

自动控制理论课程的任务与体系结构



课程的体系结构

对自动控制系统的基本要求

稳

——

稳定性

快

——

动态性能

准

——

稳态性能



第四章 线性系统的时域分析

4-1 ※系统时间响应的性能指标

动态性能 4-2 一阶系统的时域分析

4-3 ※二阶系统的时域分析

4-4 ☆ 高阶系统的时域分析

稳定性 4-5 ※线性系统的稳定性

稳态性能 4-6 ※线性系统的稳态误差计算



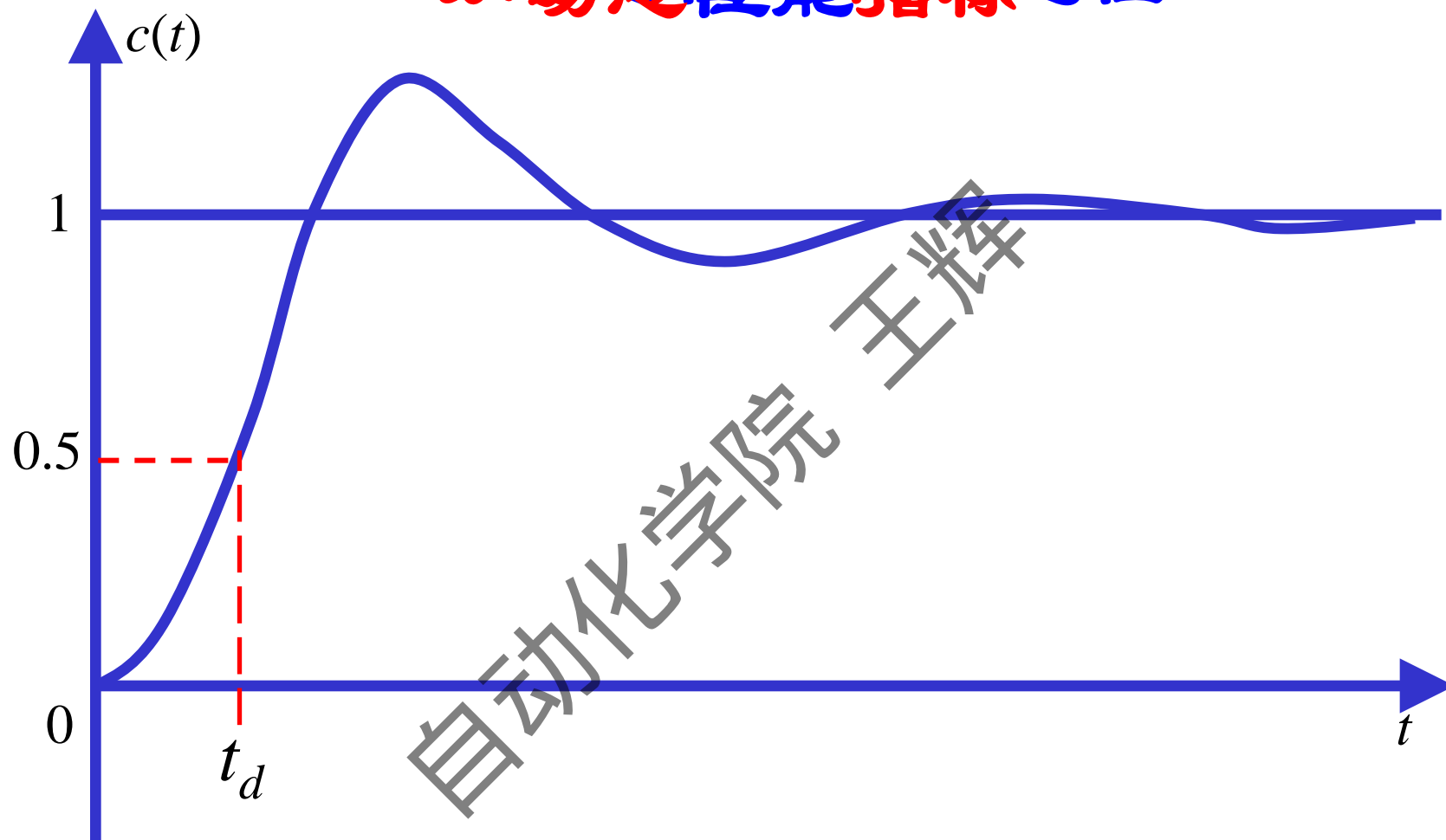
4-1 系统时间响应的性能指标

工程上典型输入信号

