线性代数 哈尔滨工程大学

第六章 方阵的对角化

本章主要内容:

- 方阵的特征值、特征向量与特征多项式
- 方阵的相似与可对角化
- 特征值问题的相关MATLAB应用

线性代数 哈尔滨工程大学

§6.1 方阵的特征值与特征向量

本节主要内容:

- 基本概念
- 特征值与特征向量的性质

线性代数 哈尔滨工程大学

1. 基本概念

【问题的提出】

若$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$,有时我们要讨论线性变换 $y=Ax$对向量空间$\mathbb{R}^n$的整体作用的效果,即对任意 $x\in\mathbb{R}^n$,

$$Ax$$

是什么样,即Ax的计算有什么规律?

【问题的分析】

若 $p_1, p_2,\cdots, p_n$ 为向量空间$\mathbb{R}^n$的基,则

$$x=a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n,$$

$$Ax=a_1(Ap_1)+a_2(Ap_2)+\cdots+a_n(Ap_n).$$

线性代数 哈尔滨工程大学

因而, 若 $Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n$ 有明确而简单的算法,

$$Ax = a_1(Ap_1) + a_2(Ap_2) + \cdots + a_n(Ap_n)$$

就有简单而有规律的算法.

【一个合理的期待】

因而, 若有常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$\begin{cases} Ap_1 = \lambda_1 p_1 \\ Ap_2 = \lambda_2 p_2 \\ \cdots\cdots \\ Ap_n = \lambda_n p_n \end{cases} \qquad (1)$$

则

$$\begin{aligned} Ax &= a_1(Ap_1) + a_2(Ap_2) + \cdots + a_n(Ap_n) \\ &= (a_1\lambda_1)p_1 + (a_2\lambda_2)p_2 + \cdots + (a_n\lambda_n)p_n. \end{aligned}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$\begin{cases} Ap_1 = \lambda_1 p_1 \\ Ap_2 = \lambda_2 p_2 \\ \cdots\cdots \\ Ap_n = \lambda_n p_n \end{cases} \qquad (1)$$

【上述期待的另一个惊喜】

上述(1)式等同于下式

$$A[p_1, \cdots, p_n] = [p_1, \cdots, p_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

(线性变换 $y = Ax$ 在基 $p_1, \cdots, p_n$ 下的矩阵为对角阵)

线性代数 哈尔滨工程大学

此时, 矩阵 $P = [p_1, \cdots, p_n]$ 可逆, (2) 为

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}P^{-1} \qquad (3)$$

【结论】

对于一个 n 阶(实)方阵 A, 找到 n 个线性无关的向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 和常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 满足下式是极为重要的(本章的主题):

$$\begin{cases} Ap_1 = \lambda_1 p_1 \\ Ap_2 = \lambda_2 p_2 \\ \cdots\cdots \\ Ap_n = \lambda_n p_n \end{cases} \qquad (1)$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【定义1】 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为 n 阶方阵:

(1) 若非零向量 $x_0\in\mathbb{C}^n$ 和数 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 满足

$$Ax_0=\lambda_0 x_0,$$

则称 λ_0 为矩阵 A 的(一个)特征值, 同时称这个非零向量 x_0 为(A 的)对应特征值 λ_0 的特征向量.

(2) 未定元 λ 的多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为矩阵 A 的特征多项式.

线性代数 哈尔滨工程大学

【例1】 对于 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$, $x_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $x_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$:

$$Ax_1=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=x_1,$$

$$Ax_2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=3x_2;$$

1, 3为矩阵 A 的两个特征值;

x_1 和 x_2 为分别对应特征值1和3的特征向量;

矩阵 A 的特征多项式是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3).$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【命题 6.1】

(1) λ_0 为方阵 A 的特征值 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\lambda_0 E-A|=0$, 即 λ_0 为特征多项式 $|\lambda E-A|$ 的根.

(2) x_0 为方阵 A 的对应特征值 λ_0 的特征向量 $\Leftrightarrow$ x_0 为齐次线性方程组 $(\lambda_0 E-A)x=0$ 的非零解.

