第四章　矩阵

本章主要内容：

- 矩阵的加、减、数乘—线性运算
- 矩阵的乘法和逆阵
- 矩阵的初等变换与初等阵的对应
- 分块矩阵的运算
- 矩阵运算的相关MATLAB应用

§4.1 矩阵的运算

本节主要内容:

- 矩阵的加法和减法
- 数乘矩阵
- 矩阵的乘法
- 线性方程组的矩阵形式

前几节中我们已经看到，用矩阵来处理线性方程组是非常方便的．事实上，矩阵是现代数学的重要工具，矩阵理论也是代数学的主要内容．本节我们只简单地介绍矩阵的加法、数乘和乘法，为了更简单地表述方程组解的结构．下一章我们将进一步讨论矩阵的“高等运算”．

1．矩阵的加法

同型矩阵：两个 $m \times n$ 矩阵称同型矩阵．

矩阵的相等：两个同型矩阵，仅当对应元素都相等时称相等．

【定义1】 若$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$为两个同型矩阵，则矩阵

$$A+B\equiv[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n},\quad A-B\equiv[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

分别称为A与B的**和**、**差**，即两个同型矩阵的加减是同位置元素对应相加减.

矩阵加减法的基本性质(A, B, C 为 $m\times n$ 矩阵):

(1) $A+B=B+A$ (交换律);

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (结合律);

(3) $A+0_{m\times n}=A$;

(4) $A-A=0_{m\times n}$.

2. 数乘矩阵

【定义2】 若 k 为一个数，$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，则矩阵

$$kA \equiv [ka_{ij}]_{m\times n}$$

称为k与A的**数量乘积**，即数乘矩阵相当于用此数乘矩阵的每一个元素；约定$-A\equiv(-1)A$.

数乘矩阵的基本性质(A, B 为矩阵, k, l 为数):

(1) $(kl)A=k(lA)$;

(2) $(k+l)A=kA+lA$;

(3) $k(A+B)=kA+kB$.

【命题4.1】 当 A 为 n 阶方阵时, $|kA|=k^n\cdot|A|$.

【例1】 设矩阵 A, B, X 满足等式

$$5(A+X)=2(2B-X),$$

其中 $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 求矩阵 X.

【解】 由 $5(A+X)=2(2B-X)$ 得到:

$$5A+5X=4B-2X,\quad 7X=4B-5A,$$

$$X=\frac{1}{7}(4B-5A)$$

$$=\frac{1}{7}\left(4\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}-5\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. 矩阵的乘法

【定义3】 若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{n\times s}$，则矩阵

$$AB \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right]_{m\times s}$$

称为 A 与 B 的**乘积**，即 A 与 B 的乘积 AB 是一个 $m\times s$ 矩阵，其第 i 行第 j 列的元素是 A 的第 i 行的元素 $a_{i1},\cdots,a_{in}$ 与 B 的第 j 列元素 $b_{1j},\cdots,b_{nj}$ 对应乘积的和

$$a_{i1}\cdot b_{1j}+\cdots+a_{in}\cdot b_{nj}.$$

$$[m\times n][n\times s]=[m\times s]$$

【矩阵乘法图示】

$$
\begin{array}{r}
\\ i \rightarrow \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{bmatrix}_{m\times n}
\times
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
\cdots & b_{1j} & \cdots \\
\cdots & b_{2j} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & b_{nj} & \cdots
\end{bmatrix}_{n\times s} \\
\uparrow \\
j
\end{array}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
 & \vdots & \\
\cdots & c_{ij} & \cdots \\
 & \vdots &
\end{bmatrix}_{m\times s}
$$

$$
c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nj}
$$

【例2】 设$A=(2,\ 1,\ 0)$，$B=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$，计算$AB$和$BA$.

【解】

$$AB=(2,\ 1,\ 0)\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=[2\times1+1\times(-2)+0\times3]=0$$

【约定】 以后我们不再区分1×1矩阵$[a]$与数a.

请记住： $(1\times n$ 矩阵$)\times(n\times1$ 矩阵$)$ 是一个数!

$$BA=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}(2,\quad 1,\quad 0)$$

$$=\begin{bmatrix}1\times 2 & 1\times 1 & 1\times 0\\(-2)\times 2 & (-2)\times 1 & (-2)\times 0\\3\times 2 & 3\times 1 & 3\times 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\-4 & -2 & 0\\6 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

AB 和 BA 不是同型矩阵, $AB\neq BA$

请记住： $(n\times 1$ 矩阵$)\times(1\times n$ 矩阵$)$ 是一个 n 阶方阵!

