{T}} = K^{-1}(x_1, \cdots, x_r)^{\mathrm{T}}.$$

坐标变换公式

【证明】（简单, 略）

【例8】 给定$\mathbb{R}^2$的两个基

$$[\alpha_1,\alpha_2]=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix},\quad [\beta_1,\beta_2]=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

(1) 求基α_1,α_2到基β_1,β_2的过渡阵K;

(2) 并求向量$v=\alpha_1+\alpha_2$在基β_1,β_2下的坐标.

【解】(1) 过渡阵K满足$[\beta_1,\beta_2]=[\alpha_1,\alpha_2]K$;

$$K=[\alpha_1,\alpha_2]^{-1}[\beta_1,\beta_2]=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

(2) 向量v在基α_1,α_2下的坐标为$(1,1)^T$;

向量v在基β_1,β_2下的坐标

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=K^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$$

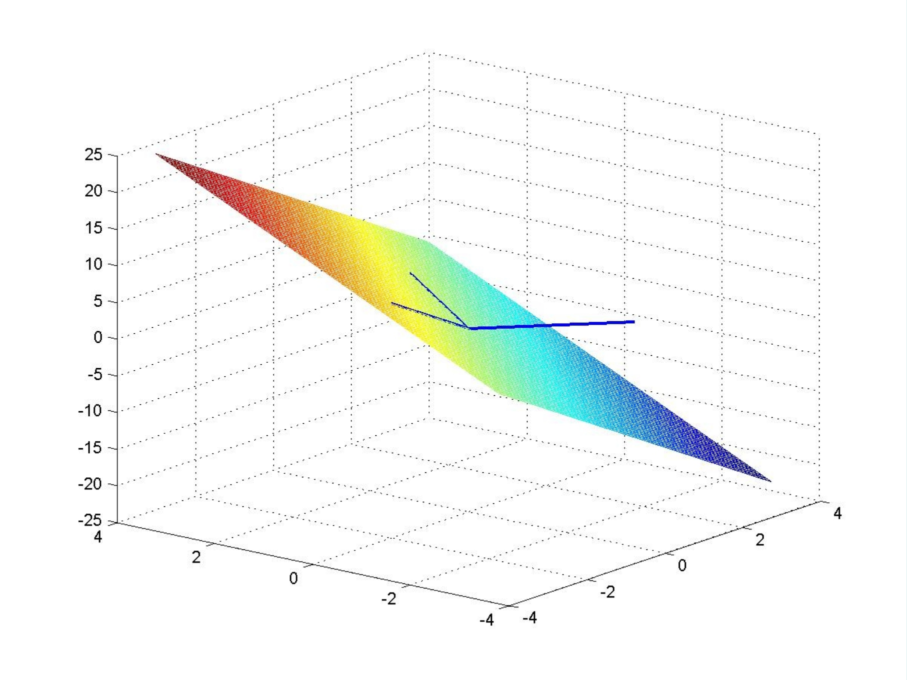
哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

5.6向量线性运算的相关MATLAB应用

一、向量组的线性相关性判别与应用

1.1 给出向量组，判别相关还是无关

在MATLAB窗口中运行程序 g05.m ，三个向量不共面



1.2 向量组的线性相关性判别与应用

行最简型

```
>> help rref
 rref   Reduced row echelon form.
    R = rref(A) produces the reduced row echelon form of A.

    [R,jb] = rref(A) also returns a vector, jb, so that:
       r = length(jb) is this algorithm's idea of the rank of A,
       x(jb) are the bound variables in a linear system, Ax = b,
       A(:,jb) is a basis for the range of A,
       R(1:r,jb) is the r-by-r identity matrix.
```

[R,i]=rref[A]

R—行最简型

i　极大无关组对应列标号

线性代数

例1 求下列量组的一个极大无关组，并用该极大无关组线性表示其余向量.

$$\begin{cases} a_1 = (2,1,6,5,6)^T \\ a_2 = (6,3,18,15,18)^T \\ a_3 = (0,3,-2,13,0)^T \end{cases}$$

