

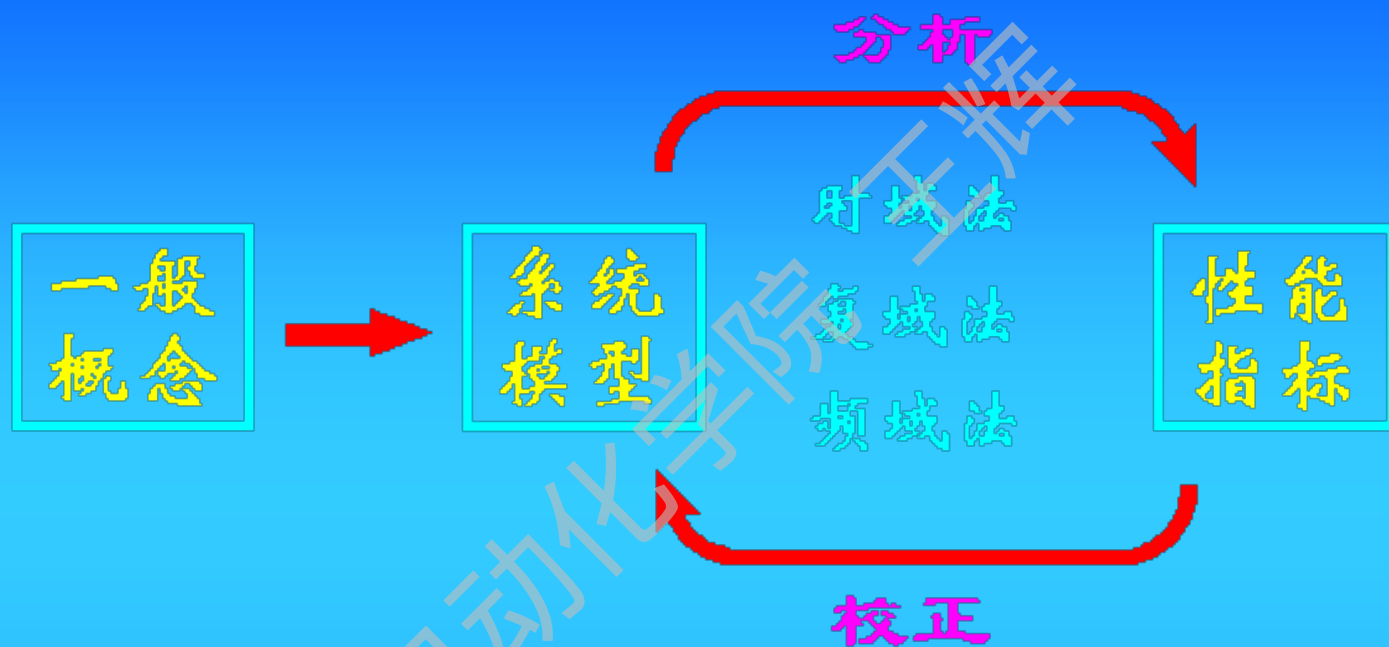
The background of the slide features a large, vibrant orange ribbon bow in the upper left corner and two smaller orange daisy-like flowers in the lower right corner. The text is overlaid on this background.

控制系统的数学模型

《自动控制原理》第二章

制作人 哈尔滨工程大学 王辉

自动控制理论课程的任务与体系结构



课程的体系结构

本章主要内容

- 控制系统的时域数学模型
- 控制系统的复数域数学模型
——传递函数定义
- 控制系统的结构图与信号流图





2-1 控制系统的时域数学模型

控制系统的运动方程式

-----根据描述系统特性的物理学定律
(机械、电气、热力、液压) 写出, 展示
系统在运动过程中各变量之间的相互关系,
一般以微分方程的形式来描述输入量与输出量之间的关系。



建立系统微分方程的基本步骤

- 1) 分析：确定系统的
输入量、输出量及中间变量
- 2) 列写：从系统的输入端开始
注意：前后相连的两个元件之间的负载效应。
- 3) 消去：消去中间变量
- 4) 规范：将方程写成规范形式，各导数项降幂
顺序排列。





一、线性元件的微分方程

1、电路系统：

基本要素

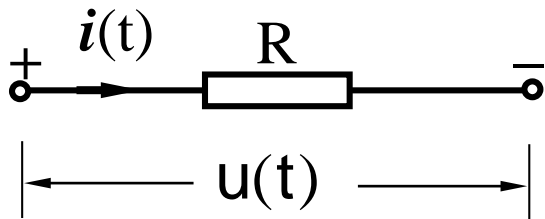
电阻、电容和电感

基本定律

基尔霍夫电流和电压定律

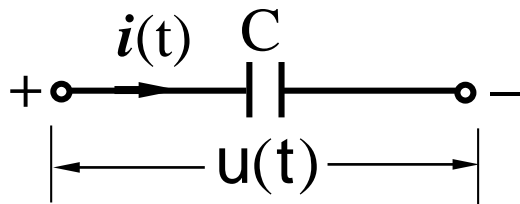


电阻、电容、电感(补充)



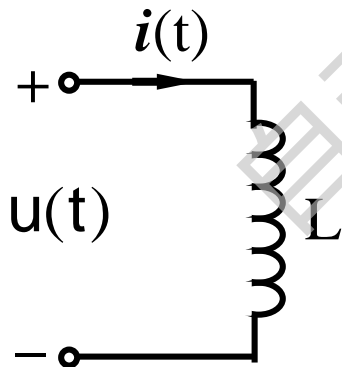
$$u(t) = i(t) \cdot R$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$



$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$



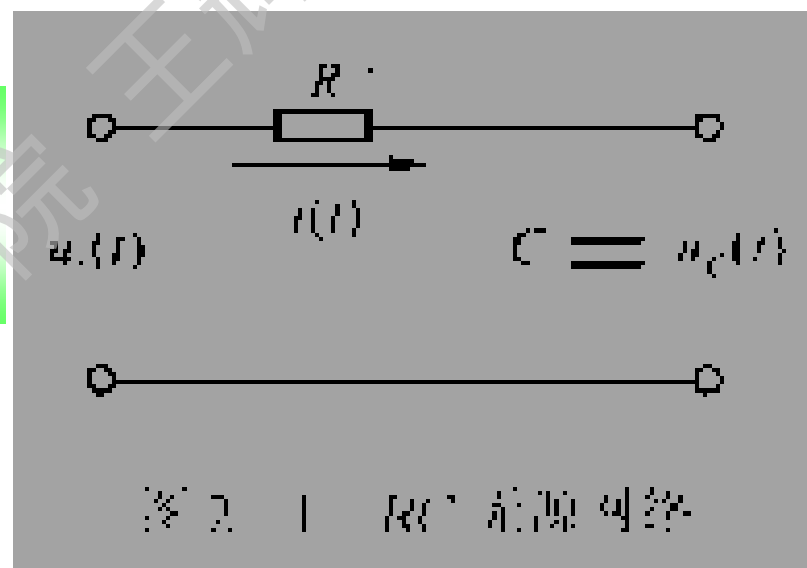
$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$$

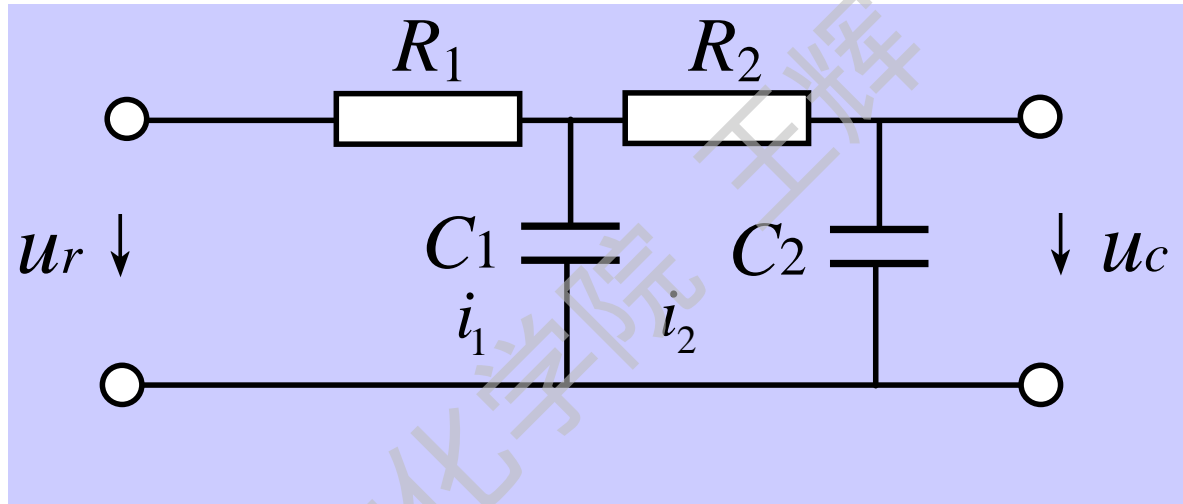


- 例2-1：电阻 R 和电容 C 组成的网络如图所示，列写以 $u_r(t)$ 为输入量， $u_c(t)$ 为输出量的网络微分方程。

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$



例：四端网络如图所示，列写以 $u_r(t)$ 为输入量， $u_c(t)$ 为输出量的网络微分方程。



$$T^2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + 3T \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

$$T = RC$$

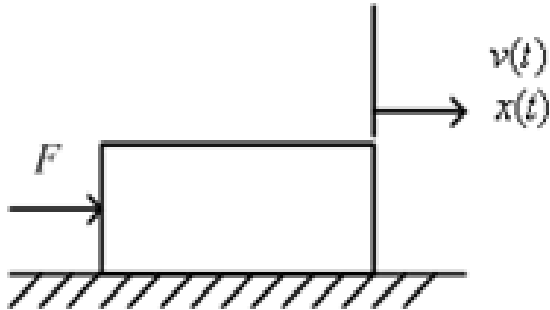
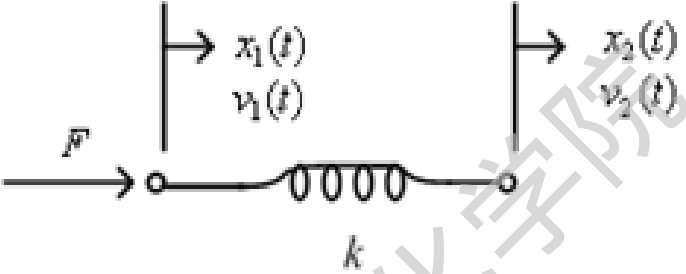
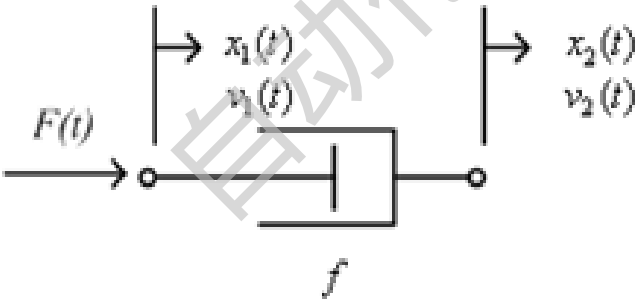


2、机械系统：

遵循力学的基本规律——**牛顿定律**
(力和力矩平衡方程)

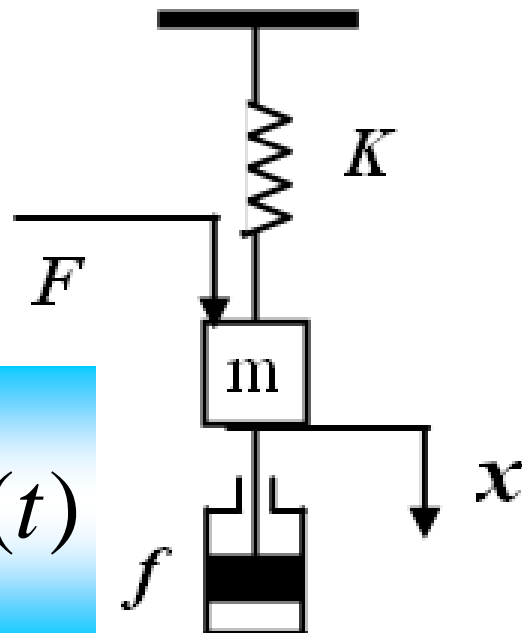
在机械系统的分析中，常使用三种理想化的要素：**质量、弹簧和阻尼器。**



基本要素	示意图	运动方程
质量要素		$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$
弹性要素		$F = k(x_1 - x_2) = kx$
阻尼要素		$F = f(v_1 - v_2) = fv$

例 2-2：设有一个弹簧—质量块—阻尼器组成的机械平移系统如图。 f 为阻尼系数。当外力作用于系统时，系统将产生平移。试列写出以系统外力 F 为输入量，以质量块位移 x 为输出量的系统运动方程式。