【证明】(1) $(\Rightarrow)$

设 λ_0 为方阵 A 的特征值, 则存在一个非零向量 x_0 满足

$$Ax_0=\lambda_0 x_0:$$

$$Ax_0=\lambda_0 x_0 \Rightarrow (\lambda_0 E-A)x_0=0 \Rightarrow |\lambda_0 E-A|=0.$$

$(\Leftarrow)$ 反之, 若 $|\lambda_0 E-A|=0$: 存在非零向量 x_0 满足

$$(\lambda_0 E-A)x_0=0 \Rightarrow Ax_0=\lambda_0 x_0\ (\lambda_0 \text{ 为特征值}).$$

(2) 明显.

线性代数 哈尔滨工程大学

求方阵A的特征值和特征向量的步骤:

(1) 先解出方程$|\lambda E - A| = 0$的一切不同的根:

$$\lambda_1, \ \cdots, \ \lambda_m$$

(矩阵的一切不同的特征值);

(2) 对每个特征值λ_i:

1) 求方程组$(\lambda_i E - A)x = 0$的一个基础解系:

$$x_1, \cdots, x_k;$$

2) 当常数$l_1, \cdots, l_k$不全为0时, 向量

$$l_1 x_1 + \cdots + l_k x_k$$

就是对应特征值λ_i的特征向量的通式.

线性代数 哈尔滨工程大学

【例2】 求矩阵$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$的特征值和特征向量.

【解】 特征多项式: $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$;

特征值: $\lambda_1 = \mathrm{i}, \ \lambda_2 = -\mathrm{i}$;

解方程组 $(\lambda_1 E - A)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 基础解系 } x_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix};$$

对应特征值$\lambda_1 = \mathrm{i}$的特征向量: $k_1 x_1$ $(k_1 \neq 0)$;

解方程组 $(\lambda_2 E - A)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 基础解系 } x_2 = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix};$$

对应特征值$\lambda_1 = -\mathrm{i}$的特征向量: $k_2 x_2$ $(k_2 \neq 0)$.

线性代数 哈尔滨工程大学

【例3】 求矩阵$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$的特征值和特征向量.

【解】 特征多项式:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2;$$

特征值: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;

解方程组 $(\lambda_1 E - A)x = 0$:

$$2E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 基础解系 } x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

对应特征值2的特征向量:

$$kx = (k, 0)^{\mathrm{T}} \ (k \neq 0).$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【例4】 试将矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$，分解成

$$A=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}P^{-1},$$

并求A^n.

【解】 特征多项式：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-1&\lambda-3&1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2;$$

特征值: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=2;$

线性代数 哈尔滨工程大学

解方程组 $(\lambda_1E-A)x=0$:

$$(\lambda_1E-A)=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&-2&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix};$$

$$\text{基础解系 } p_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix};$$

解方程组 $(\lambda_2E-A)x=0$:

$$(\lambda_2E-A)=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&-1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{基础解系 } p_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ p_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{bmatrix},\ p_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\ p_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ p_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}:$$

$$Ap_1=p_1,\quad Ap_2=2p_2,\quad Ap_3=2p_3;$$

$$A[p_1,p_2,p_3]=[p_1,p_2,p_3]\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix};$$

$$A=P\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}P^{-1},\quad P=[p_1,p_2,p_3];$$

$$A^n=P\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1&1-2^n&-1+2^n\\-1+2^n&-1+2^{n+1}&1-2^n\\-1+2^n&-1+2^n&1\end{bmatrix}.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【例5】 若 λ_0 是 A 的特征值, 则 λ_0^2 是 A^2 的特征值.

【证明】 设 x 为 A 的对应特征值 λ_0 的特征向量:

$$Ax=\lambda_0 x.$$

$$A^2x=A(Ax)=A(\lambda_0 x)=A(\lambda_0 x)$$
$$=\lambda_0(Ax)=\lambda_0(\lambda_0 x)=\lambda_0^2 x;$$

λ_0^2 是 A^2 的特征值.