【例3】 设$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, 计算$AB$和$BA$.

【解】

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 16 & 25\end{bmatrix};$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -6 & -1\\ 6 & 8 & 10\\ 14 & 14 & 24\end{bmatrix}$$

【例4】 设$A=[a_{ij}]_{3\times 4}$，计算E_3A和AE_4.

【解】

$$E_3A_{3\times 4}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}=A_{3\times 4}$$

$$A_{3\times 4}E_4=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{E_3A_{3\times 4}=A_{3\times 4}E_4=A_{3\times 4}}$$

【例5】 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&-2&4&-8\\0&1&-2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

计算AB和BA.

【解】

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&4&-8\\0&1&-2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=E_4;$$

$$BA=\begin{bmatrix}1&-2&4&-8\\0&1&-2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=E_4.$$

【例6】 设$A=[a_{ij}]_{3\times4}$，计算 $0_{2\times3}A$ 和 $A0_{4\times2}$.

【解】

$$0_{2\times3}A_{3\times4}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{14}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{31}&\cdots&a_{34}\end{bmatrix}=0_{2\times4};$$

$$A_{3\times4}0_{4\times2}=0_{3\times2}.$$

【例7】 设 $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, 计算

$$AB,\ BA,\ AA,\ BB.$$

【解】

$$AB=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0;$$

$$BA=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=A\neq 0;$$

$$AA=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0;$$

$$BB=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=B.$$

【评注】

由以上几例, 对矩阵乘法, 我们应注意以下几点:

(1) 零矩阵 $\mathbf{0}$ 和单位阵 E 在矩阵运算中类似数中的 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$;

(2) 矩阵乘法不满足交换律, 即 $AB = BA$ 不总成立, 即使 A, B 为同阶方阵;

(3) 由 $AB = 0$ 推不出 $A = 0$ 或 $B = 0$, 即

当 $A \neq 0, B \neq 0$ 时, 可能有 $AB = 0$;

(4) 由 $AB = AC, BA = CA$ 推不出 $B = C$, 即使 $A \neq 0$.

矩阵乘法运算的基本性质(假设运算可行)：

(1) $(AB)C = A(BC)$ (结合律);

(2) $A(B+C) = AB + AC$,

$(B+C)A = BA + CA$ (分配律);

(3) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ (k为常数);

(4) $EA = AE = A$;

(5) $0A = 0,\ A0 = 0$;

(6) $AB + kA = A(B + kE)$,

$BA + kA = (B + kE)A$ (k为常数).

4. 对角阵

对角阵：我们称下列形式的矩阵为对角阵

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

对角阵的运算简单:

$$\operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n) + \operatorname{diag}(b_1, \cdots, b_n)$$
$$= \operatorname{diag}(a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n);$$

$$\operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)\operatorname{diag}(b_1, \cdots, b_n)$$
$$= \operatorname{diag}(a_1 b_1, \cdots, a_n b_n).$$

5. 方阵的幂

若A为方阵，我们用A^n表示n个A的连续乘积，称其为A的n次幂. 由于矩阵的乘法满足结合律，此约定是明确的. 为了方便，我们约定$A^0 = E$. 容易看到对于方阵A及任意自然数m, n，幂运算满足:

(1) $A^m A^n = A^{m+n}$;　(2) $(A^m)^n = A^{mn}$.

【例8】 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，计算$A^n$.

【解】 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,　$\cdots$,

$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,　$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. 矩阵的转置

【定义4】 对于矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n},$$

我们称矩阵

$$A^{\mathrm{T}}\equiv\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

为 A 的转置.

例如，若$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$，则$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}$；

$n\times 1$矩阵$[a_{ij}]_{n\times 1}$也可以方便地写成$[a_1,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$.

【命题4.2】（1）对于方阵A，有$|A^{\mathrm{T}}|=|A|$.

（2）对于任何矩阵A，有$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A)$.

【证明】由行列式转置其值不变知结论成了.