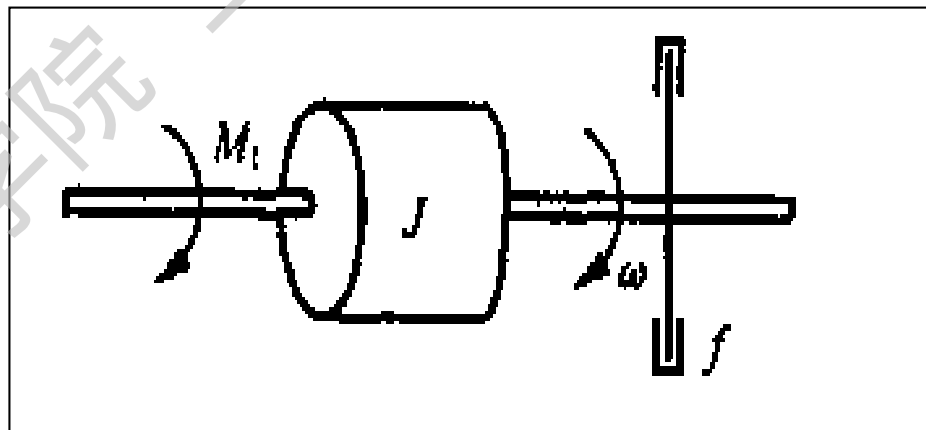
$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + Kx = F(t)$$



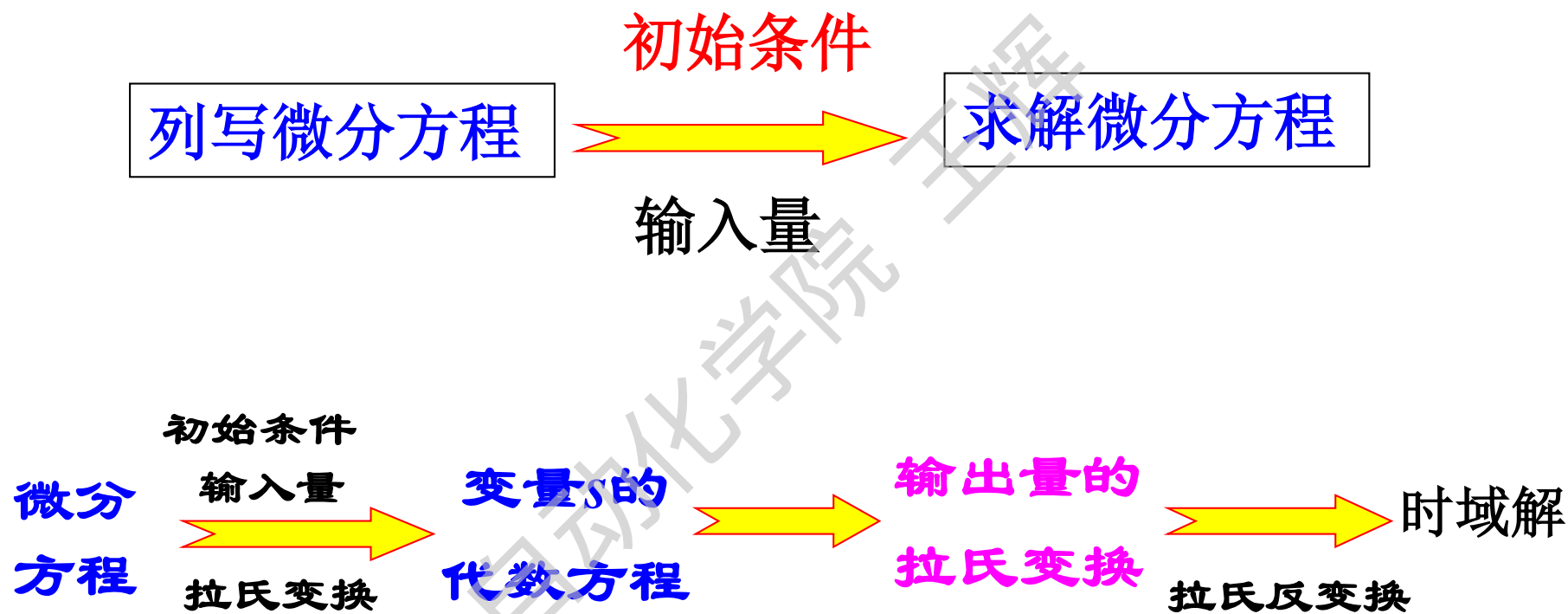
例2-3：机械转动系统。设一个机械转动系统由惯性负载和粘性摩擦阻尼器组成，原理图如图所示。试列写以外力矩 M_1 为输入量、负载转动角速度 ω 输出量的系统运动方程式。

$$\sum M = J \frac{d\omega}{dt}$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + f\omega = M_1$$



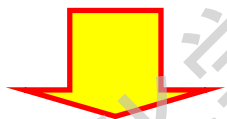
二 线性微分方程的求解



三、非线性微分方程的线性化

- 控制系统中，非线性因素的问题可以分两大类：

{ 元件存在本质非线性
存在非本质的非线性问题



解决办法

- 对弱非线性的线性化
- 平衡点附近的小偏差线性化

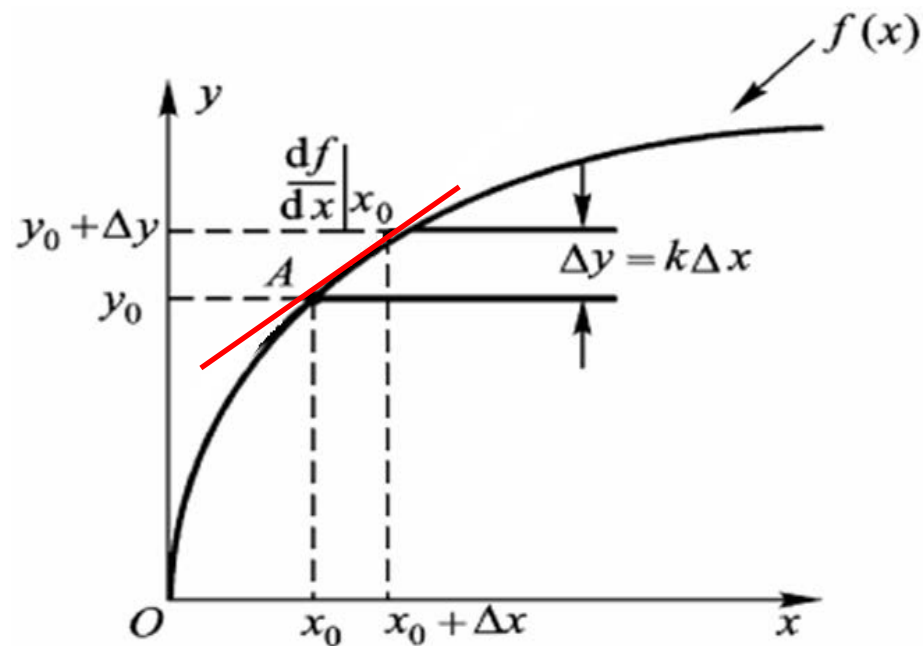


设系统输入输出变量之间 $y = f(x)$ 具有如图所示的非线性特性，并设系统经常工作在平衡点 $A(x_0, y_0)$ 处，当系统受到扰动后，变量 y 只在 A 点附近变化

则在 A 点处的输入输出关系函数可展开成

泰勒级数


$$\Delta y = K \Delta x$$





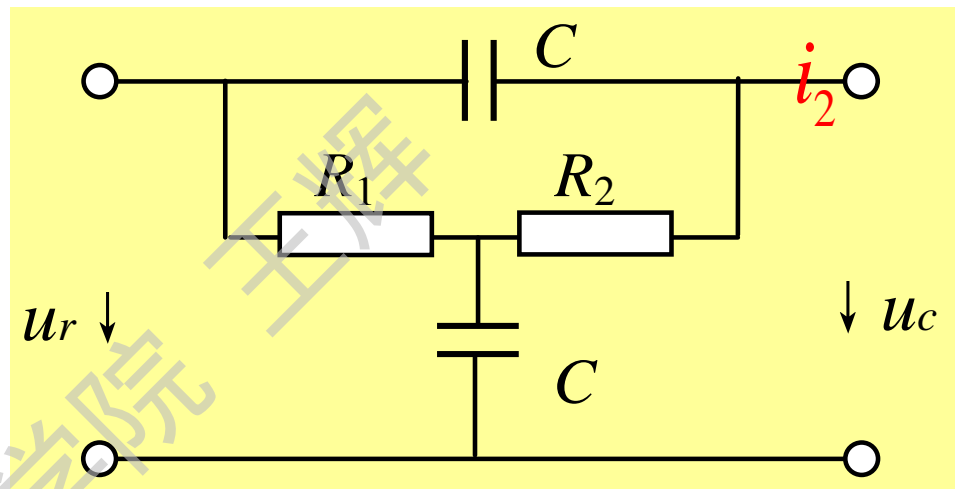
平衡点附近的小偏差线性化

- 线性化的基本假设：

控制系统各个元件的输入量和输出量只是在平衡点附近作微小变化，即变量偏离其预期工作点的偏差甚小。



列写四端网络的微分方程，并求传递函数。



$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}{T_1 T_2 s^2 + (2T_1 + T_2)s + 1}$$

$$T_1 = R_1 C$$

$$T_2 = R_2 C$$



2-1 控制系统的时域数学模型

——微分方程

2-2 控制系统的复数域数学模型

——传递函数



2-2 控制系统的复数域数学模型

——传递函数

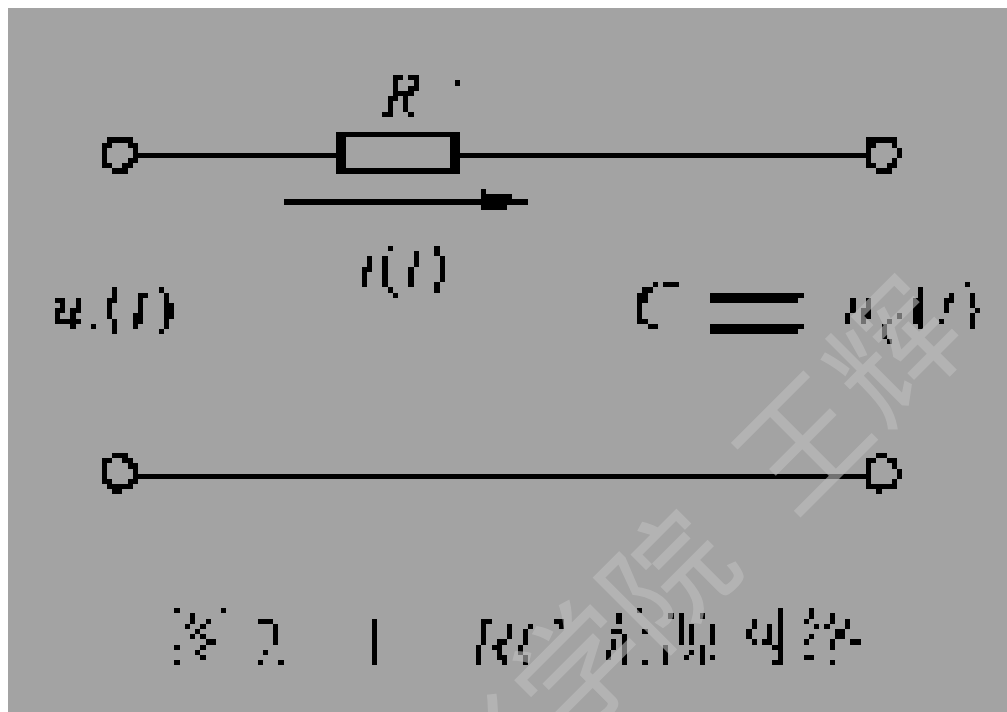
定义

表达式

性质

求取





$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$



2-2 控制系统的复数域数学模型

一、传递函数的定义和性质

自动化学院



1、定义：

线性系统的传递函数是在初始条件（状态）为零的情况下，线性定常系统或元件输出信号的拉氏变换式与输入信号的拉氏变换式之比，称为该系统或元件的传递函数，记为：

$$G(S) = \frac{C(S)}{R(S)}$$



2. 传递函数的表达式

- 有理分式形式：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0} = \frac{M(s)}{N(s)}, m \leq n$$



• 零、极点形式

——首 1 形式

$$G(s) = \frac{b_m(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$



• 时间常数形式

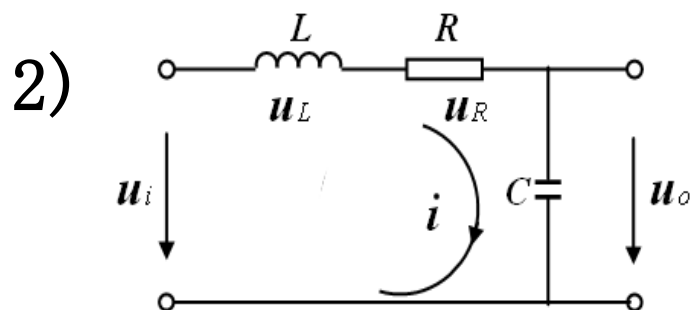
--尾1形式

$$G(s) = \frac{b_0(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{a_0(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$$