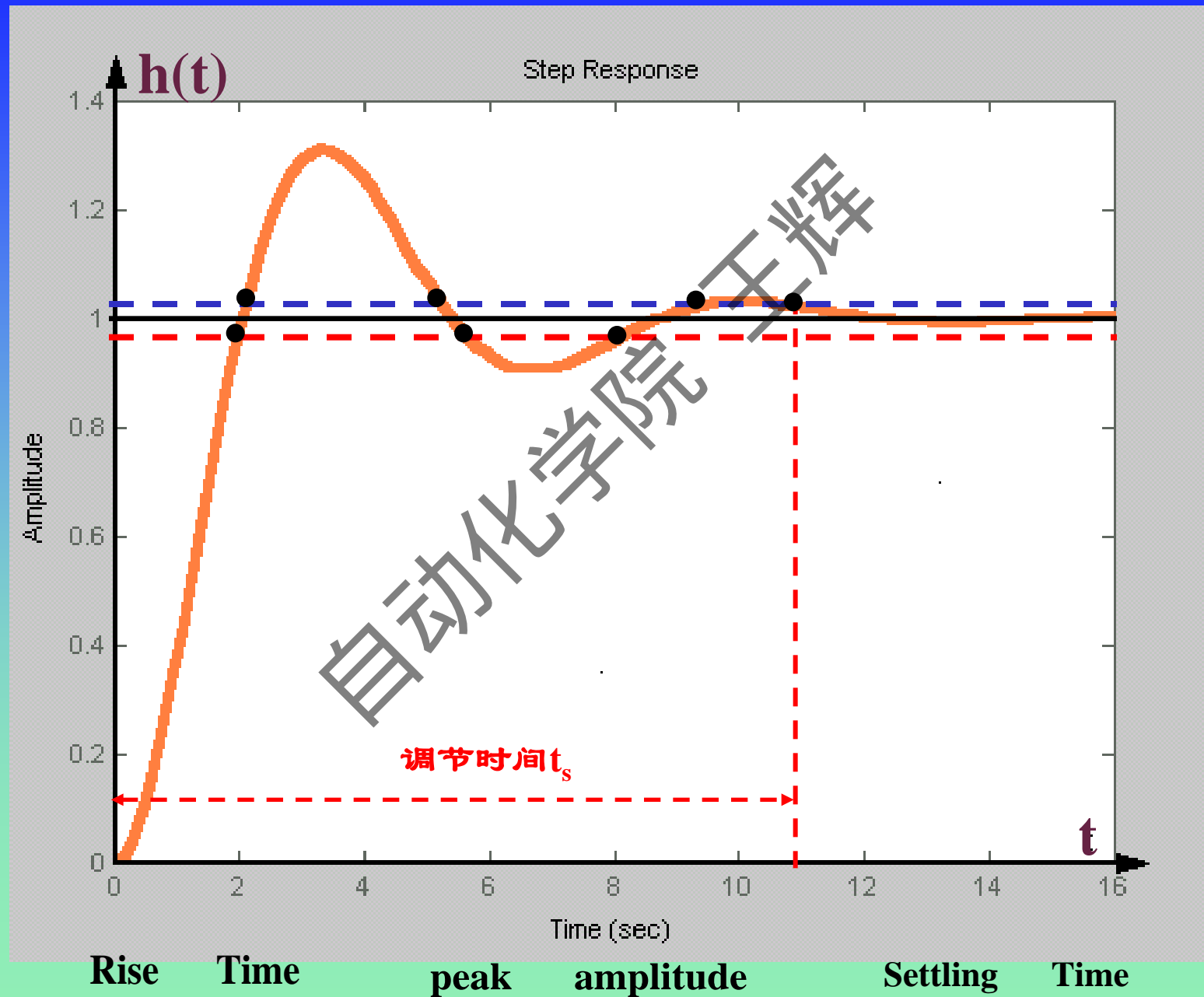
时域 $r(t)$	$t \geq 0$	复域 $F(s)$
理想单位脉冲信号	$\delta(t)$	1
单位阶跃信号	$1[t]$	$\frac{1}{s}$
单位速度信号	t	$\frac{1}{s^2}$
单位加速度信号	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
单位正弦信号	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$