矩阵转置运算的基本性质:

（1）$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

（2）$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

（3）$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

7. 线性方程组的矩阵形式

由矩阵乘法知，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

可写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

若记

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则前面的方程可简写为

$$AX=b.$$

特别是，齐次线性方程组可写为

$$AX=0.$$

例如，方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8 \\ x_1+2x_2=5 \end{cases}$ 可以写成

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

线性代数

【思考题】 试找一个矩阵$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$使得

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

§ 4.2 逆阵

本节主要内容:

- 方阵乘积的行列式
- 方阵的伴随阵
- 可逆方阵

0. 问题的提出

【特例1】 解方程组 $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 5x+7y=2 \end{cases}$.

【解】 方程组的矩阵形式为 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (???)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} & ax=b \ \ (a\neq 0) \\ & \quad \Rightarrow x=a^{-1}b \end{aligned}}$$

【问题】 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的矩阵形式

$$AX = b.$$

若对此方阵 A, 能找到方阵 B 满足

$$BA = E_n,$$

则方程组的解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

本节中，我们将回答这个问题：

(1) 方阵 A 在什么条件下，存在方阵 B 满足 $BA=E$？

(2) 在方阵 A 满足这个条件时，如何求这个方阵 B？

1. 方阵的伴随阵

【定义1】 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为方阵，A_{ij} 为行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 对应的代数余子式，则方阵

$$A^* \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随阵**，其第 i 行元素为行列式 $|A|$ 中第 i 列元素的代数余子式.

线性代数

哈尔滨工程大学

【例1】 求 $A=\begin{bmatrix}2&0&3\\1&-1&1\\0&1&-2\end{bmatrix}$ 的伴随阵 A^*.

【解】 $A_{11}=\begin{vmatrix}-1&1\\1&-2\end{vmatrix}=1;$

$A_{12}=(-1)\begin{vmatrix}1&1\\0&-2\end{vmatrix}=2;$

$A_{13}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1;$

$A_{21}=(-1)\begin{vmatrix}0&3\\1&-2\end{vmatrix}=3;$

$A_{22}=\begin{vmatrix}2&3\\0&-2\end{vmatrix}=-4;$

$A_{23}=(-1)\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=-2;$

$A_{31}=\begin{vmatrix}0&3\\-1&1\end{vmatrix}=3;$

$A_{32}=(-1)\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=1;$

$A_{33}=\begin{vmatrix}2&0\\1&-1\end{vmatrix}=-2.$

$$A^*=\begin{bmatrix}1&3&3\\2&-4&1\\1&-2&-2\end{bmatrix}$$

【特例2】 对于矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 计算 AA^* 和 A^*A.

【解】

$$AA^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{bmatrix} = |A|E;$$

线性代数

$$A^*A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}&a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}\\a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}&a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}|A|&0\\0&|A|\end{bmatrix}=|A|E.$$

【命题4.4】 设 A 为方阵，A^* 为其伴随阵，则

$$AA^*=A^*A=|A|E.$$

【推论】 若 A 为方阵，且 $|A|\neq 0$，则

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=E.$$

2. 方阵乘积的行列式

【命题4.5】 若 A, B 为同阶方阵, 则

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

【证明】 我们仅对2阶方阵证明, 其方法具有一般性.

令 $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$, $B = [b_{ij}]_{2\times 2}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|;$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\
-1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\
0 & -1 & b_{21} & b_{22}
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\substack{b_{21}\times c_2 \to c_3 \\ b_{22}\times c_2 \to c_4}]{\substack{b_{11}\times c_1 \to c_3 \\ b_{12}\times c_1 \to c_4}}
\begin{vmatrix}
a_{12} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\
a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{22}b_{22} \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

$$\overset{c_1 \leftrightarrow c_3}{\underset{c_2 \leftrightarrow c_4}{=\!=\!=\!=}} (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 |AB| \cdot |(-1)E| = (-1)^4 |AB| = |AB|.$$

注意：

对于 n 阶方阵 A, B，一般 $AB \neq BA$，但总有

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |BA|.$$

3. 逆阵

当 A 为方阵，且 $|A| \neq 0$ 时，我们有

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E,$$

即矩阵 $B = \frac{1}{|A|}A^*$ 满足等式

$$AB = BA = E.$$

另一方面,满足上式的矩阵 B 是唯一的:

$$\left.\begin{aligned} AX &= XA = E \\ AY &= YA = E \end{aligned}\right\}$$

$$X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$$

现在是我们引入逆阵的时候了.

【定义2】 对于方阵 A，若存在同阶方阵 B 满足

$$AB = BA = E,$$

则称 A **可逆**，并将这个唯一的 B 称为 A 的**逆阵**，记为A^{-1}.