3. 传递函数的性质

1) 传递函数只适用于线性定常系统



$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$LC \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

传递函数取决于系统或元件的结构和参数，
与输入量、输出量、扰动量等外部因素无关，
只表示系统的固有属性。



二、传递函数的求取方法

◆方法1 直接计算法

◆方法2 间接法



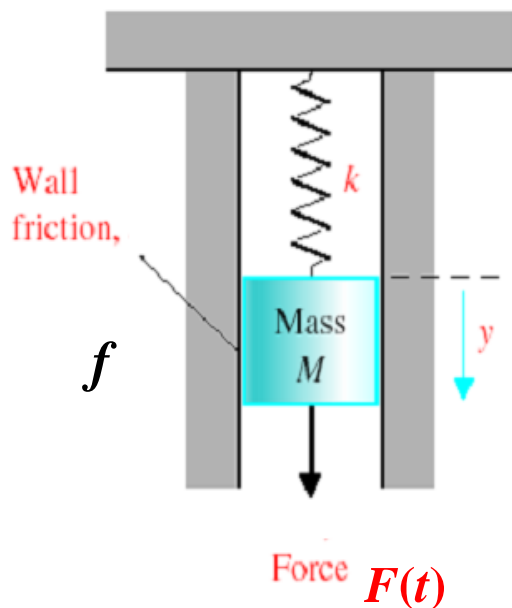
直接计算法求取传递函数的基本步骤：

- 1) 列写系统的**微分方程**；
- 2) 初始状态为零，**对方程两边作拉氏变换**；
- 3) 写出**标准的传递函数形式**。



直接法求取传递函数

例：求弹簧-质量-阻尼系统传递函数 $Y(s)/F(s)$



$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F(t) - ky - f \dot{y}$$

零初始条件下

$$ms^2 Y(s) = F(s) - kY(s) - fsY(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k}$$

M : 质量

f : 粘性摩擦系数

k : 弹簧刚度



• 方法2-----间接法

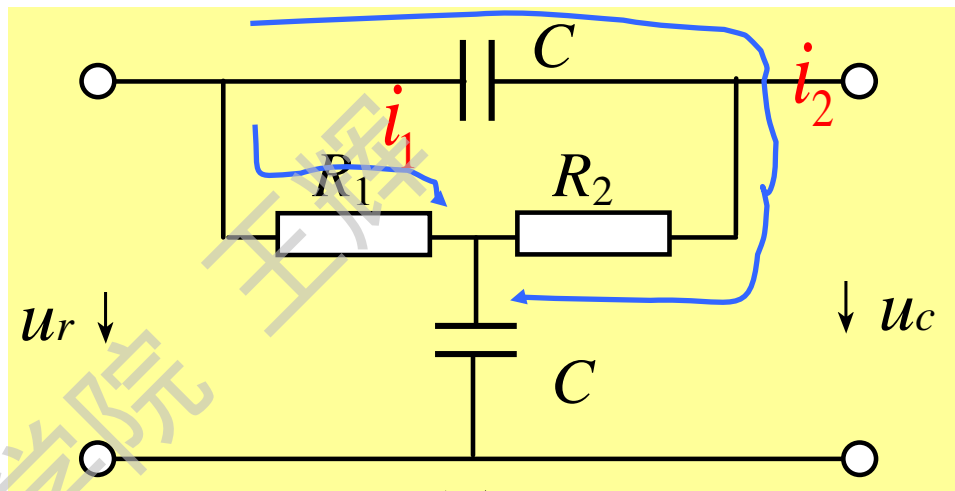
步骤：

- 1) 列写微分方程组
- 2) 在零初始条件下对方程组进行拉氏变换
- 3) 消去中间变量



列写四端网络的微分方程，并求传递函数。

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)}$$



$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}{T_1 T_2 s^2 + (2T_1 + T_2)s + 1}$$

$$T_1 = R_1 C$$

$$T_2 = R_2 C$$



二、控制系统的典型环节及其传递函数

• 传递函数表示成

$$G(s) = \frac{K}{s^v} \times \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\xi_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\xi_l T_l s + 1)}$$

比例

一阶微分

二阶微分

积分

惯性

振荡

• 典型环节



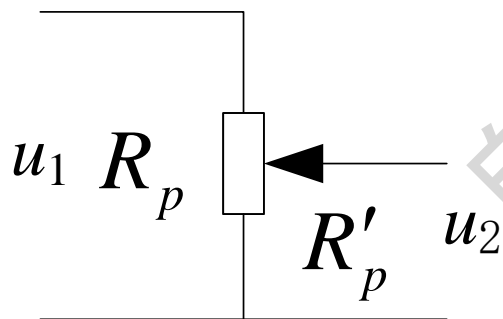
典型环节求取传递函数

1) 比例环节（放大环节）：

传递函数：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \quad K \text{ 为放大系数。}$$

例：



$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{R'_p}{R_p}$$

$$G(s) = \frac{R'_p}{R_p} = K$$

典型环节及其传递函数

2) 微分环节 :

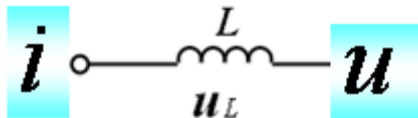
传递函数:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = s$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau s + 1$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau s$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$$



$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow U_L(s) = LsI_L(s)$$

$$\frac{U_L(s)}{I_L(s)} = Ls$$



典型环节及其传递函数

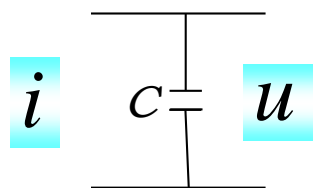
3) 积分环节 :

传递函数:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts}$$

例:



$$i_c = C \frac{du_c}{dt} \Rightarrow I_c(s) = CsU_c(s)$$

$$\frac{U_c(s)}{I_c(s)} = \frac{1}{Cs}$$

典型环节及其传递函数

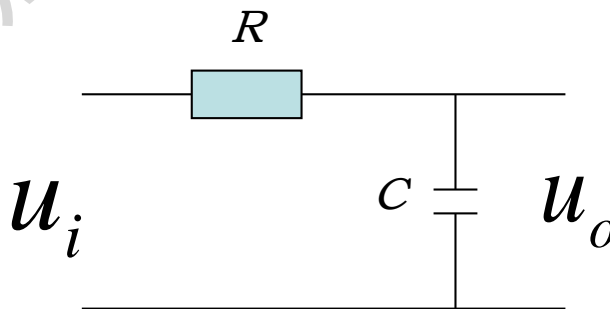
4) 惯性环节:

传递函数:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

T 为时间常数。

实例: RC网络



典型环节及其传递函数

5) 二阶振荡环节：

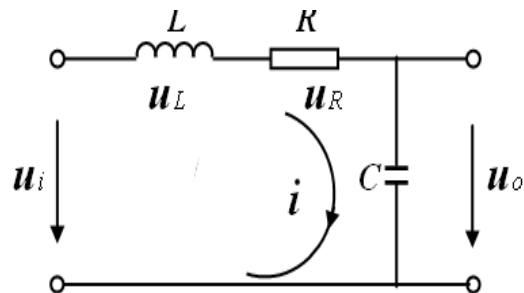
传递函数：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

ξ 为阻尼比。

ω_n 为自然振荡角频率

实例：RLC电路的输出与
输入电压间的传递函数。



典型环节及其传递函数

6) 延迟环节:

时域方程: $c(t) = r(t - \tau), t \geq 0$

传递函数: $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$

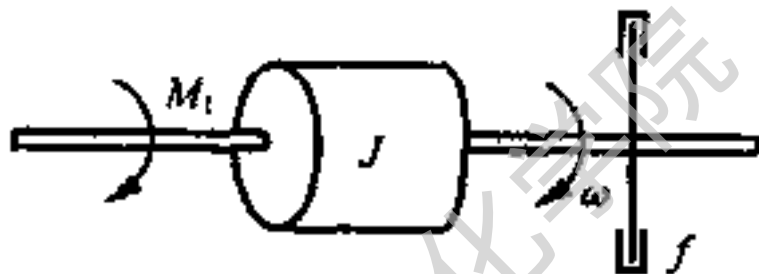
τ 为延迟时间

实例: 管道压力、流量等物理量的控制。



A.测速发电机

B.机械转动系统



C.直流电动机



☆ 2-3 控制系统的结构图和信号流图

一、结构图定义及绘制

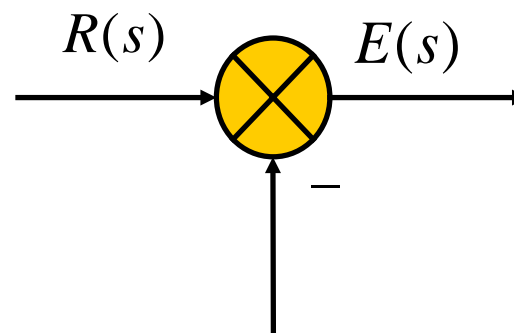
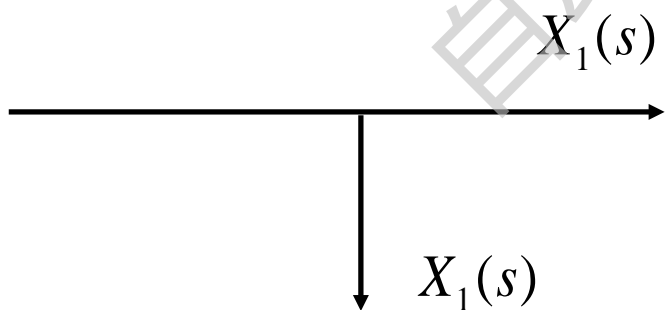
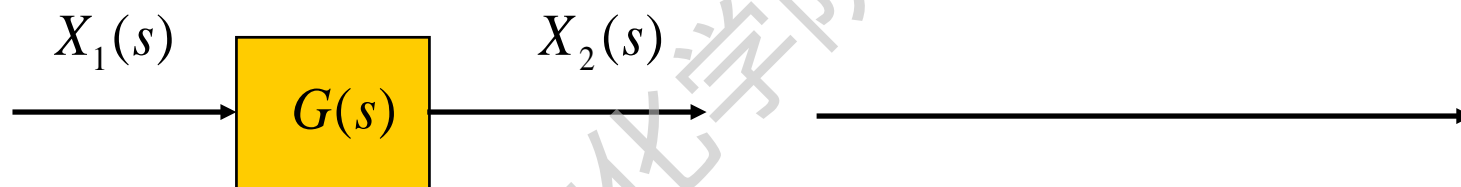
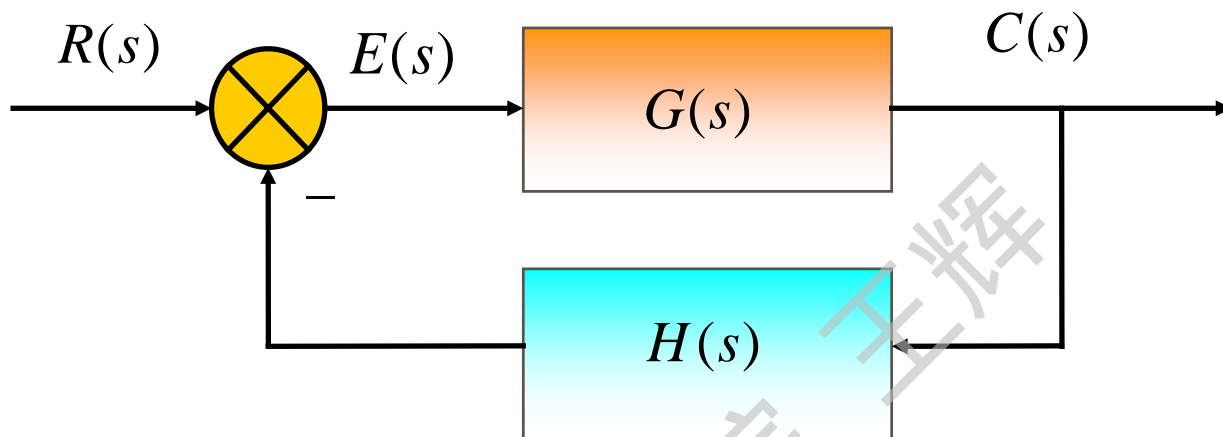
1、定义：