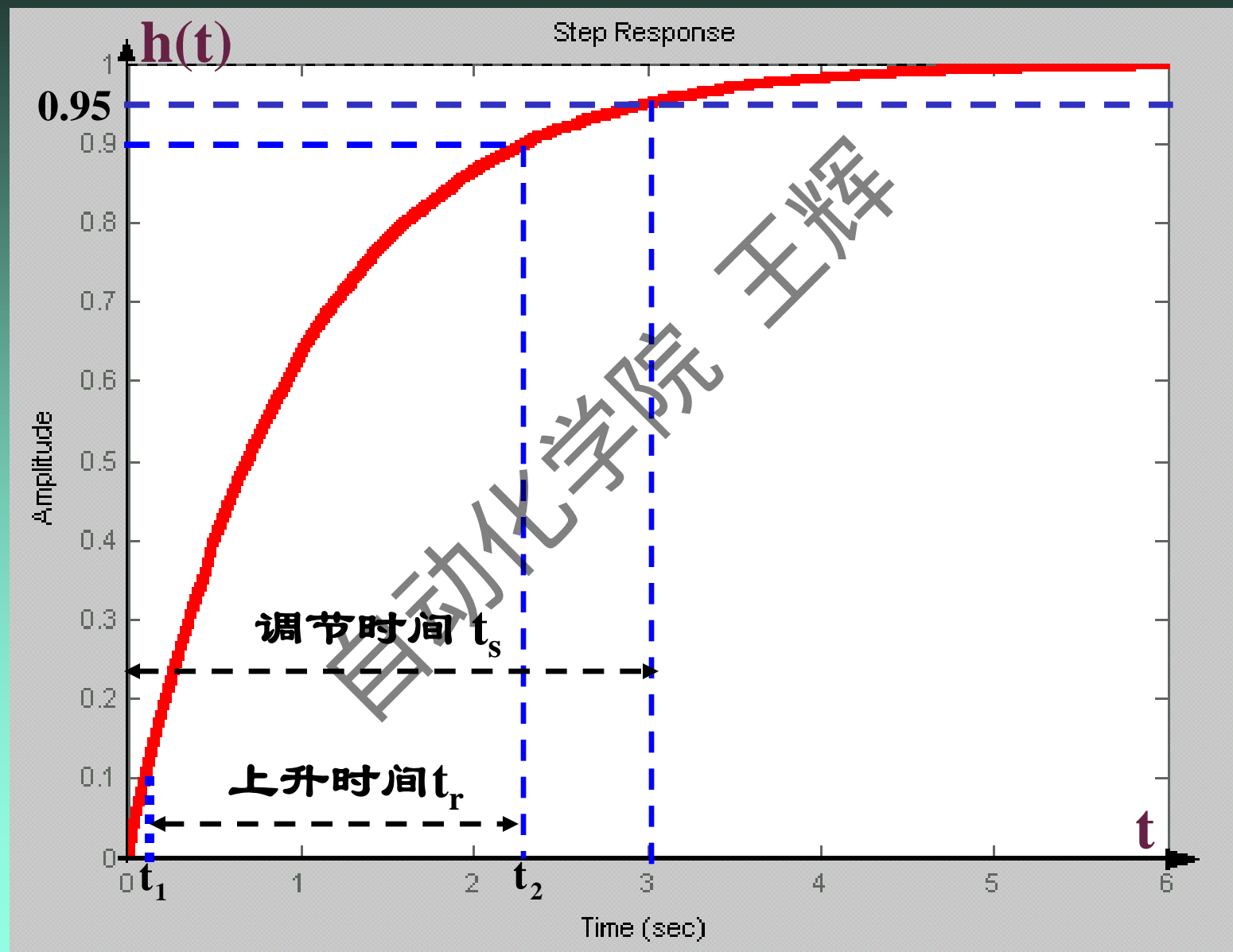
动态过程性能指标



动态性能指标定义



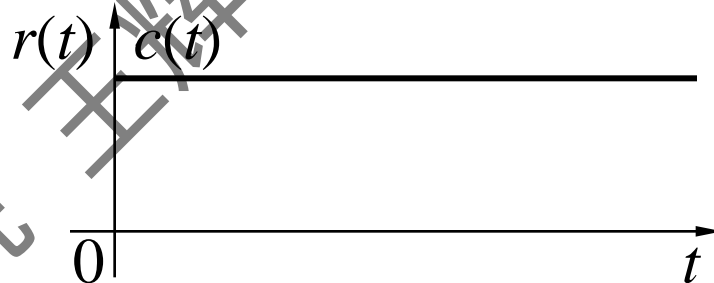
动态性能指标定义



例：理想系统的阶跃响应

$$t_d = 0; \quad t_r = 0; \quad t_p = 0;$$

$$t_s = 0; \quad \sigma_p = 0。$$

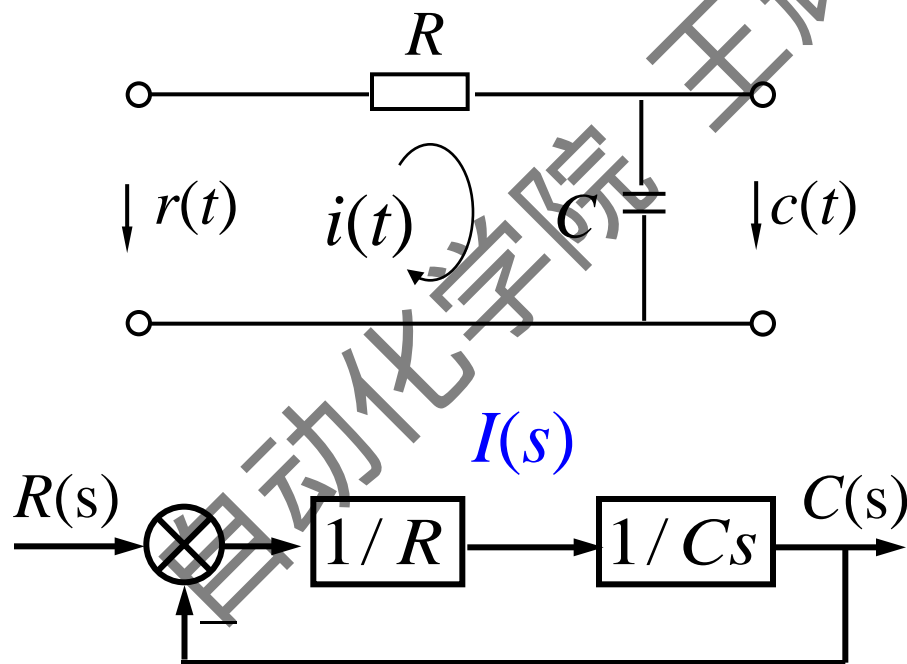


稳态误差为零。



4-2 一阶系统的时域分析

- 典型的一阶系统