解：在MATLAB窗口中输入：

```
>> clear                      % 清除内存变量和函数
>> a1=[2;1;6;5;6];            % 输入向量a1
>> a2=[6;3;18;15;18];         % 输入向量a2
>> a3=[0;3;-2;13;0];          % 输入向量a3
>> A=[a1 a2 a3];              % 将向量a1,a2,a3作为矩阵A
                              % 列向量
>>[A0,i]=rref(A)              % A0为矩阵A的行最简型，
                              % 矩阵i为A矩阵一组极大无关组向量的列标号
```

线性代数

运行结果:

- A0 =

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

- i =

$$\begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix}$$

由运行结果可知，该向量组极大无关组是 a_1, a_3，

并且由矩阵A0 知 $a_2 = 3a_1 + 0a_3$.

二、求齐次方程组的通解

- $AX=0$ 通解

$$X = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}$$

- Z=null（A,’r’）　% 求 $AX=0$ 基础解系

二、求齐次方程组的通解

例2 求下列齐次方程组通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

```
>>A=[1,1,1,1,1;3,2,1,1,-3;0,1,2,2,6;5,4,3,3,-1];
>>B=null(A,'r')
```

运行结果

B =

1	1	5
-2	-2	-6
1	0	0
0	1	0
0	0	1

二、求齐次方程组的通解

即

$$X = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

为方程组的通解，其中 k_1, k_2, k_3 为任意实数.

三、求非齐次方程组的通解

- $AX=b$ 通解

$$X = X_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}$$

- X_0 特解，用 A\b 来求
- $AX=0$ 基础解系，用 Z=null（A,’r’) 来求

三、求非齐次方程组的通解

例3 求非齐次线性方程组的通解.

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3+4x_4+16x_5=-2 \\ -3x_1-6x_2+2x_3-6x_4-23x_5=7 \\ 3x_1+6x_2-4x_3+6x_4+19x_5=-23 \\ x_1+2x_2+5x_3+2x_4+19x_5=43 \end{cases}$$

三、求非齐次方程组的通解

解：在MATLAB命令窗口输入：

```
>>format rat                                % 分数格式
>>A=[2,4,-1,4,16;-3,-6,2,-6,-23;3,6,-4,6,19;1,2,5,2,19];
>>b=[-2;7;-23;43];
>> [U,v]=rref([A,b])                        % 求行最简形
>>x0=A\b                                    % 求特解
>>x=null(A,'r')                             % 求基础解系
```

三、求非齐次方程组的通解

计算结果为

U =

1	2	0	2	9	3
0	0	1	0	2	8
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

v =

1	3

三、求非齐次方程组的通解

```
x0 =
        0
        0
     22/3
        0
      1/3
x =
       -2        -2        -9
        1         0         0
        0         0        -2
        0         1         0
        0         0         1
```

```
>> syms k1 k2 k3
>> X=k1*x(:,1)+k2*x(:,2)+k3*x(:,3)+x0
```

三、求非齐次方程组的通解

即非齐次方程组的通解可表示为

$$X = k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-9\\0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}0\\0\\22/3\\0\\1/3\end{bmatrix}$$

习题课五

1. 判别下列命题的真假:

(1) 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{R}^n$线性相关，$\beta\in\mathbb{R}^n$，则

$$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m,\beta$$

还是线性相关的.

(2) 若$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$还是线性无关的.

(3) 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，则$\alpha_1$不能由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示.

(4) 若 n 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，同时给它们加上第 $n+1$ 个坐标得到向量 $\beta_1,\cdots,\beta_m$，则这组新的向量还是线性无关的.

(5) 若 n 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，同时交换它们的相同位置的两个坐标得到向量 $\beta_1,\cdots,\beta_m$，则这组新的向量还是线性无关的.

(6) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中去掉 α_m 得到 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$，后者的秩一定减 1 吗?

2. 单选题

(1) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则(C)线性无关:

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_4+\alpha_1$;

(B) $\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_4,\ \alpha_4-\alpha_1$;

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_4-\alpha_1$;

(D) $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_4,\ \alpha_4-\alpha_1$.

(2) 设向量β可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，但不能由A：$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示；记B：$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则(B).