一般形式:

若 λ 是 A 的特征值, 则 $f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$ 为矩阵

$$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$$

的特征值.

线性代数 哈尔滨工程大学

2. 特征值与特征向量的性质

【命题 6.2】 对于 n 阶方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$:

(1) $|\lambda E-A|=\lambda^n-(a_{11}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\cdot|A|$;

(2) 若 $|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, 则

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=a_{11}+\cdots+a_{nn},\quad \lambda_1\cdots\lambda_n=|A|.$$

【证明】 (1) 由于行列式的定义知,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

为 λ 的 n 次多项式; 而且其最高项和次高项都由

线性代数 哈尔滨工程大学

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$
$$=\lambda^n-(a_{11}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n a_{11}\cdots a_{nn}$$

产生: $|\lambda E-A|=\lambda^n-(a_{11}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots$;

$|0E-A|=(-1)^n\cdot|A|$ 说明:

$|\lambda E-A|$ 的常数项为 $(-1)^n\cdot|A|$;

$$|\lambda E-A|=\lambda^n-(a_{11}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\cdot|A|$$

(2) $|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\cdots\lambda_n$$

$(1)\Rightarrow \lambda_1+\cdots+\lambda_n=a_{11}+\cdots+a_{nn},\ \lambda_1\cdots\lambda_n=|A|$

【命题 6.3】 若 λ 是可逆阵 A 的特征值, 则:

(1) $\lambda\neq 0$; (2) λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值.

线性代数 哈尔滨工程大学

【命题 6.4】 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 A 的不同的特征值，又 $p_1, \cdots, p_m$ 分别为对应它们的特征向量，则向量组 $p_1, \cdots, p_m$ 线性无关.

【证明】 $m=2$ 的情况:

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 = 0 \qquad (1);$$

用 A 左乘 (1) 式的两边得到

$$k_1 \lambda_1 p_1 + k_2 \lambda_2 p_2 = 0 \qquad (2);$$

用 λ_2 左乘 (1) 式的两边得到

$$k_1 \lambda_2 p_1 + k_2 \lambda_2 p_2 = 0 \qquad (3);$$

(2) − (3) 得到

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_2) p_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \Rightarrow k_2 = 0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$m=3$ 的情况：

$$k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 = 0 \qquad (1);$$

用 A 左乘 (1) 式的两边得到

$$k_1 \lambda_1 p_1 + k_2 \lambda_2 p_2 + k_3 \lambda_3 p_3 = 0 \qquad (2);$$

用 λ_3 左乘 (1) 式的两边得到

$$k_1 \lambda_3 p_1 + k_2 \lambda_3 p_2 + k_3 \lambda_3 p_3 = 0 \qquad (3);$$

(2) − (3) 得到

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_3) p_1 + k_2(\lambda_2 - \lambda_3) p_2 = 0.$$

再由 $m=2$ 的情况知:

$$k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow k_3 = 0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【命题6.5】 令 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是 A 的不同的特征值:

若

$p_1^{(1)}, \cdots, p_{k_1}^{(1)}$ 是对应 λ_1 的线性无关的特征向量;

$p_1^{(2)}, \cdots, p_{k_2}^{(2)}$ 是对应 λ_2 的线性无关的特征向量;

$\cdots\cdots,$

$p_1^{(m)}, \cdots, p_{k_m}^{(m)}$ 是对应 λ_m 的线性无关的特征向量,

则所有这些特征向量线性无关.

【证明】（自我阅读）

线性代数 哈尔滨工程大学

【评注】

对于一个方阵 A, 如何找一组个数最多的线性无关的特征向量?

(1) 先找到A的所有不同的特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$;

(2) 求出每个方程$(\lambda_i E - A)x = 0$的基础解系;

这m个方程组的基础解系拼在一起就是A的一组个数最多的线性无关的特征向量.

由于$n+1$个n维向量一定线性相关, 故这样的一组向量最多有n个:

若这组向量的个数若为n, 则矩阵A将有一个重要的特性—可对角化.

线性代数 哈尔滨工程大学

复数域内多项式的分解

【代数学基本定理】 每个次数大于等于1的复系数多项式在复数域内至少有一个根.