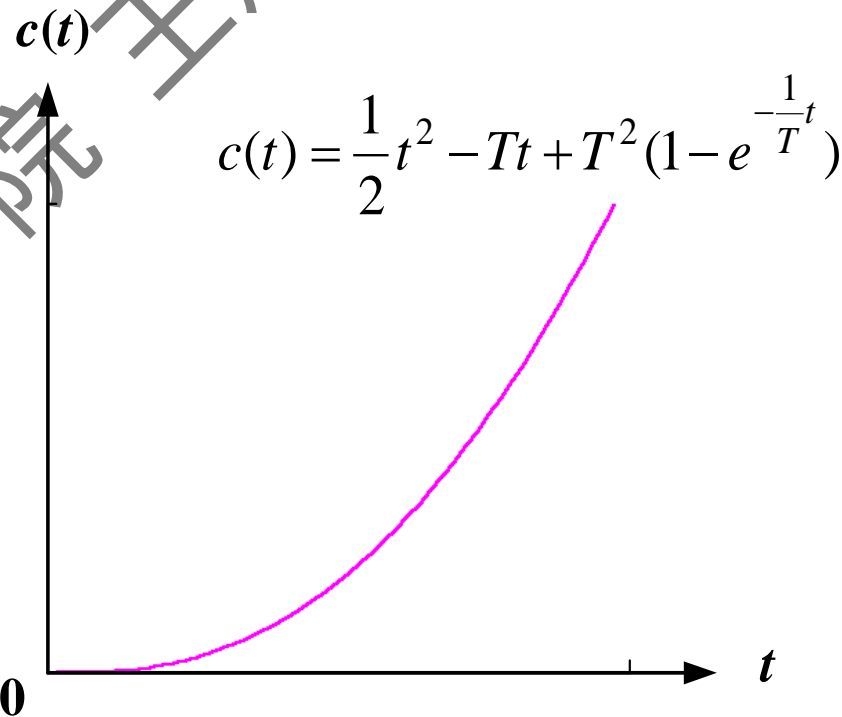


4. 一阶系统的单位加速度响应

$$r(t) = \frac{t^2}{2}$$

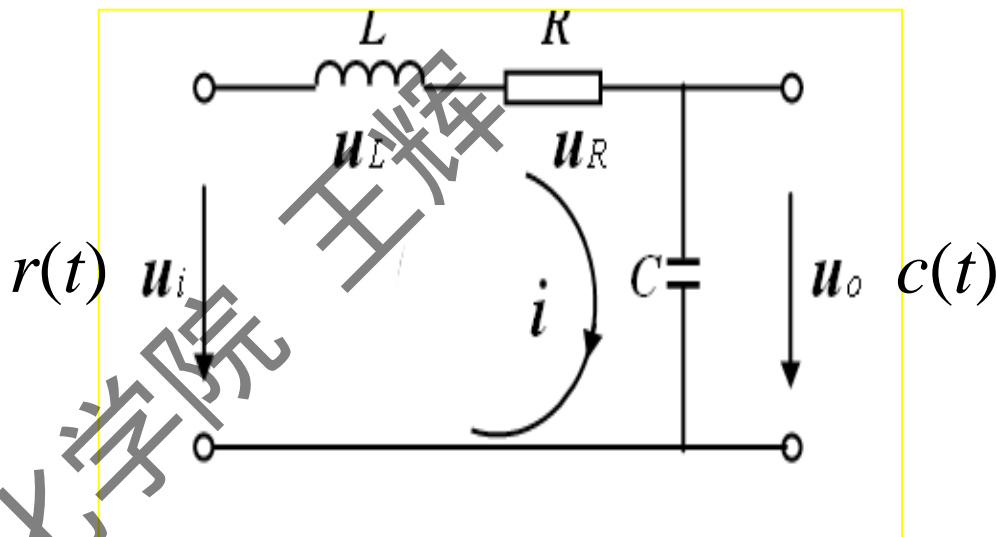
$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$e(t) = Tt - T^2(1 - e^{-t/T})$$



4-3 二阶系统的时域分析

典型的二阶系统