描述信号在系统中流通过程的图示，
它将控制系统的全部变量联系起来。

2、组成：

- 函数方框
- 信号线
- 分支点
- 相加点





例 试绘制图2-24无源网络的结构图。

解 $U_i(s) - U_c(s) = U_{R1}(s);$

$$U_{R1}(s) \frac{1}{R_1} = I_1(s);$$

$$U_{R1}(s) C s = I_2(s);$$

$$I_1(s) + I_2(s) = I(s);$$

$$R_2 \cdot I(s) = U_c(s);$$

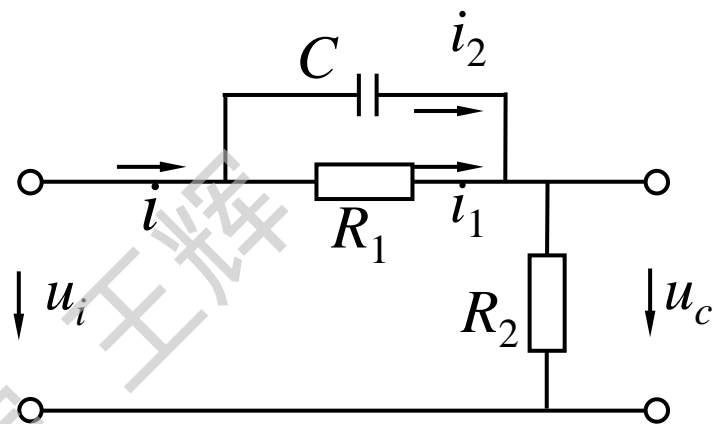
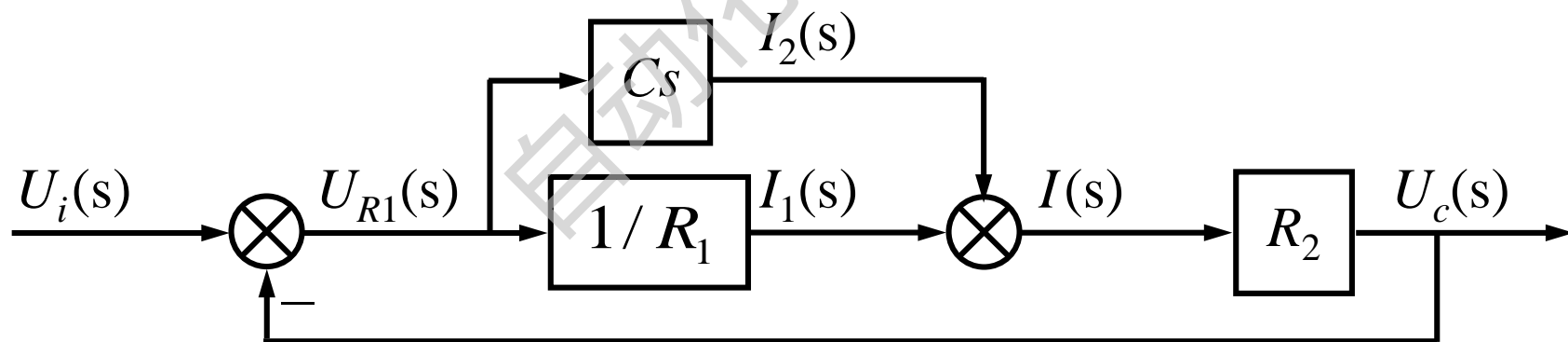


图2-24无源网络

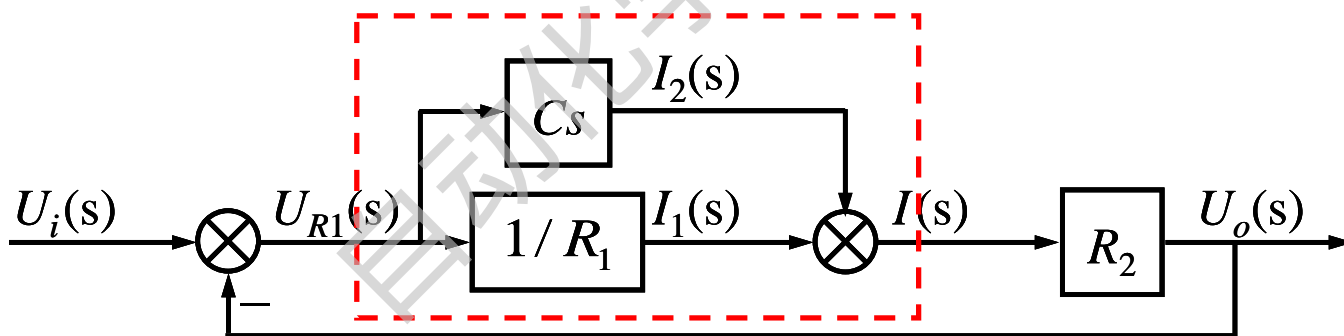
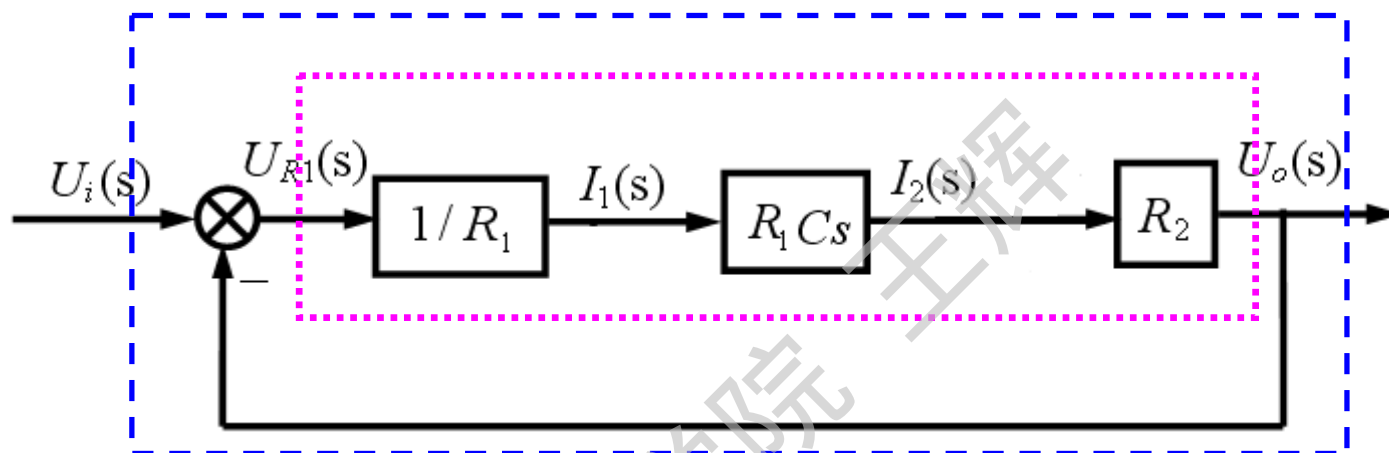


二、结构图的等效变换和简化

自动化学院 王辉



结构图的分析



(一) 三种连接方式的等效传递函数

(1) 串联环节的等效传递函数

“串联相乘”。

(2) 并联环节的等效传递函数

“并联相加”。

(3) 反馈连接环节的等效传递函数

$$\text{等效传递函数} = \frac{\text{前向传递函数}}{1 + \text{开环传递函数}}$$



例2-12：试绘制图2-24无源网络的结构图。

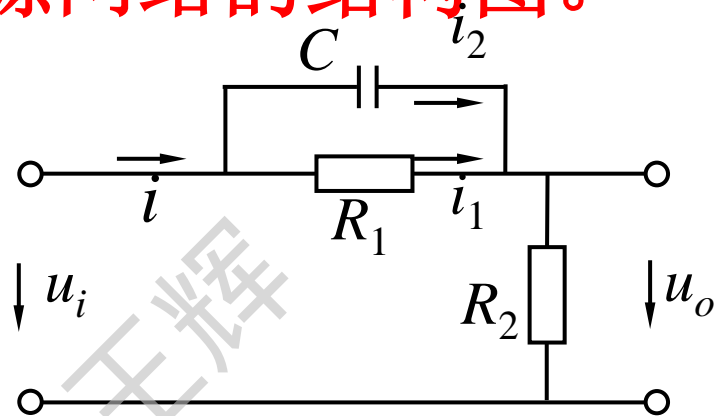
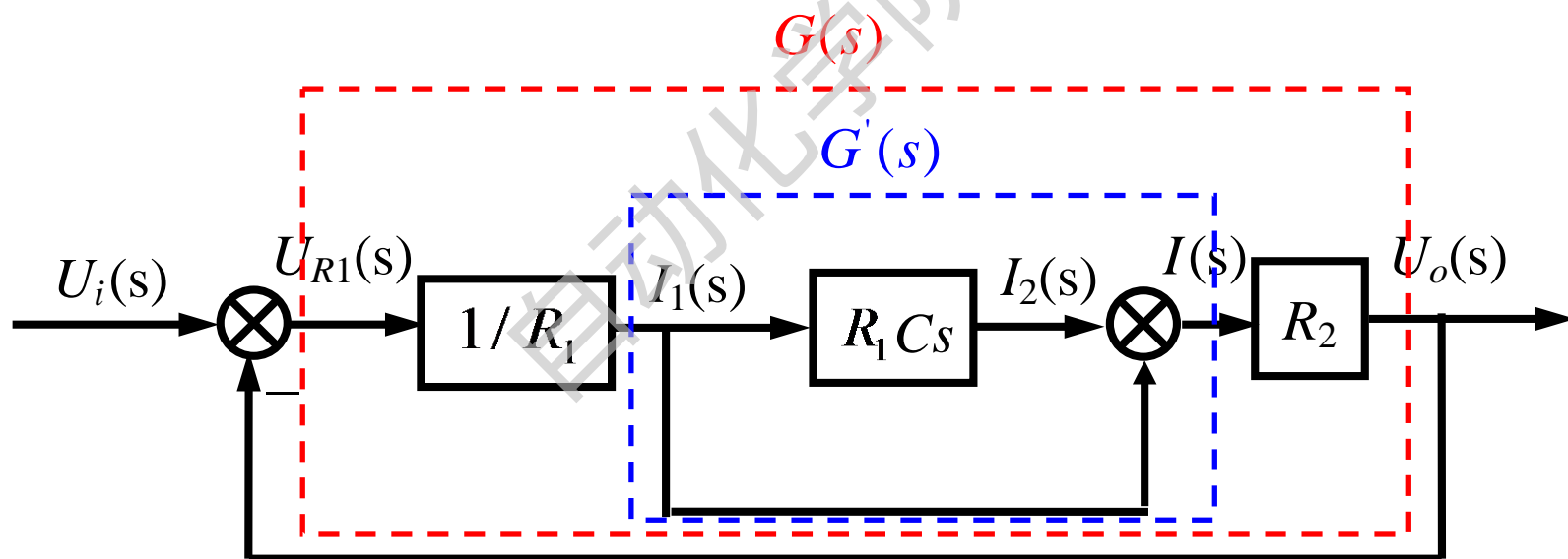
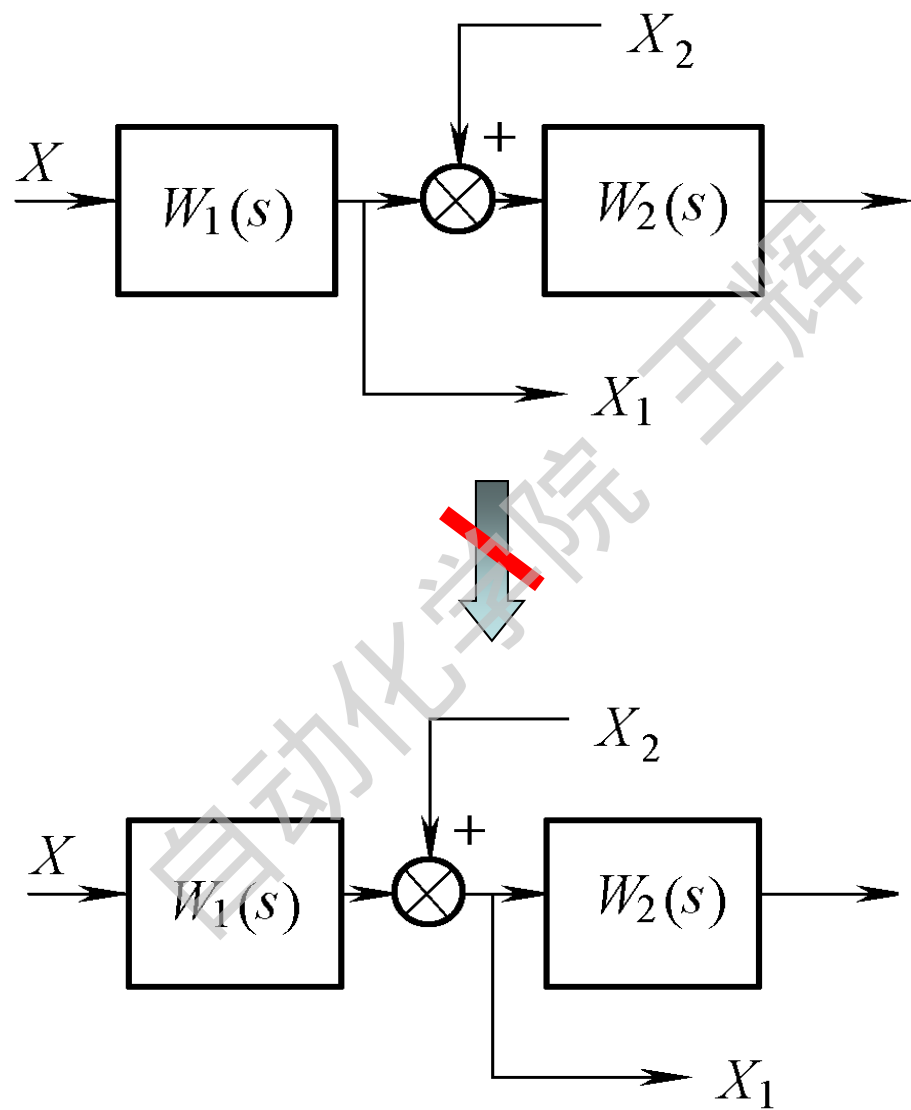
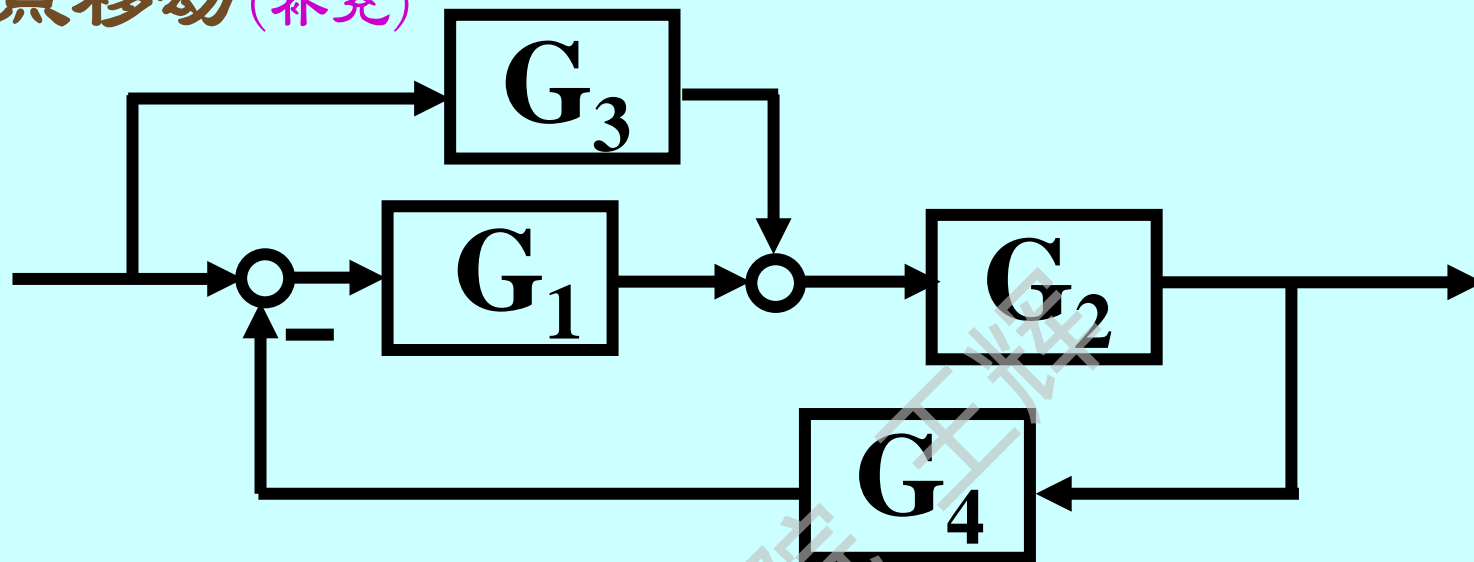