【定理1】 每个次数大于等于1的复系数多项式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

在复数域内都可分解成一次式的乘积, 即

$$f(x) = (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n),$$

这里的$z_1, z_2, \cdots, z_n$为复数.

示例

$$x^5 - x^4 + x - 1 = (x-1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

$$= (x-1)[x - (\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})][x - (\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})]$$

$$[x + (\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})][x + (\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})].$$

线性代数 哈尔滨工程大学

【定理2】 设$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$为实系数多项式. 若$z = a + b\mathrm{i}$为$f(x)$的一个复根, 则$z$的共轭$\bar{z} = a - b\mathrm{i}$也是$f(x)$的根, 即实系数多项式的虚部不为0的根共轭成对出现.

【证明】

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0;$$

$$\overline{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \bar{0};$$

$$\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0;$$

$$\bar{z}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 = 0;$$

$$\bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

§ 6.2 方阵的相似与对角化

本节主要内容:

- 两个方阵的相似
- 方阵可对角化的充要条件

线性代数 哈尔滨工程大学

1. 两个方阵的相似

【定义1】 设 A, B 为两个同阶方阵. 若存在一个可逆矩阵 P 使

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$; 由 A 产生 $P^{-1}AP$ 的运算也称对 A 进行相似变换.

示例

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

【注意】 $A \sim B \Rightarrow A \to B$.

线性代数 哈尔滨工程大学

【命题6.6】 相似的矩阵有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值, 即矩阵在相似变换之下特征多项式不变.

【证明】 $P^{-1}AP = B$:

$$\begin{aligned} |\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP| &= |P^{-1}(\lambda E - A)P| \\ &= |P^{-1}|\cdot|\lambda E - A|\cdot|P| = |P^{-1}P|\cdot|\lambda E - A| \\ &= |\lambda E - A|. \end{aligned}$$

【评注】 两矩阵的特征多项式相同, 它们可不相似.

示例 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 不相似, 但特征多项式相同.

线性代数 哈尔滨工程大学

【定义2】 若方阵A相似于对角阵，则称A可对角化.

示例 $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$可对角化: $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$不能对角化:

若$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$可对角化，则其只能与零矩阵相似:

$$P\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}=0 \text{（矛盾等式）}.$$

【问题】 方阵可对角化的条件是什么?

线性代数 哈尔滨工程大学

2. 方阵可对角化的充要条件

【定理 6.1】 n阶方阵A可对角化$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量.

【证明】 设A可对角化:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix},\quad P=[p_1,\cdots,p_n];$$

$$Ap_1=\lambda_1 p_1,\quad \cdots,\quad Ap_n=\lambda_n p_n;$$

$p_1,\cdots,p_n$就是A的n个线性无关的特征向量.

反之是明显的，因为上面的运算都是双向的.

【问题】 一个n阶方阵在什么条件下有n个线性无关的特征向量?

线性代数 哈尔滨工程大学

【推论】 有n个不同的特征值的n阶方阵可对角化.

【证明】 每个特征值至少有一个特征向量;

对应不同特征值的特征向量线性无关;

此方阵一定有n个线性无关的特征向量.

【注意】 此推论是方阵可对角化的充分非必要条件:

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$可对角化，但不同的特征值仅一个1.

【例1】 3阶方阵$\begin{bmatrix}1&4&6\\0&2&5\\0&0&3\end{bmatrix}$可对角化:

因为A有三个不同的特征值 1, 2, 3.

线性代数 哈尔滨工程大学

【例2】 讨论矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$是否能对角化.

【解】 矩阵A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2;$$

特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$; $\mathrm{r}(E-A)=\mathrm{r}(2E-A)=2.$

方程组$(E-A)x=0,(2E-A)x=0$的基础解系:

都仅有一个向量.

此方阵最多能找到 2 个线性无关的特征向量:

此方阵不能对角化.

线性代数 哈尔滨工程大学

【例3】 讨论矩阵$A=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\1&4&-3&0\\-1&-2&0&-3\end{bmatrix}$能否对角化.