$$LC \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + RC \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

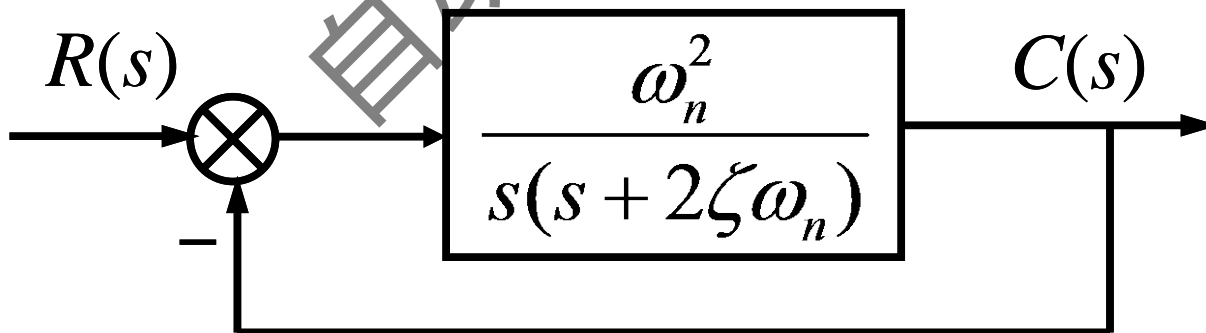


二阶系统的时域分析——模型

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ζ —— 阻尼比

ω_n —— 无阻尼自振荡频率



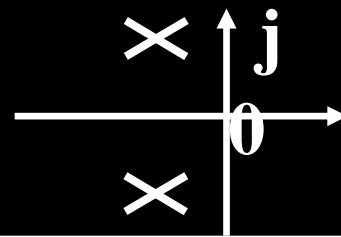
二阶系统

单位阶跃响应定性分析 (P78)