图2-24无源网络

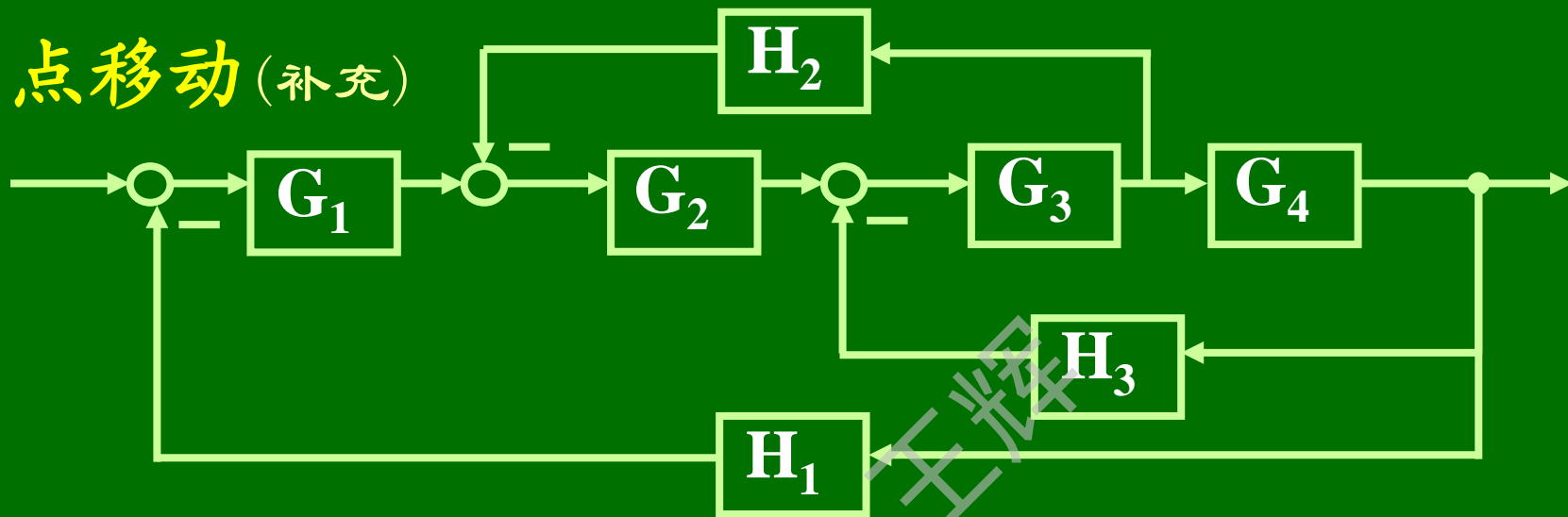


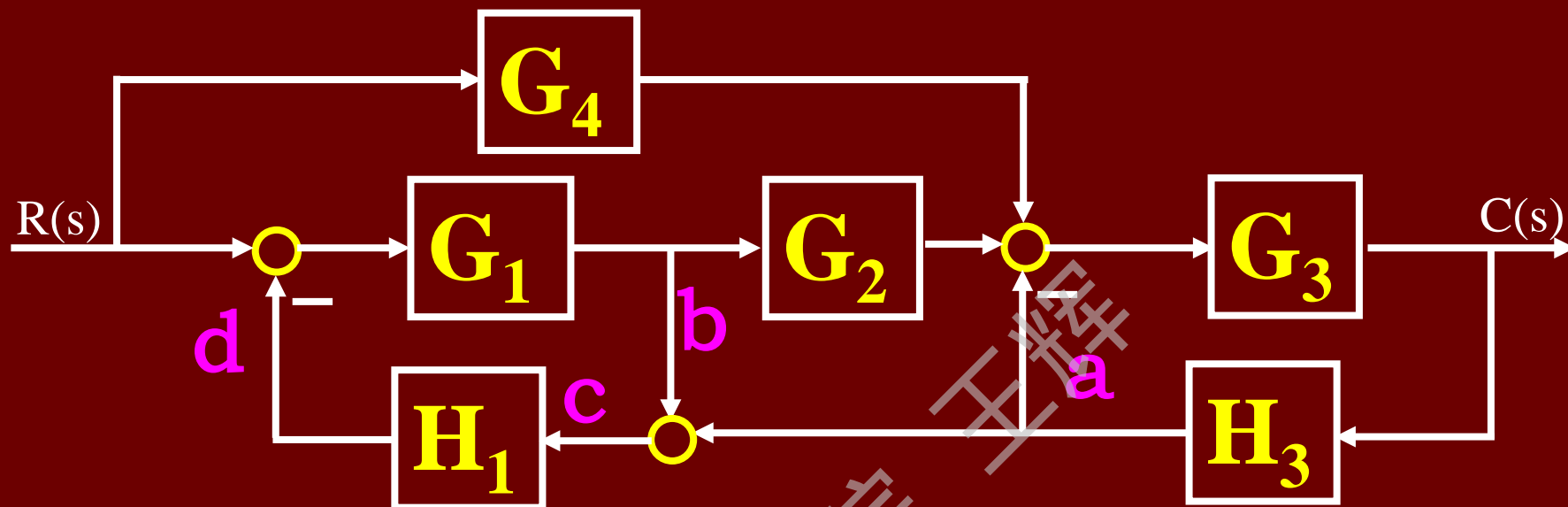


综合点移动(补充)

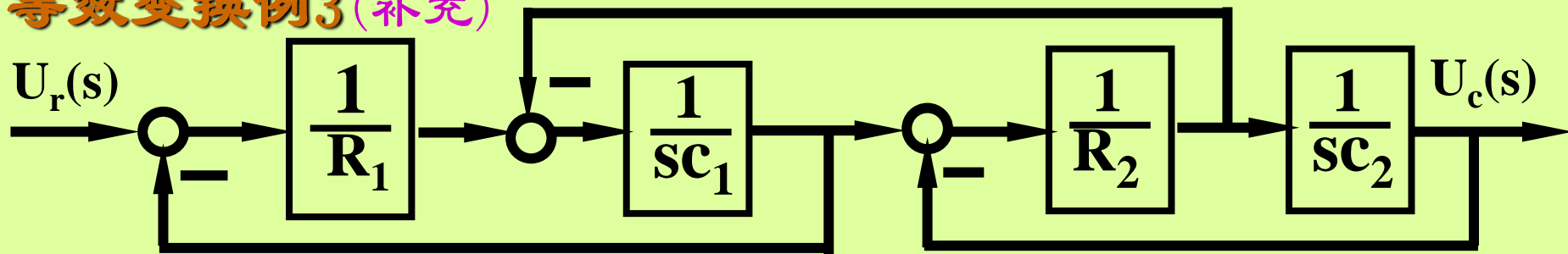


引出点移动 (补充)

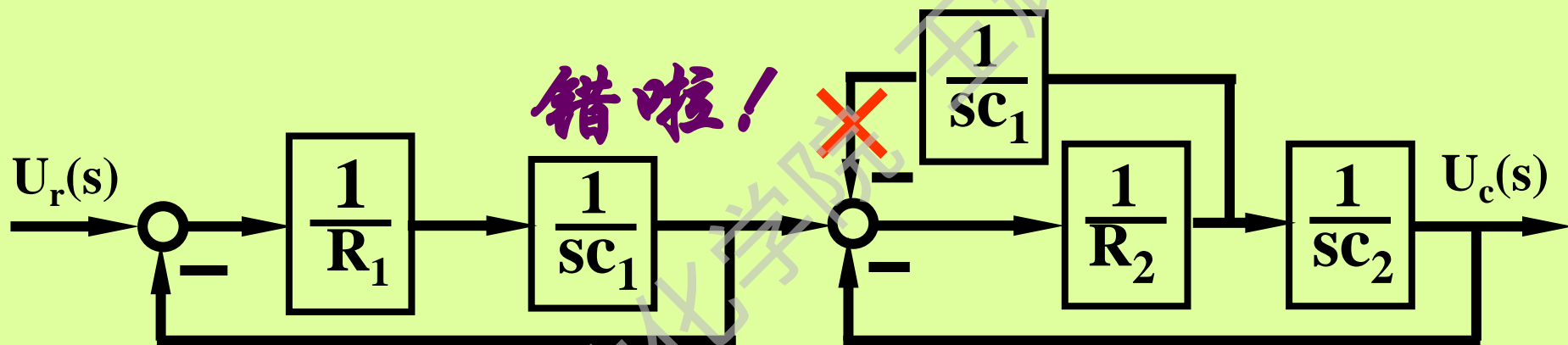




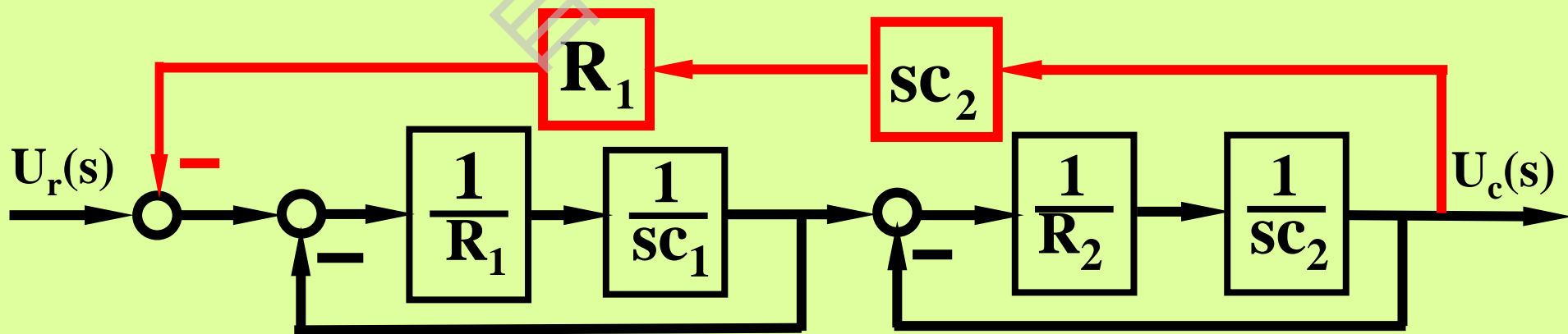
等效变换例3(补充)