【解】 矩阵A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-3,\ \lambda_3=\lambda_4=5$;

$$-3E-A=\begin{bmatrix}-8&0&0&0\\0&-8&0&0\\-1&-4&0&0\\1&2&0&0\end{bmatrix},\ 5E-A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&-4&8&0\\1&2&0&8\end{bmatrix}:$$

$$\mathrm{r}(-3E-A)=\mathrm{r}(5E-A)=2.$$

A有4个线性无关的特征向量, 可对角化.

线性代数 哈尔滨工程大学

【定理 6.2】 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$为$n$阶方阵$A$的所有不同的特征值, 特征多项式

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}:$$

则

$$\boxed{A\text{可对角化}\Leftrightarrow n-\mathrm{r}(\lambda_i E-A)=k_i\ (i=1,2,\cdots,m)},$$

即每个方程组

$$(\lambda_i E-A)x=0$$

的基础解系中恰有k_i个解向量.

【证明】 $(\Rightarrow)$ 设矩阵A可对角化: 示例

每个特征值λ_i至少可找到k_i个线性无关的特征向量.

方程组$(\lambda_i E-A)x=0$的基础解系中至少有k_i解向量:

$$n-\mathrm{r}(\lambda_i E-A)\geqslant k_i\ \ (i=1,2,\cdots,m).$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$\boxed{n-\mathrm{r}(\lambda_i E-A)\geqslant k_i\quad(i=1,2,\cdots,m)}$$

$$\sum_{i=1}^{m}[n-\mathrm{r}(\lambda_i E-A)]\geqslant\sum_{i=1}^{m}k_i=n;$$

而由上一节最后的命题知:

$$n\geqslant\sum_{i=1}^{m}[n-\mathrm{r}(\lambda_i E-A)];$$

总之, $n-\mathrm{r}(\lambda_i E-A)=k_i\quad(i=1,2,\cdots,m).$

$(\Leftarrow)$ 反之, 若上述 m 个等式成立:

A有$\sum\limits_{i=1}^{m}k_i=n$个线性无关的特征向量,可对角化.

线性代数 哈尔滨工程大学

【评注】

若 3 阶方阵A, 若特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$:

$$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3,\quad \mathrm{r}(\lambda_1E-A)=1,$$

则A可对角化.

原因: $3-\mathrm{r}(\lambda_1E-A)=2,\ 3-\mathrm{r}(\lambda_3E-A)=1.$

【例4】 设 $A=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$, 且 $\alpha=(a,b,c)\neq 0$ 为实矩阵,
求证A可对角化.

【证明】 先求 A的所有特征值:

$\boxed{\text{分析}}$ $A=\begin{bmatrix}a^2 & ab & ac\\ ba & b^2 & bc\\ ca & cb & c^2\end{bmatrix}\neq 0,\ 1\leqslant\mathrm{r}(A)\leqslant\mathrm{r}(\alpha)=1.$

线性代数 哈尔滨工程大学

由于相似一定等价,若 A可对角化,其特征值 为:

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\quad \lambda_3\neq 0;\quad \lambda_3=a^2+b^2+c^2.$$

试求 A的非零特征值λ:

$$(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)x=\lambda x\,(\lambda\neq 0,x\neq 0);$$

$$(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha x)=\lambda(\alpha x).$$

$\alpha\alpha^{\mathrm{T}},\alpha x$都是数, 且$\alpha x\neq 0$:

$$\lambda=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=a^2+b^2+c^2;$$

总之, 矩阵 A的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\ \ \lambda_3=a^2+b^2+c^2\neq 0.$$

$\mathrm{r}(\lambda_1E-A)=\mathrm{r}(A)=1$ 说明 A可对角化.

线性代数 哈尔滨工程大学

若 5 阶方阵 A 可对角化:

$$|\lambda E - A| = (\lambda-2)^3(\lambda-3)^2;$$

$$A = P\begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix}P^{-1};$$

$$P = [p_1, p_2, p_3, p_4, p_5].$$

$$Ap_1 = 2p_1,\ Ap_2 = 2p_2,\ Ap_3 = 2p_3;$$

$$Ap_4 = 3p_4,\ Ap_5 = 3p_5.$$

p_1, p_2, p_3 为特征值2的 3 个线性无关的特征向量;

p_4, p_5 为特征值3的 2 个线性无关的特征向量.