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

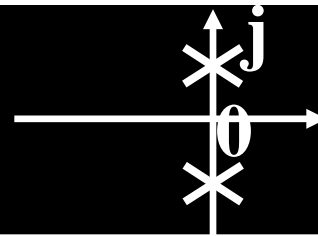
$$0 < \xi < 1$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



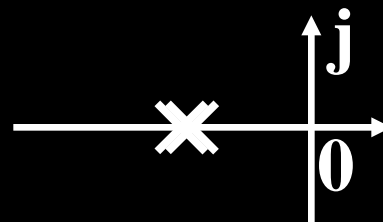
$$\xi = 0$$

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$



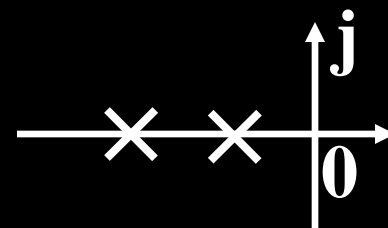
$$\xi = 1$$

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$



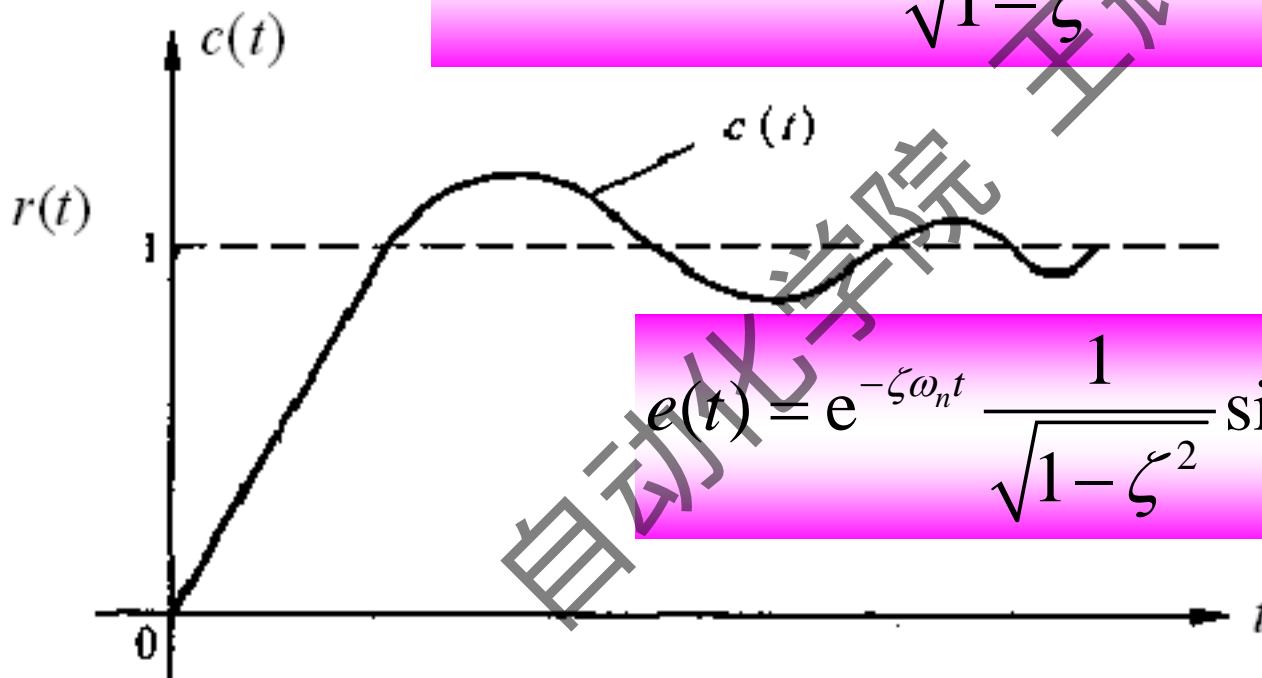
$$\xi > 1$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$