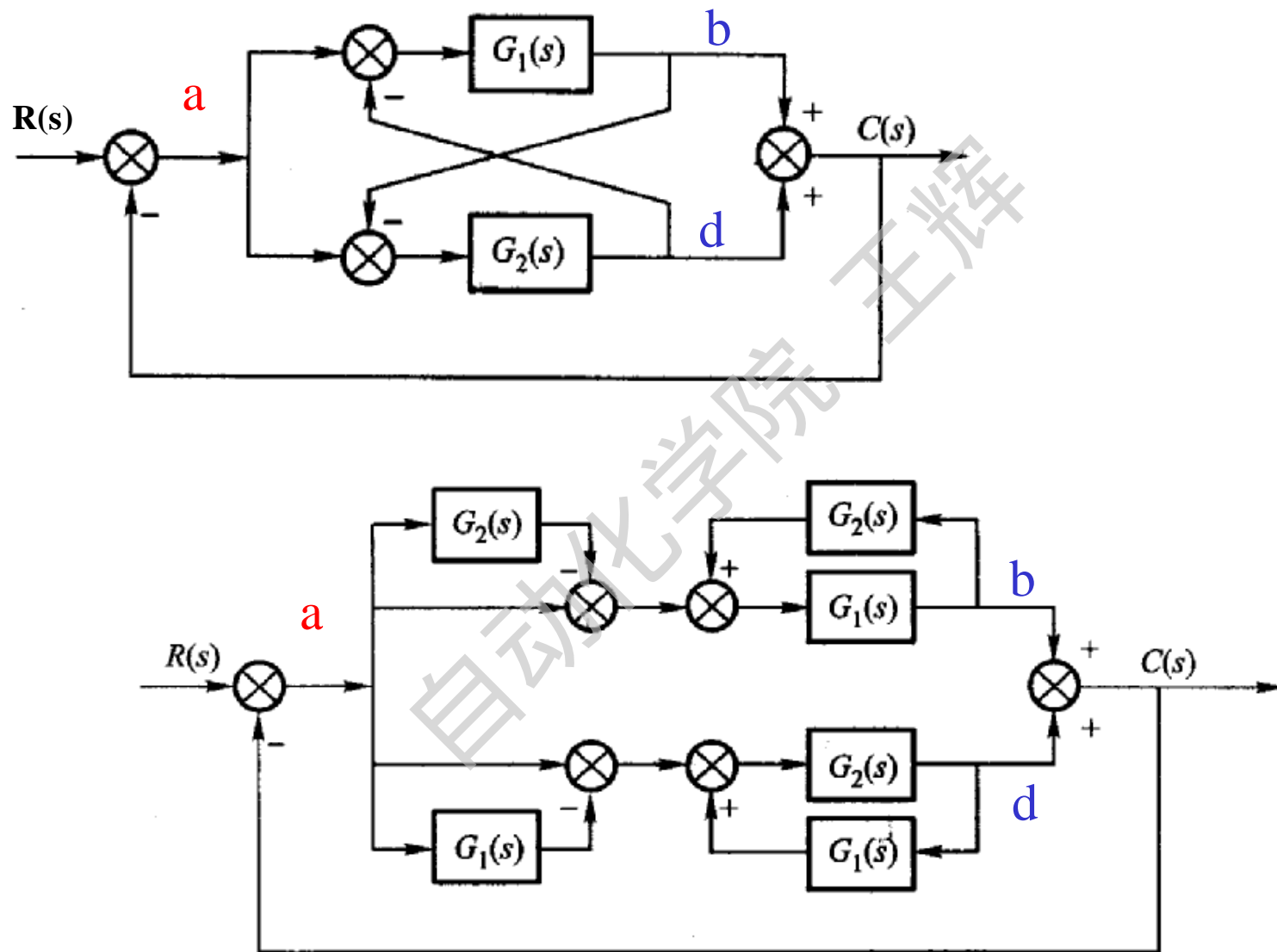
你把综合点与引出点互换位置了



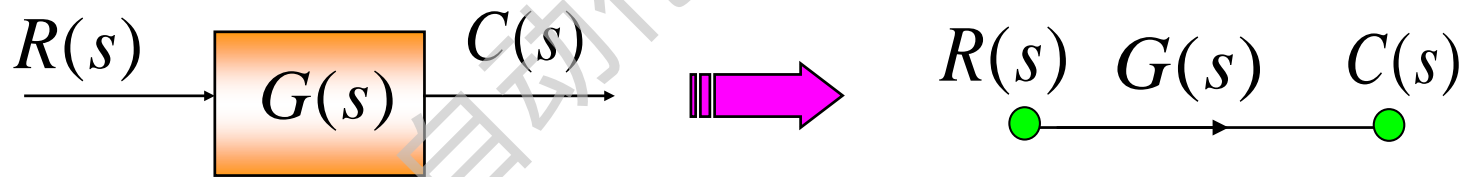
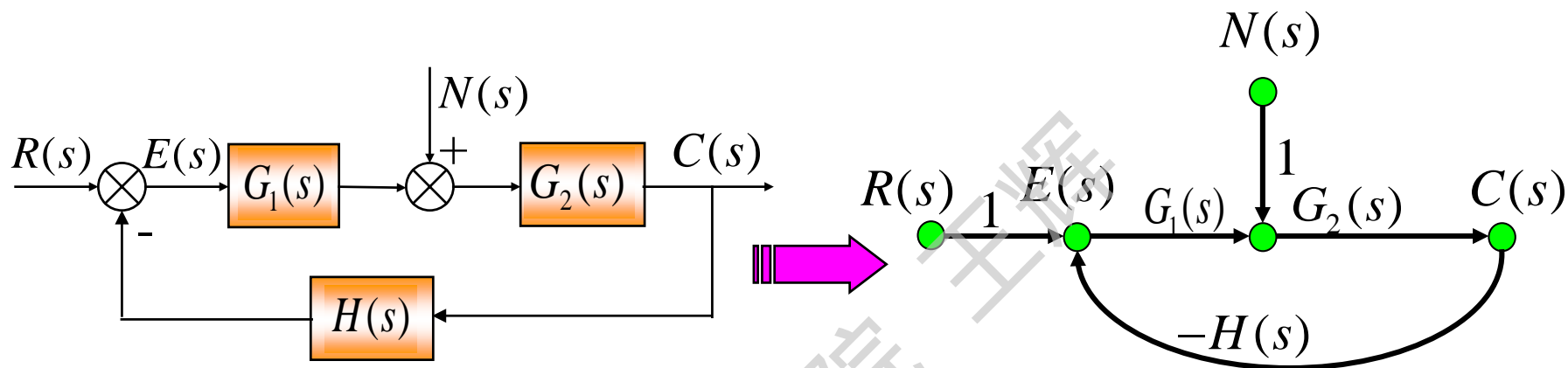
正确的等效变换：向同类移动！！



等效变换例4 (补充)



三、信号流图



节点、支路、增益 (传输)



信号流图的绘制

• 依据微分方程绘制信号流图

例2-17：绘制图2-24的信号流图。

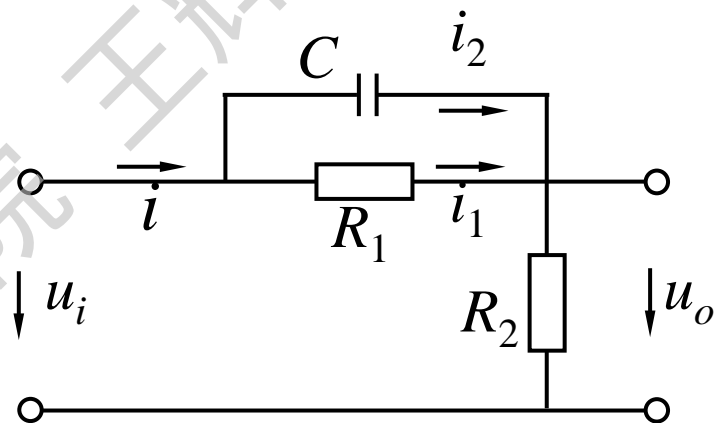
$$U_i(s) - U_o(s) = U_{R1}(s)$$

$$U_{R1}(s) \frac{1}{R_1} = I_1(s)$$

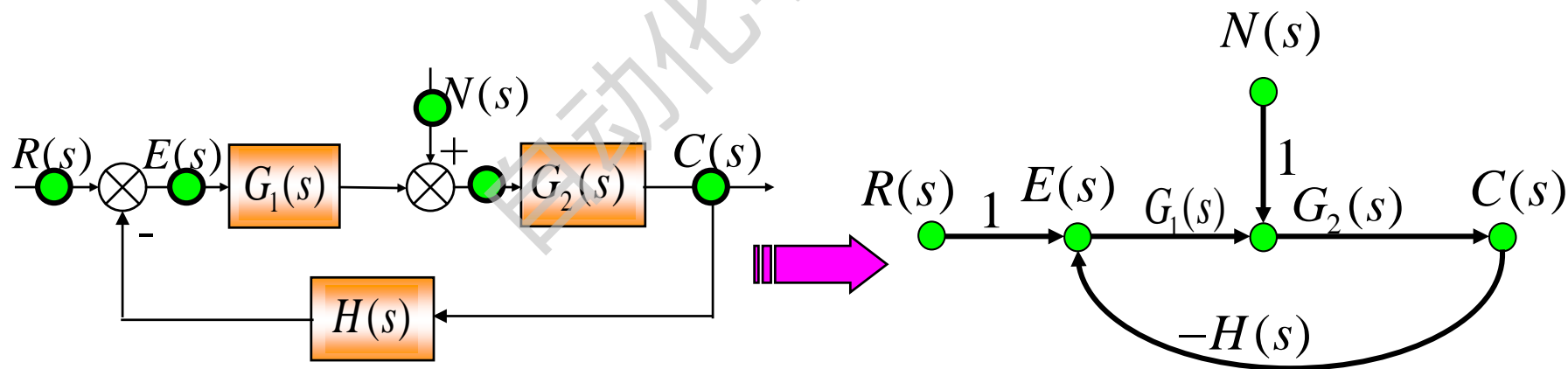
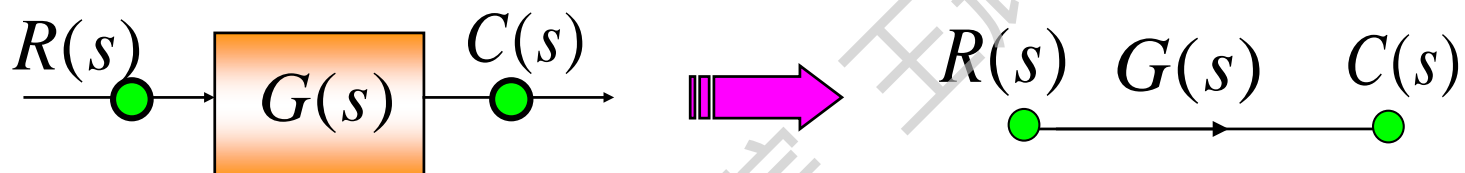
$$U_{R1}(s) C s = I_2(s)$$