(A) α_m不能由A，也不能由B线性表示;

(B) α_m不能由A，但可由B线性表示;

(C) α_m可由A，也可由B线性表示;

(D) α_m可由A，但不可由B线性表示.

3. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$为线性无关的n维行向量组，讨论

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\ \cdots,\ \beta_m=\alpha_m+\alpha_1$$

的线性相关性.

解

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&0\\ 0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 1&0&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$$ (简写为$B=KA$);

$$|K|=1+(-1)^{m+1}:$$

(1) 当m为偶数时，$|K|=0\Rightarrow \mathrm{r}(B)\le \mathrm{r}(K)<m$;

B的行向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性相关;

(2) 当m为奇数时，$|K|=2\Rightarrow \mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(\mathrm{A})=m$;

B的行向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关.

4. 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关，且$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$唯一地线性表示.

证 由条件，则存在不全为0的$k_1,\cdots,k_m,k$使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta=0.$$

这里一定有$k\neq 0$；否则，有$k_1=\cdots=k_m=k=0$.

$k\neq 0$: $\beta=-(k^{-1}k_1)\alpha_1-\cdots-(k^{-1}k_m)\alpha_m$;

$$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m$$

$$\Rightarrow (k_1-l_1)\alpha_1+\cdots+(k_m-l_m)\alpha_m=0$$

$$\Rightarrow k_1-l_1=\cdots=k_m-l_m=0$$

$$\Rightarrow k_1=l_1,\cdots,k_m=l_m;$$

β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$唯一地表示.

5. 设 A 为 n 阶方阵，$0 \neq \beta \in \mathbb{R}^n$，且 $A^m\beta \neq 0$，$A^{m+1}\beta = 0$ (m 是固定自然数)，求证向量组

$$\beta,\ A\beta,\ A^2\beta,\ \cdots,\ A^m\beta$$

线性无关.

证 $$k_0\beta + k_1A\beta + k_2A^2\beta + \cdots + k_mA^m\beta = 0:$$

在此式两边从左边同乘 A^m，得到 $k_0(A^m\beta) = 0$;

$$A^m\beta \neq 0 \Rightarrow k_0 = 0;$$

$$k_1A\beta + k_2A^2\beta + \cdots + k_mA^m\beta = 0:$$

在此式两边从左边同乘 A^{m-1}，得到 $k_1(A^m\beta) = 0$;

$$A^m\beta \neq 0 \Rightarrow k_1 = 0;$$

同理, $k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0$.

总之, 向量组线性无关.

6. 给定向量组:

$$\mathbf{A}:\ \alpha_1,\cdots,\alpha_r;\quad \mathbf{B}:\ \beta_1,\cdots,\beta_r,$$

A 线性无关, 且**A** 可由**B** 线性表示, 求证**B** 线性无关, **A** 与**B** 等价.

证 由条件, 存在一个$r\times r$矩阵K使得

$$[\alpha_1,\cdots,\alpha_r]=[\beta_1,\cdots,\beta_r]K.$$

这里的K必是可逆的; 否则:

$$\mathrm{r}([\alpha_1,\cdots,\alpha_r])\leqslant \mathrm{r}(K)<r,$$

这同向量组A 线性无关矛盾.

K可逆: $[\beta_1,\cdots,\beta_r]=[\alpha_1,\cdots,\alpha_r]K^{-1}.$

这说明向量组B 线性无关, 且可由A 线性表示.

注: 也可以说明A , B 为向量组A +B 的极大无关组.

7. 设有三个n维向量组

$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$; $B:\beta_1,\cdots,\beta_t$; $C:\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$,

它们的秩分别为r_1,r_2,r_3，求证：$r_3\le r_1+r_2$.

证 设向量组A，B，C的极大无关组分别为

$$\bar{A}:\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_{r_1};\quad \bar{B}:\bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_{r_2};\quad \bar{C}:\bar{\gamma}_1,\cdots,\bar{\gamma}_{r_3}.$$

线性无关的向量组$\bar{C}:\bar{\gamma}_1,\cdots,\bar{\gamma}_{r_3}$可由

$$\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_{r_1},\bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_{r_2}$$

线性表示：

$$r_3\le r_1+r_2.$$