线性代数 哈尔滨工程大学

哈爾濱工程大學 HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

6.4特征值问题的相关MATLAB应用

线性代数 哈尔滨工程大学

特征值与特征向量

例 已知向量 $x=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，请分析经过线性变换 $y_i = A_i x$ 后，向量 y_i 与向量 x 的几何关系. 其中 A_i 分别为:

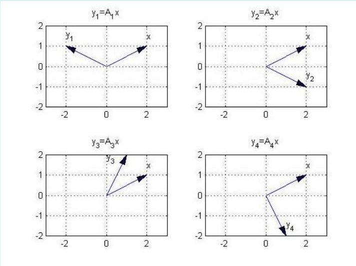
$$A_1=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

$$A_4=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}, \left(\alpha=\frac{\pi}{2}\right)。$$

线性代数 哈尔滨工程大学

特征值与特征向量

解：在MATLAB中运行g07.m,可以得到下列图形



线性变换几何意义：伸缩、旋转

线性代数 哈尔滨工程大学

特征值与特征向量

用MATLAB求矩阵特征值和特征向量的方法为:

(1) r=eig(A),列向量r为矩阵A的特征值.

(2) [V,D]=eig(A)，对角矩阵D的对角线元素为矩阵A的特征值, 矩阵V的列向量为矩阵A的特征向量.

线性代数 哈尔滨工程大学

习题课六

1. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

(1) 实数矩阵的特征值一定为实数.

(2) 矩阵的特征向量是唯一的.

(3) 只有对应不同特征值的特征向量才线性无关.

(4) 每个方阵都可对角化.

(5) 若方阵 A的特征值仅有 0, 则 $A=0$.

(6) 若方阵 A的行列式 $|A|=0$,则 0是 A的特征值.

(7) 若方阵 A 满足 $A^2=A$, 则 A的特征值只能为 0 或 1.

2. 将$A=\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{bmatrix}$分解成$A=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}P^{-1}$.

解 (1) 求特征值:

$$|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)^2;$$

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_2=2;$$

(2) 求特征向量:

方程$(-E-A)X=0$的基础解系:

$$p_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}};$$

方程$(2E-A)X=0$的基础解系:

$$p_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\quad p_3=(1,0,4)^{\mathrm{T}};$$

线性代数 哈尔滨工程大学

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&4\end{bmatrix},\quad A=P\begin{bmatrix}-1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}P^{-1};$$

$$A^{10}=P\begin{bmatrix}1&&\\&2^{10}&\\&&2^{10}\end{bmatrix}P^{-1}=3^{-1}\begin{bmatrix}4-2^{10}&-1+2^{10}&-1+2^{10}\\0&3\cdot2^{10}&0\\4-2^{12}&-1+2^{10}&-1+2^{12}\end{bmatrix}.$$

3. 若λ为方阵A的特征值,则λ^n为A^n的特征值.

证 $AX=\lambda X\ (X\neq0)$:

$$A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda(AX)=\lambda(\lambda X)=\lambda^2X;$$

上式说明λ^2为A^2的特征值;

同理可证明λ^n为A^n的特征值.

线性代数 哈尔滨工程大学

4. 设3阶方阵A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$:

(1) 求$|\lambda E-A|$及$|4E-A|$和$|4E+A|$;

(2) 求$|\lambda E-A^2|$及$|16E-A^2|$的值.

解 (1) $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$;

$|4E-A|=(4-1)(4-2)(4-3)=6$;

$|(-4)E-A|=(-1)^3\,|4E+A|$,

$(-4-1)(-4-2)(-4-3)=-|4E+A|$,

$|4E+A|=210$.

(2) $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2$为$A^2$的特征值:

$|\lambda E-A^2|=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-9)$;

$|16E-A^2|=(16-1)(16-4)(16-9)=1260$.