【评注】

前面的叙述说明，当 $|A| \neq 0$ 时，A可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*};$$

另一方面，若 A可逆，则有方阵 B 满足 $AB = E$，从而得到 $|A| \cdot |B| = 1$，从而$|A| \neq 0$.

【定理4.1】 设A为方阵，则

(1) A可逆$\Leftrightarrow |A|\neq 0$;

(2) 当$|A|\neq 0$时,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*},\quad A^{*}=|A|A^{-1}.$$

【例2】 求$A=\begin{bmatrix}2&0&3\\1&-1&1\\0&1&-2\end{bmatrix}$的逆阵.

【解】 矩阵A可逆: $|A|=5\neq 0$;

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&3&3\\2&-4&1\\1&-2&-2\end{bmatrix}.$$

【命题4.6】 若方阵A可逆，且$AB=AC$，则$B=C$.

【证明】
$$AB=AC \Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)$$
$$\Rightarrow (A^{-1}A)B=(A^{-1}A)C$$
$$\Rightarrow EB=EC$$
$$\Rightarrow B=C.$$

【命题4】 若 A,B 为同阶方阵，则
$$AB=E \Leftrightarrow BA=E.$$

【证明】 我们只需在$AB=E$时，推出$BA=E$.
$$AB=E \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow A\text{可逆};$$
$$AB=E \Rightarrow B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}$$
$$\Rightarrow BA=A^{-1}A=E.$$

【评注】 上述命题简化了逆阵的定义，即为了说明 $B=A^{-1}$，我们只要说明 $AB=E$ 和 $AB=E$ 之一成立即可.

【命题4.7】 若方阵 A 可逆，则：

$$(1)\ (A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}};\qquad (2)\ (A^{*})^{-1}=(A^{-1})^{*}.$$

【证明】 仅证(1).

注意： $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=E.$

$$A^{-1}A=E \Rightarrow (A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}$$

$$\Rightarrow A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=E.$$

$$\boxed{AB=E \Leftrightarrow A^{-1}=B}$$

逆阵运算的基本性质：（以下的矩阵同阶可逆）

（1）$(A^{-1})^{-1} = A$;

（2）$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ (数$\lambda \neq 0$);

（3）$|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

（4）$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

4. 求逆阵的另一种方法

用公式$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$计算一个具体矩阵的逆阵虽然计算量较大，但在理论推导上，此公式是重要的．对于具体的矩阵，下面我们给出一个更有效的方法来计算逆阵.

我们从解方程的角度看矩阵求逆. 以求 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ 的逆为例: 设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

此式等同于下述两个方程组:

$$\begin{cases}2x_1+x_2=1\\ x_1+2x_2=0\end{cases},\quad \begin{cases}2y_1+y_2=0\\ y_1+2y_2=1\end{cases}.$$

上述两个方程组的系数阵都是 A, 用增广阵的初等变换解这两个方程组的过程是同步的, 故可融合在下列同一个过程中:

线性代数

$$[A\ E]=\begin{bmatrix}2&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)\times r_1\to r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&-3&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{3})\times r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)\times r_2\to r_1}\begin{bmatrix}1&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

哈尔滨工程大学

上述过程明显具有一般性, 因而我们有下述命题.

【命题4.8】 设 A 为 n 阶方阵. 若

$$[A \quad E]_{n\times 2n} \xrightarrow{\text{行初等变换}} [E \quad B]_{n\times 2n},$$

则 A 可逆, 且 $B = A^{-1}$.

【例3】 求证可逆上三角阵的逆阵还是上三角阵.

【证明】 以 3 阶方阵为例说明原理.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & * \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & * \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_{22} & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_{22} & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{11} & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_{22} & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & * & * \\ 0 & b_{22} & * \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

5. 克莱默法则新证*

【克莱默法则】 若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D = |a_{ij}|_n \neq 0$，则此方程组有唯一的一组解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

这里 D_i 是将 D 中的第 i 列 $a_{1i}, \cdots, a_{ni}$ 换成 $b_1, \cdots, b_n$ 得到的行列式.

【证明】 改写方程组为 $AX = b$. 方程组的解为

$$X = A^{-1}b = (\frac{1}{D}A^*)b$$

$$X=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix},$$

$$x_i=\frac{1}{D}(b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\cdots+b_nA_{ni})=\frac{D_i}{D}.$$

【思考题】

设A, B为n阶方阵，且 $AB=A+B$，求证 $AB=BA$.