※1. 欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), t \geq 0$$



$$e(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), t \geq 0$$

欠阻尼

$$0 < \zeta < 1$$

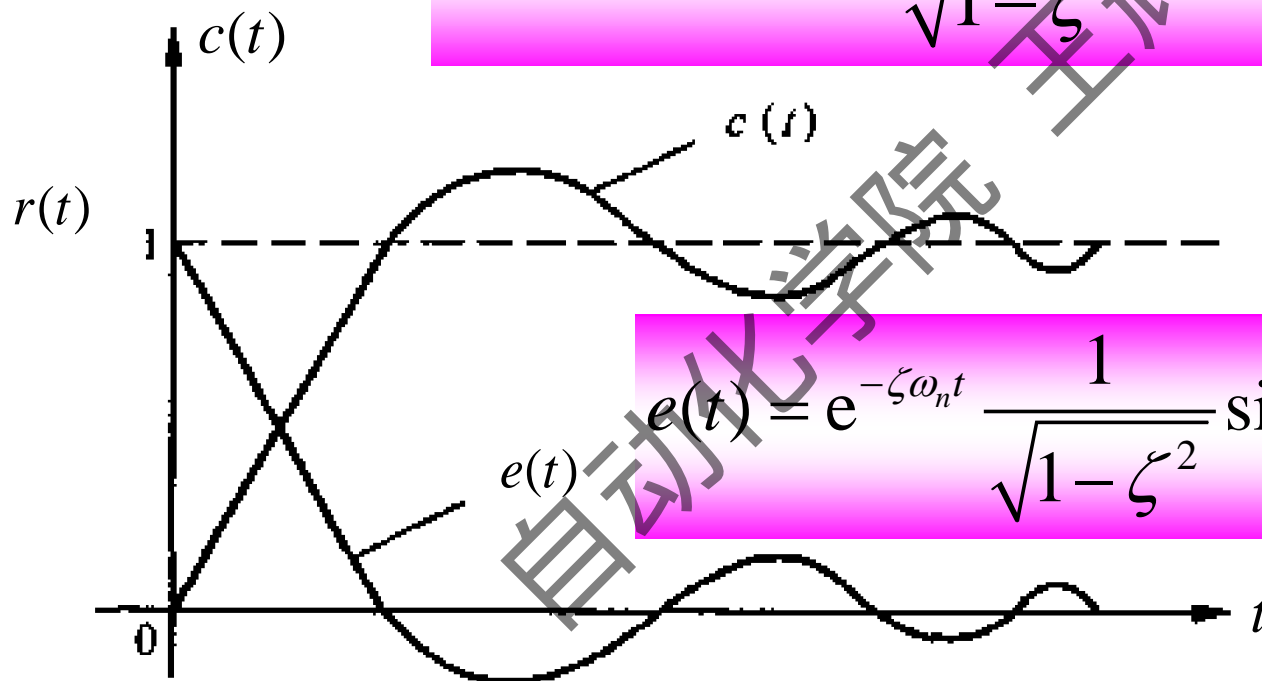
二阶系统单位阶跃响应及其误差图



哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

※1. 欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), t \geq 0$$



$$e(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), t \geq 0$$

欠阻尼 $0 < \zeta < 1$ 二阶系统单位阶跃响应及其误差图



欠阻尼二阶系统单位阶跃响应结论

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), t \geq 0$$

- 衰减正弦振荡形式