线性代数 哈尔滨工程大学

5. 设3阶方阵A的特征值1, 2, 3对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\ \alpha_2=(1,2,4)^T,\ \alpha_3=(1,3,9)^T;$$

又$\beta=(1,\ 1,\ 3)^T$.

(1) 将β表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合;

(2) 求$A^n\beta$ (n为自然数).

解 (1) 解方程 $\beta=x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3$:

$$x=2,\ y=-2,\ z=1;\quad \beta=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3.$$

(2)
$$\begin{aligned}A^n\beta&=2A^n\alpha_1-2A^n\alpha_2+A^n\alpha_3\\&=2\alpha_1-2\cdot 2^n\alpha_2+3^n\alpha_3\\&=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

6. 已知$X=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$为矩阵$A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$的特征向量.

(1) 确定a,b及X对应的特征值λ;

(2) 问A能否对角化? 说明理由.

解 (1) $$(\lambda E-A)X=\begin{bmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda-a&-3\\1&-b&\lambda+2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{cases}\lambda-2+1+2=0\\-5+\lambda-a+3=0\\1-b-\lambda-2=0\end{cases}\Rightarrow a=-3,\ b=0,\ \lambda=-1.$$

(2) $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$;

$3-\mathrm{r}(-E-A)=1\Rightarrow A$ 不能对角化.

线性代数 哈尔滨工程大学

7. 设矩阵$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$可对角化, 求$x$和$y$应满足的条件.

解 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1);$$

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-1;$$

A可对角化: $\mathrm{r}(E-A)=\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{bmatrix}\right)=1$

$$\Rightarrow x+y=0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

8. 设 $A^m=0$，求证：

(1) $|E+A|=1$;

(2) 若 $AB=BA$，则 $|A+B|=|B|$.

证 (1) $A^m=0\Rightarrow A$ 的特征值都为 0 $\Rightarrow|\lambda E-A|=\lambda^n$

$$\Rightarrow|(-1)E-A|=(-1)^n\Rightarrow|E+A|=1.$$

(2) B 可逆：$AB=BA\Rightarrow AB^{-1}=B^{-1}A$;

$$(AB^{-1})^m=A^m(B^{-1})^m=0;$$

$$(1)\Rightarrow|E+AB^{-1}|=1\Rightarrow|B+A|=|B|.$$

B 不可逆：$|B|=0$，此时只要说明 $|B+A|=0$.

$$(A+B)^m=A^m+C_m^1A^{m-1}B+\cdots+B^m$$

$$=(C_m^1A^{m-1}+\cdots+B^{m-1})B=QB,$$

$$|A+B|^m=|Q|\cdot|B|=0\Rightarrow|A+B|=0.$$

线性代数 哈尔滨工程大学

9. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是方阵 A 的三个互不相同的特征值，X_1,X_2,X_3 分别为对应它们的特征向量. 令 $Y=X_1+X_2+X_3$，求证向量组 Y,AY,A^2Y 线性无关.

证
$$Y=X_1+X_2+X_3,$$
$$AY=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_2X_3,$$
$$A^2Y=\lambda_1^2X_1+\lambda_2^2X_2+\lambda_3^2X_3.$$

由 $aY+bAY+cA^2Y=0$，加 X_1,X_2,X_3 线性无关得到：

$$\begin{cases}a+b\lambda_1+c\lambda_1^2=0,\\a+b\lambda_2+c\lambda_2^2=0,\\a+b\lambda_3+c\lambda_3^2=0.\end{cases}$$

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同，由范德蒙行列式知

$$a=b=c=0.$$

结论成立.

线性代数 哈尔滨工程大学

10. 设 A,B 为同阶方阵，λ 是 AB 的特征值，求证 λ 也是 BA 的特征值.

证 $\lambda=0$：$|AB|=0\Rightarrow|BA|=0\Rightarrow 0$ 为 BA 特征值.