§4.3 初等矩阵

本节主要内容:

- 初等矩阵
- 初等矩阵与初等变换的关系
- 矩阵的一种基本分解(秩分解)

1. 初等矩阵

【特例1】 观察下面的矩阵运算：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

【结论】 对矩阵$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$进行一次行(列)初等变换相当于在矩阵的左(右)边乘上一个特殊矩阵，这个矩阵是由单位阵进行一次同样的初等变换得到的.

【定义1】 对 n 阶单位矩阵 E_n 进行一次行或列初等变换得到的矩阵称为 n 阶**初等矩阵**.

3 种初等变换对应着 3 种初等矩阵：

$$1.\quad P_n(i,j)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

2. $$P_n(i(k)) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && k &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}\, i \,\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

3. $$P_n(j(k),i) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && k && \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}\, i \,\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}\, j \,\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

【命题4.9】 初等矩阵的逆阵还是初等矩阵.

【证明】

$$P_n(i,j)\cdot P_n(i,j)=E_n:$$

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j);$$

$$P_n(i(k))\cdot P_n(i(k^{-1}))=E_n:$$

$$P(i(k))^{-1}=P(i(k^{-1}));$$

$$P_n(j(k),i)\cdot P_n(j(-k),i)=E_n:$$

$$P(j(k),i)^{-1}=P(j(-k),i).$$

【初等矩阵和初等变换的关系】

行初等变换相当于在左边乘一个初等矩阵; 列初等变换相当于在右边乘一个初等矩阵. 具体为:

$$A \xrightarrow{\mathrm{r}_i \leftrightarrow \mathrm{r}_j} P_m(i, j)A, \qquad A \xrightarrow{\mathrm{c}_i \leftrightarrow \mathrm{c}_j} AP_n(i, j),$$

$$A \xrightarrow{k \times \mathrm{r}_i} P_m(i(k))A, \qquad A \xrightarrow{k \times \mathrm{c}_i} AP_n(i(k)),$$

$$A \xrightarrow{k \times \mathrm{r}_j \to \mathrm{r}_i} P_m(j(k), i)A,$$

$$A \xrightarrow{k \times \mathrm{c}_i \to \mathrm{c}_j} AP_n(j(k), i).$$

2. 矩阵的秩分解

【定理4.2】 若矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{m\times n}$ 等价，则存在一个 m 阶可逆矩阵 P 和一个 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$A = PBQ.$$

【证明】 假设矩阵 A 经过 k 次行初等变换和 l 次列初等变换变为 B，则存在两组初等矩阵

$$P_1, \cdots, P_k\ (m\text{阶的})\ \text{和}\ Q_1, \cdots, Q_l (n\text{阶的})$$

使得

$$P_k \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_l = B, \quad A = PBQ,$$

这里 $P = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}$，$Q = Q_l^{-1} \cdots Q_1^{-1}$.

【推论】 若矩阵$A_{m\times n}$的秩为r，则存在一个m阶可逆矩阵P和一个n阶可逆矩阵Q使得

$$A = P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q.$$

【证明】 由于当$\mathrm{r}(A)=r$时，A 等价于

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

再由上述定理知结论成了.

【定理4.3】 若矩阵A可逆，则A可以分成若干初等阵的乘积.

【证明】 只需注意A可逆等同于A等价于单位阵E.

【推论】 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，P 为 m 阶可逆阵，Q 为 n 阶可逆阵，则 $\mathrm{r}(PA)=\mathrm{r}(AQ)=\mathrm{r}(A)$.

【证明】 P 为 m 阶可逆阵，由上述定理知 P 为若干初等阵的乘积；这等同于

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} PA,$$

从而

$$\mathrm{r}(PA)=\mathrm{r}(A).$$

同理

$$\mathrm{r}(AQ)=\mathrm{r}(A).$$

【命题4.10】 对任何矩阵$A_{m\times s}$, $B_{s\times n}$, $\mathrm{r}(AB)\leqslant \mathrm{r}(B)$.