$$I_1(s) + I_2(s) = I(s)$$

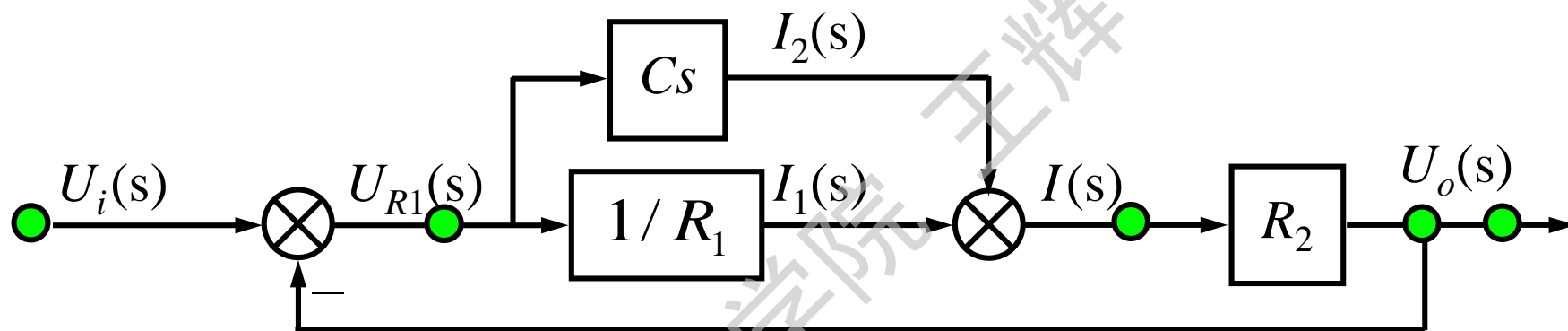
$$I(s) R_2 = U_o(s)$$



✖ 依据结构图绘制信号流图



例2-17 (图2-24) 绘制信号流图



依据结构图绘制信号流图的步骤：

确定信号流图中的节点

- ① 系统的输入为源点，输出为阱点
- ② 在结构图的主前向通路上选取节点
- ③ 反馈结构中相加点后的信号选作节点

依据信号流，用支路连接这些节点

注意支路上的正负号



例2-18 试绘制图2-44系统方框图对应的信号流图

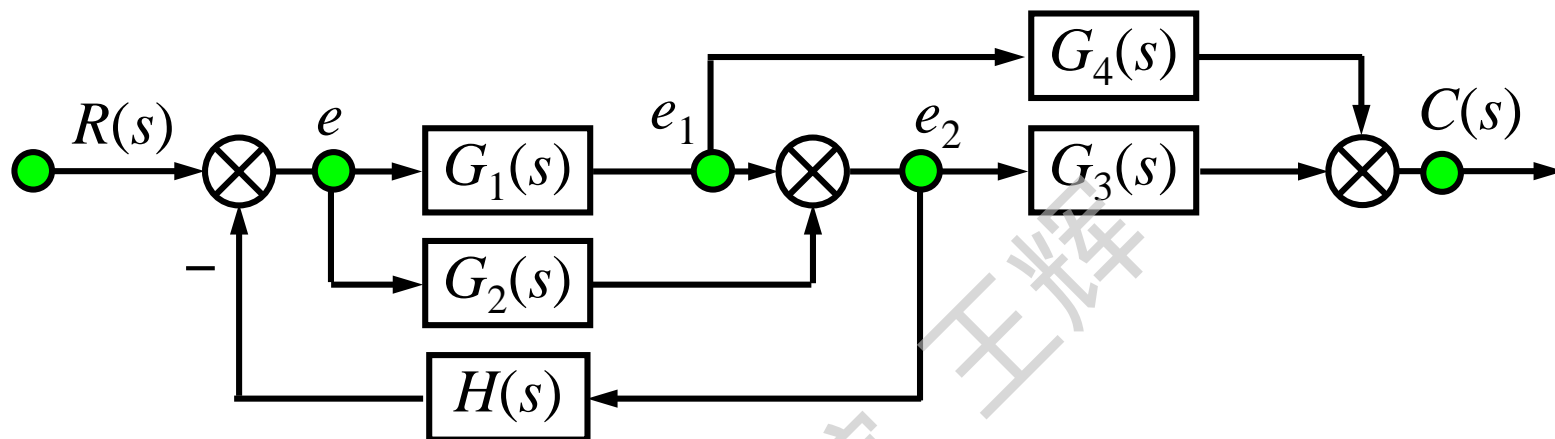
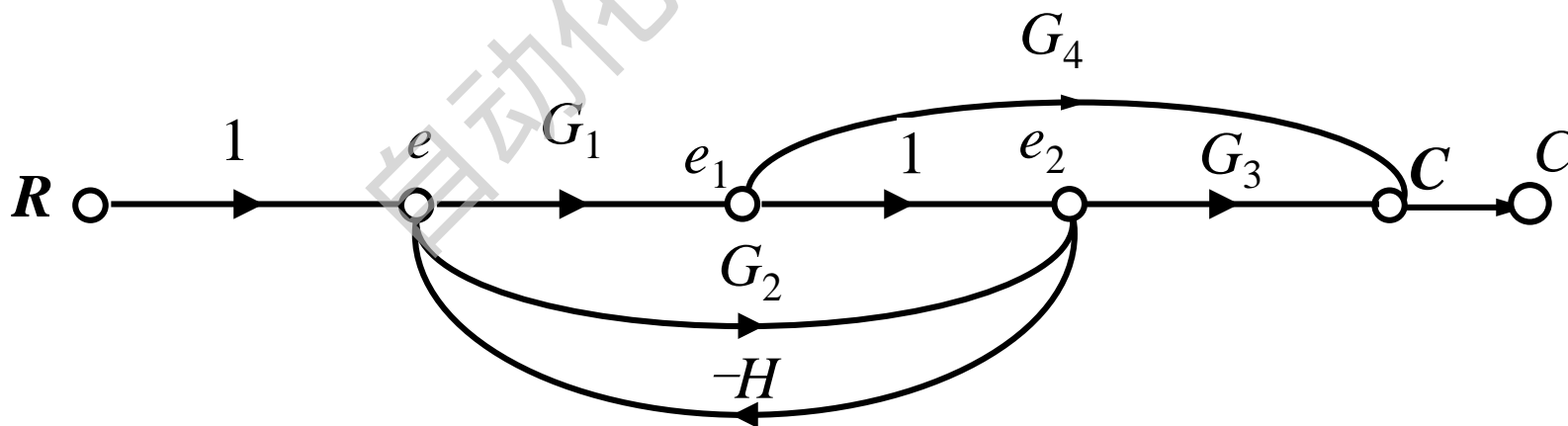


图2-44 系统方框图



※※※四 梅森公式

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$



梅森公式介绍

Δ 称为系统特征式

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - \sum L_A + \sum L_B L_C - \sum L_D L_E L_F + \dots$$

其中:

$\sum L_A$ — 所有单独回路增益之和

$\sum L_B L_C$ — 所有两两互不接触回路增益乘积之和

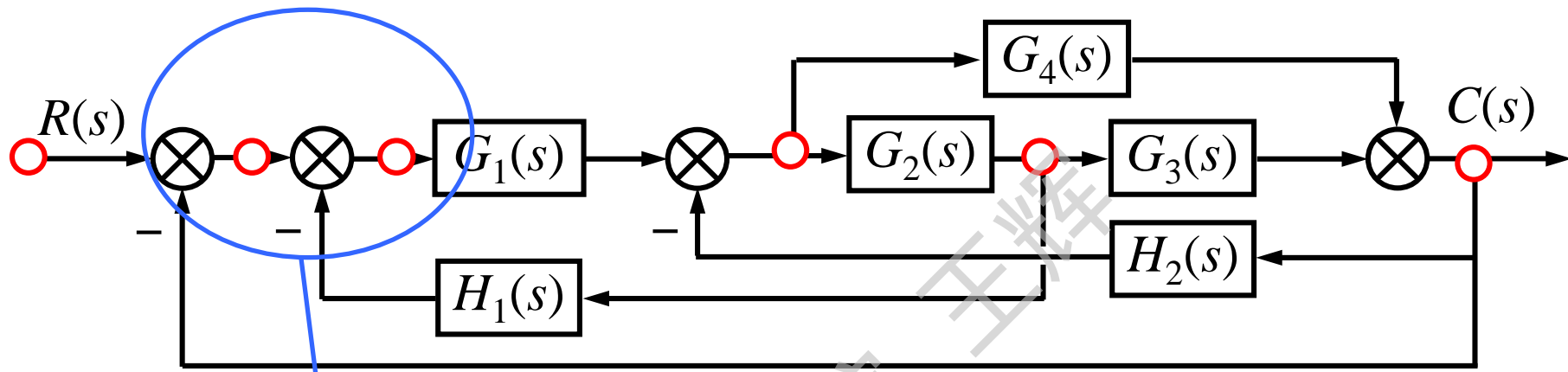
$\sum L_D L_E L_F$ — 所有三个互不接触回路增益乘积之和

P_k — 从 $R(s)$ 到 $C(s)$ 的第 k 条前向通路传递函数

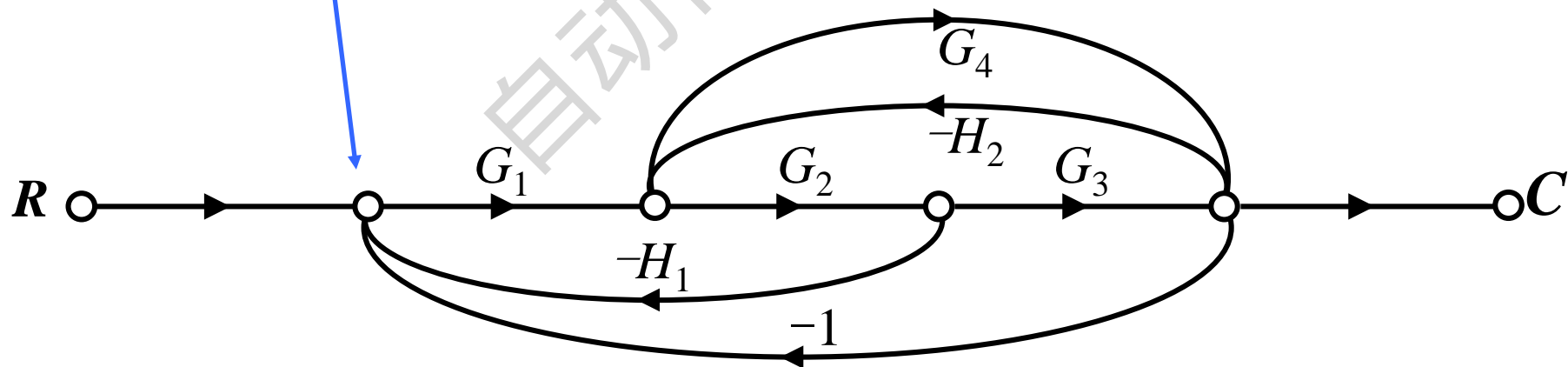
Δ_k 称为第 k 条前向通路的余子式

$$\Delta_k = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$$

例2-20 求图2-47所示系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



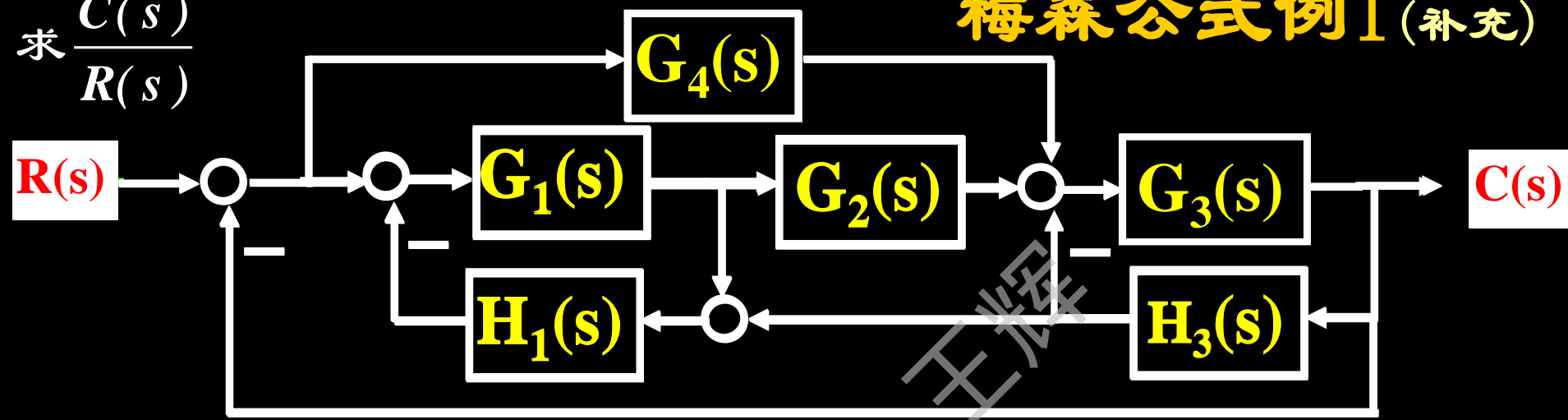
$$\Phi(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 H_2 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4} \circ$$