$\lambda\neq0$：设 $(AB)X=\lambda X,\ X\neq0.$

$$(AB)X=\lambda X$$

$$\Rightarrow BA(BX)=\lambda(BX).$$

若 $BX\neq0$，上式说明 λ 为 BA 的特征值；

若 $BX=0$，则 $\lambda X=(AB)X=0$：

这与 $\lambda\neq0,\ X\neq0$ 矛盾.

总之，结论得证.

线性代数 哈尔滨工程大学

11. 求证 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ 相似.

证 $AE=EA$： $A[e_1, e_2]=[e_1, e_2]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ae_1 = ae_1 + ce_2 \\ Ae_2 = be_1 + de_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ae_2 = de_2 + be_1 \\ Ae_1 = ce_2 + ae_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}[e_2, e_1]=[e_2, e_1]\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

线性代数 哈尔滨工程大学

12. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，求证:

(1) $\mathrm{r}(E-A)+\mathrm{r}(A)=n$;

(2) A 与 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似，这 $r=\mathrm{r}(A)$.

证 (1) $A^2=A \Rightarrow A(E-A)=0$：

$\mathrm{r}(E-A)+\mathrm{r}(A)\leqslant n$;

$\mathrm{r}(E-A)+\mathrm{r}(A)\geqslant \mathrm{r}((E-A)+A)=n$.

(2) $A^2=A \Rightarrow A$ 的特征值为 0 或 1;

$\mathrm{r}(E-A)+\mathrm{r}(A)=n$

$\Rightarrow [n-\mathrm{r}(E-A)]+[n-\mathrm{r}(A)]=n$

$\Rightarrow A$ 可对角化, $A\sim\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

线性代数 哈尔滨工程大学

13. 设 $n(n\geqslant 2)$ 阶方阵 A 的秩为 1，求证

$$|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}[\lambda-(a_{11}+\cdots+a_{nn})].$$

证 $\mathrm{r}(0E-A)=1$：

设 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$ 为对应特征值 0 的特征向量.

补 p_n 使 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$ 线性无关:

$$A[p_1,\cdots,p_{n-1},p_n]=[p_1,\cdots,p_{n-1},p_n]\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & * \\ & & & k \end{bmatrix};$$

$$|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-k)$$

$$=\lambda^{n-1}[\lambda-(a_{11}+\cdots+a_{nn})]$$

线性代数 哈尔滨工程大学

14. 设 $\alpha=(a, b, c)$ 为非零实向量 $(a\neq 0)$, $A=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$. 求矩阵 A 的特征值和可逆阵使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

证 (1) 先求特征值:

令 $A=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$ 的对角线的元素之和为 $k=a^2+b^2+c^2$;

设 $\lambda\neq 0$ 为 $A=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$ 的特征值, 对应的特征向量为 X:

$$(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha X)=\lambda X;$$

$$(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)X=\lambda X \Rightarrow (\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha X)=\lambda(\alpha X)$$
$$\Rightarrow k(\alpha X)=\lambda(\alpha X)$$
$$\Rightarrow \lambda=k\ (\alpha X\neq 0).$$

$$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-k).$$

线性代数 哈尔滨工程大学

(2) 求特征向量:

对应特征值 0 的特征向量:

$$(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)X=0X$$
$$\Rightarrow (\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha X)=0$$
$$\Rightarrow k(\alpha X)=0$$
$$\Rightarrow \alpha X=0$$
$$\Rightarrow ax_1+bx_2+cx_3=0.$$

基础解系为:

$$p_1=\begin{bmatrix}-b\\ a\\ 0\end{bmatrix},\quad p_2=\begin{bmatrix}-c\\ 0\\ a\end{bmatrix};$$

线性代数 哈尔滨工程大学

对应特征值 $k=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 的特征向量:

$$(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)X=kX\Rightarrow \alpha^{\mathrm{T}}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})=k\alpha^{\mathrm{T}};$$

基础解系为: $p_3=\alpha^{\mathrm{T}}$.

令 $P=[p_1, p_2, p_3]=\begin{bmatrix}-b & -c & a\\ a & 0 & b\\ 0 & a & c\end{bmatrix}$:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2\end{bmatrix}.$$