【证明】 令$\mathrm{r}(B)=r$, 则存在可逆阵P, Q使得

$$B=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q.$$

若我们记

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s1} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{s1} & \cdots & e_{sr} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

则

$$B=\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s1} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{s1} & \cdots & e_{sr} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}Q$$

$$=\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & \cdots & k_{sr} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q,$$

从而 $$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & \cdots & k_{sr} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q$$

$$=\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} Q.$$

于是 $$\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}\right)\leqslant r=\mathrm{r}(B).$$

可用同样的方法证实, $\mathrm{r}(AB) \leqslant \mathrm{r}(A)$

也可这样证实:

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}((AB)^{\mathrm{T}}) &= \mathrm{r}(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}) \\ \leqslant \mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}) &= \mathrm{r}(A).\end{aligned}$$

§4.4 分块的矩阵运算

本节主要内容:

- 矩阵的分块
- 分块阵的运算

1. 矩阵的分块

代数学中为了方便理论推导或简化运算，经常将一个矩阵分割成若干个更小的矩阵.

【矩阵的分块】 用贯穿矩阵的纵线和横线将一个矩阵分割成若干个小块矩阵的过程称为此**矩阵的分块**，其中的每个小块称为**子块**.

以下是矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

的几个分块法:

线性代数

①
$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ \hline 7 & 8 & 9\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}:$$

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix},\quad A_{21}=(7,\ \ 8),\quad A_{22}=9;$$

②
$$\left[\begin{array}{c|cc}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ \hline 7 & 8 & 9\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}:$$

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix},\quad A_{21}=7,\quad A_{22}=(8,\ \ 9);$$

③
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3):$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},\quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix},\quad \beta_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix};$$

④
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}:$$

$$\alpha_1 = (1,\ 2,\ 3),\quad \alpha_2 = (4,\ 5,\ 6),\quad \alpha_3 = (7,\ 8,\ 9).$$

2. 分块矩阵的运算

【分块矩阵的加法】

若A, B都为$m\times n$矩阵，它们分块相同，即

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix},$$

且 A_{ij} 与 B_{ij} 为同型矩阵，则有

$$A+B=\begin{bmatrix} \boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1t}+B_{1t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{st}+B_{st} \end{bmatrix}.$$

【分块矩阵的数乘】

若矩阵A分块为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix},$$

k为数，则有

$$kA=\begin{bmatrix} kA_{11} & \cdots & kA_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ kA_{m1} & \cdots & kA_{mn} \end{bmatrix}.$$

【分块矩阵的乘法】

若 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，他们分块为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kl} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{l1} & \cdots & B_{lr} \end{bmatrix},$$

且 A_{it} 的列数与 B_{tj} 的行数相同，则有

$$AB=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k1} & \cdots & C_{kr} \end{bmatrix},$$

其中 $C_{ij}=\sum_{t=1}^{l} A_{it}B_{tj}\ (i=1,\cdots,k;\ j=1,\cdots,r).$

【说明】

在形式上如普通矩阵乘法一样运算，仅仅要求 $A_{it}B_{tj}$ 有意义. 分块矩阵的乘法能简化矩阵的乘法运算，特别在理论推导中.

【例1】 设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

用分块乘法求 AB.

【解】 将矩阵 A, B 进行如下分块:

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$B=\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}.$$

线性代数

哈尔滨工程大学

线性代数

$$AB=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & 0\\ 0 & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11} & A_{12}B_{22}\\ 0 & A_{22}B_{22}\end{bmatrix},$$

$$A_{11}B_{11}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},$$

$$A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix},$$

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

【分块矩阵的转置】

若分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix},$$

则有

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{m1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{mn}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

3. 分块对角阵

若 $A_1, \cdots, A_s$ 都为方阵(阶数可以不同)，则称分块阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{bmatrix},$$

为**对角分块阵.**

此时，$|A| = |A_1| \cdots |A_s|$;

当 $A_1, \cdots, A_s$ 都可逆时, A 也可逆

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

【例2】 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

的逆阵.