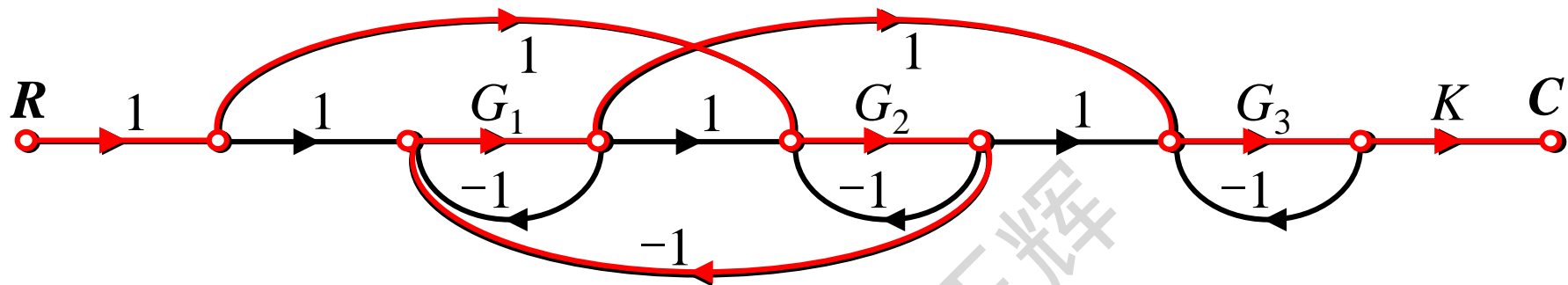
求 $\frac{C(s)}{R(s)}$

梅森公式例1 (补充)



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_4 G_3 (1 + G_1 H_1)}{1 + G_1 H_1 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_3 H_1 + G_4 G_3 + G_1 G_2 G_3 + G_1 H_1 G_3 H_3 + G_1 H_1 G_4 G_3}$$

例2-22 求图2-49信号流图的传递函数 $C(s)/R(s)$



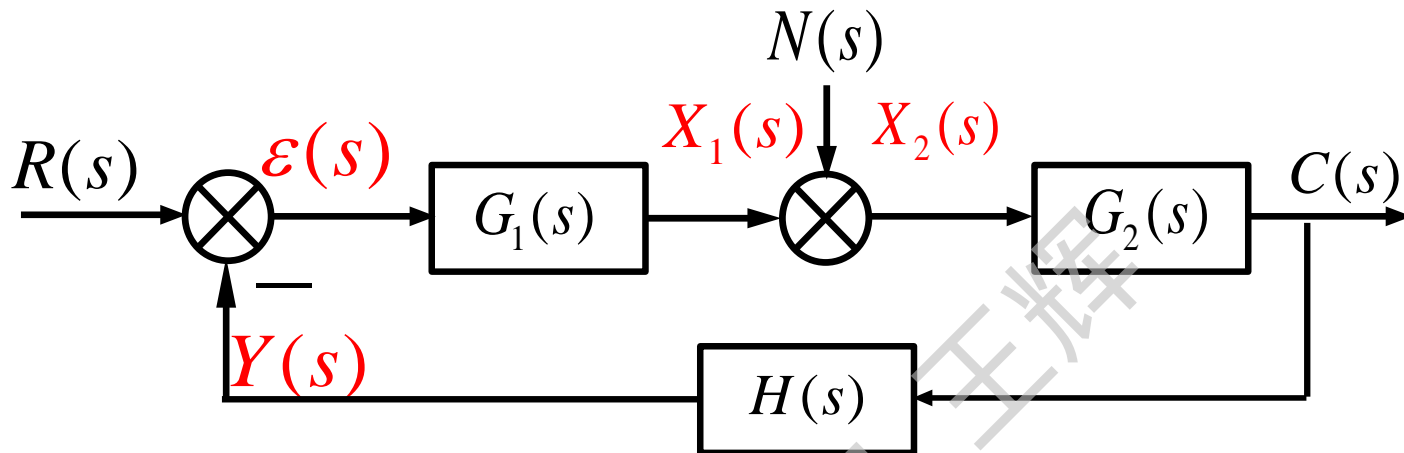
前向通道

$$P_1 = KG_1G_2G_3, \quad P_2 = KG_1G_3, \quad P_3 = KG_2G_3, \quad P_4 = -KG_1G_2G_3;$$

回路?



2-4 控制系统的传递函数



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

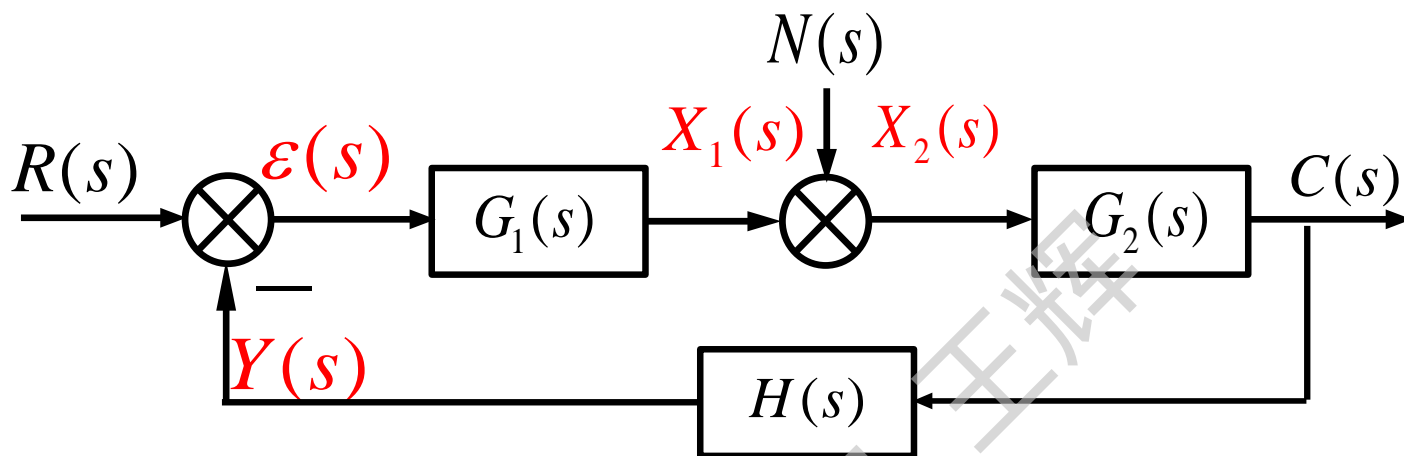
$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

1) 闭环传递函数的分母
= 1 + 开环传递函数

2) 闭环传递函数的分子
= 各自前向通道传递函数



2-4 控制系统的传递函数



$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$\Phi_{\varepsilon n}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

1) 闭环传递函数的分母
= 1 + 开环传递函数

2) 闭环传递函数的分子
= 各自前向通道传递函数

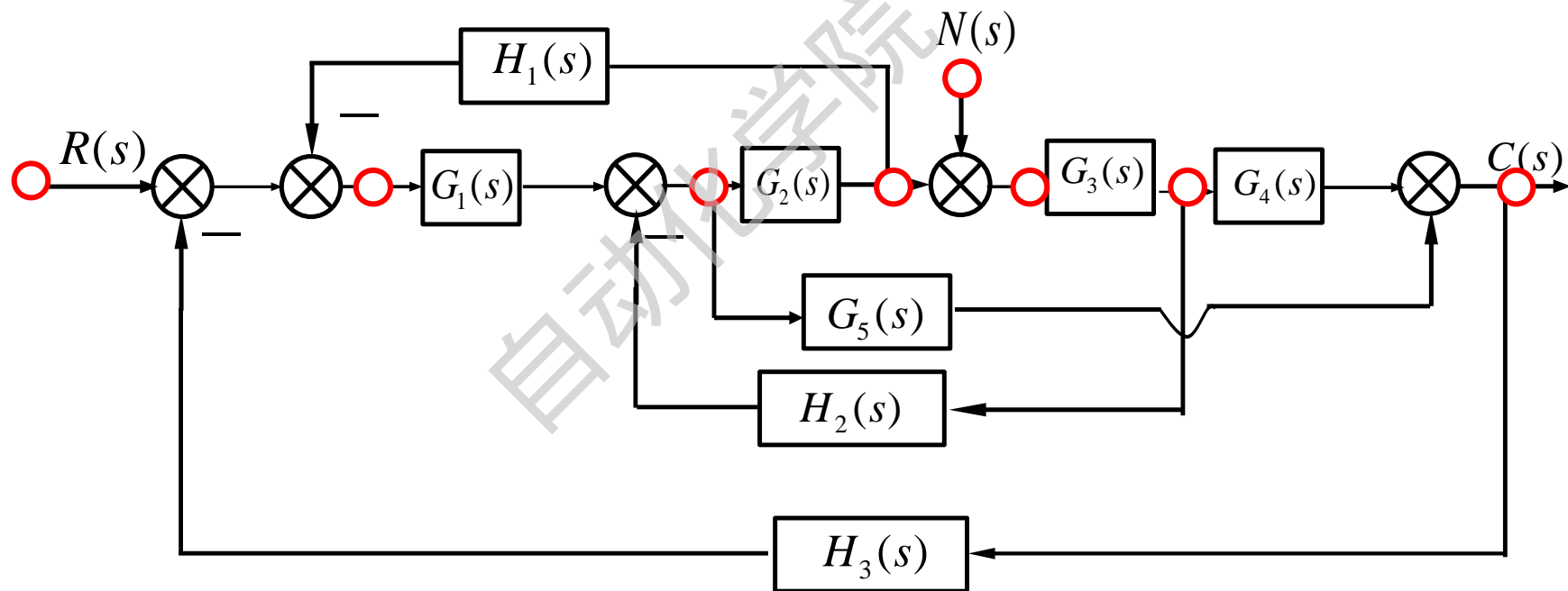


补充题：某系统如图

1) 绘制系统的信号流程图

2) 求 $\Phi(s) = C(s) / R(s)$

3) 什么条件下不受扰动的影响？

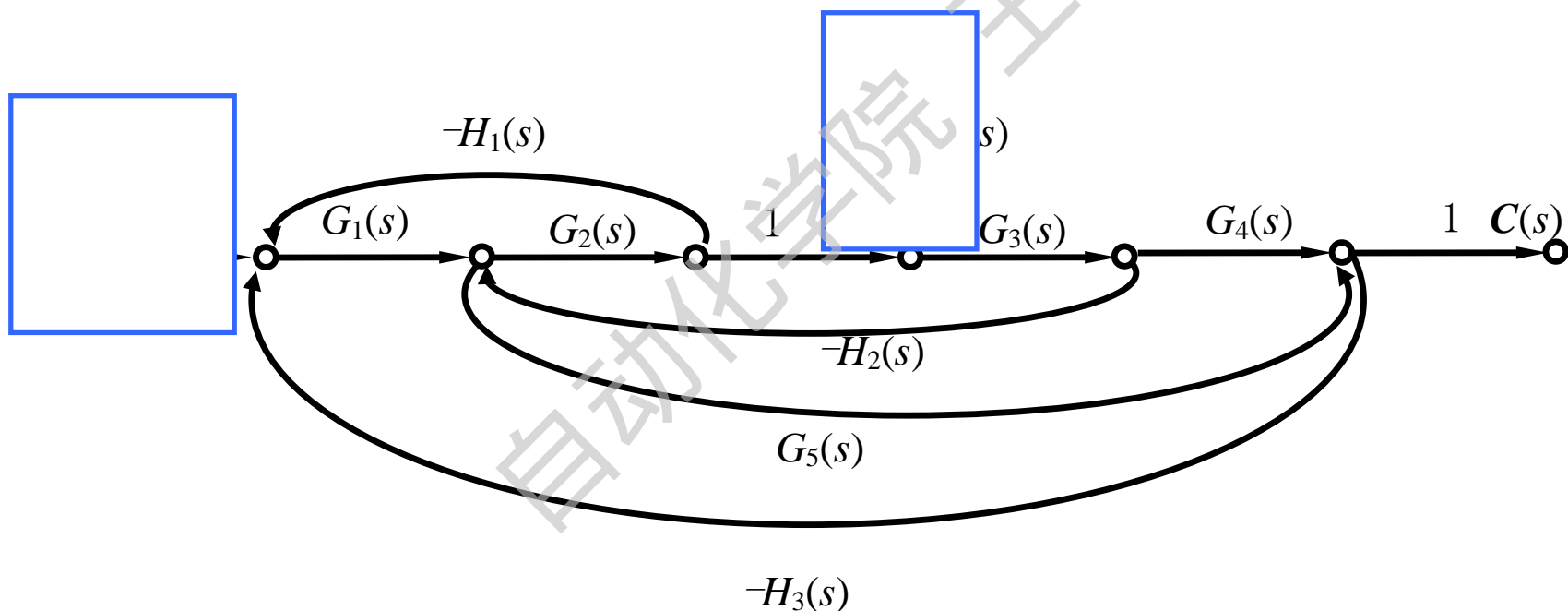


补充题：某系统如图

1) 绘制系统的信号流图

2) 求 $\Phi(s) = C(s) / R(s)$

3) 什么条件下不受扰动的影响？



$$(1 + G_1 G_2 H_1) G_3 G_4 = G_3 G_5 H_2$$



本章重点

- 理解传递函数定义
- 根据系统原理图建立系统结构图
- 掌握系统结构图等效变换法求传递函数
- 熟练掌握信号流图法求传递函数
- 熟练掌握梅森公式计算系统闭环传递函数