【解】 将矩阵 A 如下分块：

$$A=\begin{bmatrix}X & 0\\ 0 & Y\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix};$$

线性代数

哈尔滨工程大学

$$A=\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

X, Y 都可逆;

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

哈爾濱工程大學
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

4.5矩阵运算的相关MATLAB应用

一、矩阵基本运算

A’	矩阵A的转置
det(A)	方阵A的行列式
inv(A)	方阵A的逆
rank(A)	矩阵A的秩
A+B	矩阵相加
A*B	矩阵相乘

二、如何取出矩阵的某一行（列）

取出矩阵的某一行（列）

```
>> A=[1,2,3;4,5,6]
>> A(:,1)                    % A的第一列元素
>> A(2,:)                    % A的第二行元素
```

逗号，空格	列分隔符
分号	行分隔符或者在表达式后不显示结果
圆括号	在变量后表示元素角标；或者在函数名后
冒号	表示“所有”或者“到”

三、方程组求解

$$AX = b$$

rref(B)	化增广矩阵B为行最简型
x=inv(A)*b	A要求存在逆

习题课四

1. 判别下列命题的真假，并说明理由：

(1) 若$\mathrm{r}(A)=r$，则 A 仅有一个 r 阶子式不等于 0.

(2) 若$\mathrm{r}(A)=r$，则 A 没有等于 0 的 r 阶子式.

(3) 若矩阵 A 的 r 阶子式都等于 0，则 A 的$r+1$阶子式也都等于 0.

(4) 若矩阵 A 的 r 阶子式都等于 0，则$\mathrm{r}(A)<r$.

(5) 若$\mathrm{r}(A_{n\times n})=n$，$A$ 删去一行后得到矩阵 B，则

$$\mathrm{r}(B)=n-1.$$

2. 设 $A=(1,2,3)^{\mathrm{T}}(3,2,1)$, 求 A^{100}.

解

$$A^2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\underline{(3,2,1)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}(3,2,1)=10\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}(3,2,1);$$

$$A^{100}=10^9\begin{bmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{bmatrix}.$$

3. 设 $(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$, 求 A, 其中

$$B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

线性代数

哈尔滨工程大学

解

$$(2E - C^{-1}B)A^{\mathrm{T}} = C^{-1}$$

$$\Rightarrow C(2E - C^{-1}B)A^{\mathrm{T}} = E$$

$$\Rightarrow (2C - B)A^{\mathrm{T}} = E$$

$$\Rightarrow A^{\mathrm{T}} = (2C - B)^{-1};$$

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. 设 A, B 为同阶方阵,

$$A^2 = A,\ B^2 = B,\ (A+B)^2 = A+B,$$

求证 $AB = 0$.

证

$$(A+B)^2 = A+B$$

$$\Rightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A+B$$

$$\Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA;$$

$$AB = -BA \Rightarrow A^2B = -ABA$$

$$\Rightarrow AB = -(-BA)A$$

$$\Rightarrow AB = BA^2 = BA;$$

$$2AB = 0 \Rightarrow AB = 0.$$

5. 设$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$，求$A^n$.

解
$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\lambda E+B,$$

$$B^3=0;$$

$$A^n=(\lambda E+B)^n=\lambda^n E+n\lambda^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}B^2$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}.$$

6. 设A, B为n阶方阵, 且$A^2=B^2=E$, $|A|+|B|=0$, 求$|A+B|$的值.

解

$$|A+B| = |A(E+AB)|$$

$$= |A(B+A)B|$$

$$= |A|\cdot|A+B|\cdot|B|$$

$$= (|A|\cdot|B|)\cdot|A+B|;$$

$$A^2=B^2=E \Rightarrow |A|=\pm 1,\ |B|=\pm 1;$$

$$|A|+|B|=0 \Rightarrow |A|\cdot|B|=-1;$$

$$\Rightarrow |A+B|=0.$$

7. 设$A\neq 0$为实方阵，且$A_{ij}=a_{ij}\ (A^*=A^{\mathrm{T}})$:

(1) 求证 A 可逆;

(2) 当 $n\geqslant 3$ 为奇数时，求$|A|$的值.

证 (1) $A^*=A^{\mathrm{T}}\Rightarrow AA^{\mathrm{T}}=|A|E$;

若$|A|=0$, 则

$$0=AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11}^2+\cdots+a_{1n}^2 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & a_{n1}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A=0$ (与$A\neq 0$矛盾) $\Rightarrow A$可逆.

(2) $AA^{\mathrm{T}}=|A|E\Rightarrow |A|^2=|A|^n\Rightarrow |A|^{n-2}=1$

$\Rightarrow |A|=1$ ($n-2$为奇数).

8. 设A, B为同阶方阵，且$AB = A + B$，求证

(1) $A - E$和$B - E$都可逆;

(2) $AB = BA$.

证 (1) $AB = A + B \Rightarrow AB - A - B = 0$

$$\Rightarrow AB - A - B + E = E$$

$$\Rightarrow A(B - E) - (B - E) = E$$

$$\Rightarrow (A - E)(B - E) = E$$

$\Rightarrow A - E$ 和 $B - E$ 都可逆.

(2) $(A - E)(B - E) = E \Rightarrow (B - E)(A - E) = E$

$$\Rightarrow BA - B - A + E = E$$

$$\Rightarrow BA = A + B$$

$$\Rightarrow AB = BA$$

9. 设A为$n\ (n\geqslant 2)$阶方阵，求证$|A^*|=|A|^{n-1}$.

证 (1) $|A|\neq 0$:

$$AA^*=|A|E \Rightarrow |A|\cdot|A^*|=|A|^n$$

$$\Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1};$$

(2) $|A|=0$: (要证实$|A^*|=0$)

若$|A^*|\neq 0$, 则A^*可逆;

$$AA^*=|A|E=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow A^*=0,\ \text{矛盾}.$$

此矛盾说明，当$|A|=0$时，$|A^*|=0$;

$$|A^*|=|A|^{n-1}\ \text{也成立}.$$

10. 设A是$n\,(n\geqslant 2)$阶方阵，求证

$$\mathrm{r}(A^*)=\begin{cases} n & (\mathrm{r}(A)=n); \\ 1 & (\mathrm{r}(A)=n-1); \\ 0 & (\mathrm{r}(A)<n-1). \end{cases}$$

证 (1) $\mathrm{r}(A)=n$: $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow \mathrm{r}(A^*)=n.$

(2) $\mathrm{r}(A)=n-1$: $AA^*=|A|E=0$;

$A^*=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$的每一列都是$AX=0$的解;

$AX=0$的通解:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=c\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}\quad (d_1,\cdots,d_n\text{至少有一个不为}0);$$

$AX=0$的通解:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \ (d_1,\cdots,d_n\text{至少有一个不为}0);$$

$A^*=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$的任何两列都成比例:

$$\mathrm{r}(A^*)\leqslant 1;$$

$\mathrm{r}(A)=n-1$: A有一个$n-1$阶子式不为0

$\Rightarrow A^*$至少有元素$\neq 0$, $\mathrm{r}(A^*)\geqslant 1$;

$\Rightarrow \mathrm{r}(A^*)=1.$

(3) $\mathrm{r}(A)<n-1$: A的所有$n-1$阶子式都为0

$\Rightarrow A^*=0,\ \mathrm{r}(A^*)=0.$

10. 设A是$n\,(n\geqslant 2)$阶方阵，求证

$$\mathrm{r}(A^*)=\begin{cases} n & (\mathrm{r}(A)=n); \\ 1 & (\mathrm{r}(A)=n-1); \\ 0 & (\mathrm{r}(A)<n-1). \end{cases}$$

证 (1) $\mathrm{r}(A)=n$： $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow \mathrm{r}(A^*)=n.$

(2) $\mathrm{r}(A)=n-1$：

A有一个$n-1$阶子式不为0

$\Rightarrow A^*$至少有元素$\neq 0$, $\mathrm{r}(A^*)\geqslant 1$;

$$AA^*=|A|E=0 \Rightarrow \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A^*)\leqslant n \Rightarrow \mathrm{r}(A^*)\leqslant 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{r}(A^*)=1.$$

(3) $\mathrm{r}(A)<n-1$： A的所有$n-1$阶子式都为0

$$\Rightarrow A^*=0,\ \mathrm{r}(A^*)=0.$$

11. 设 A, B 为同阶方阵，$E-AB$ 可逆，求证 $E-BA$ 也可逆.

证 由 $E-AB$ 可逆，设 $(E-AB)^{-1}=C$:

$$(E-AB)C=E$$

X?: $(E-BA)X=E$

$X=E+BCA$

$$\Rightarrow C-ABC=E$$
$$\Rightarrow BC-BABC=B$$
$$\Rightarrow (E-BA)BC=B$$
$$\Rightarrow (E-BA)BCA=BA$$
$$\Rightarrow -(E-BA)BCA=-BA$$
$$\Rightarrow E-(E-BA)BCA=E-BA$$
$$\Rightarrow (E-BA)+(E-BA)BCA=E$$
$$\Rightarrow (E-BA)(E+BCA)=E$$
$$\Rightarrow (E-BA)^{-1}=(E+BCA).$$