- 稳态误差趋于0
- 输出曲线的**衰减速度**取决于

$$\zeta\omega_n$$

—— **衰减系数**

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} < \omega_n$$

—— **振荡频率**

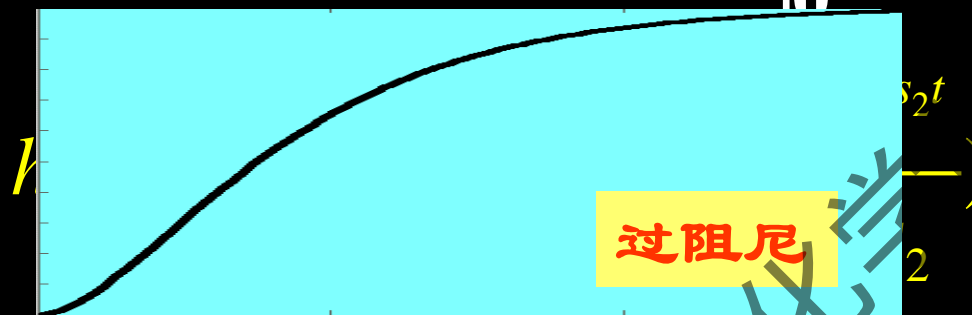
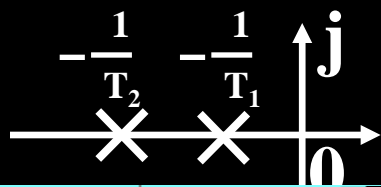


二阶系统

单位阶跃响应定性分析

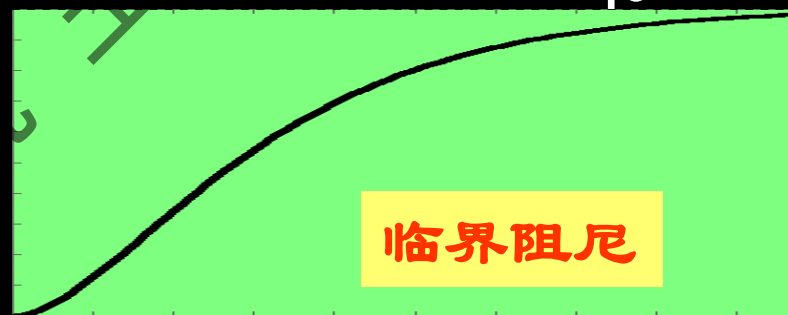
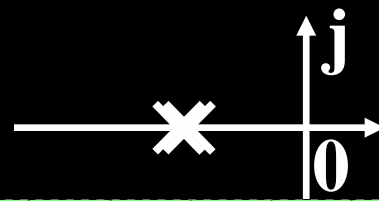
$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\xi > 1$$



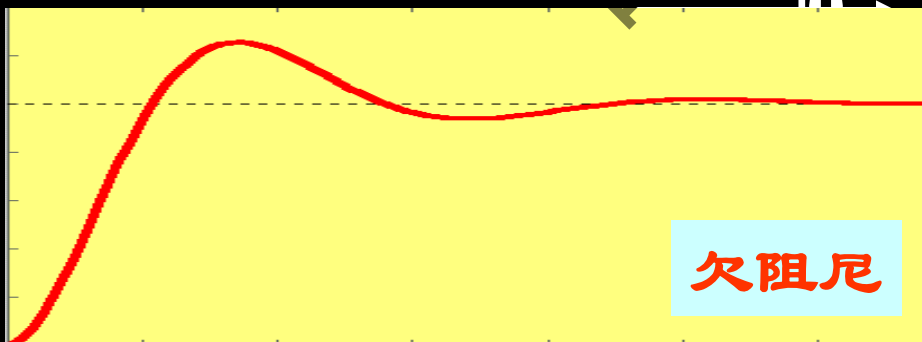
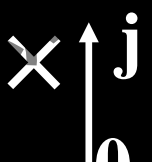
过阻尼

$$\xi = 1$$



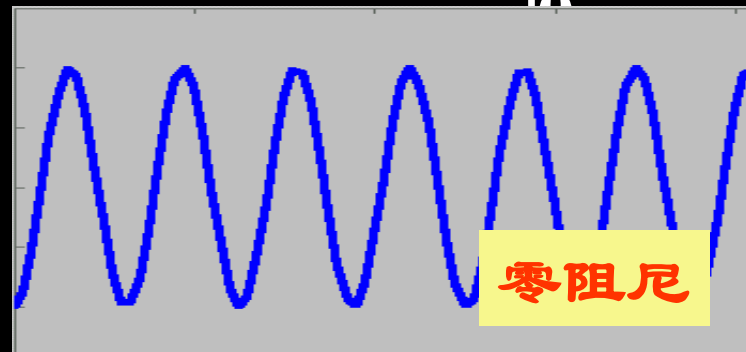
临界阻尼

$$0 < \xi < 1$$



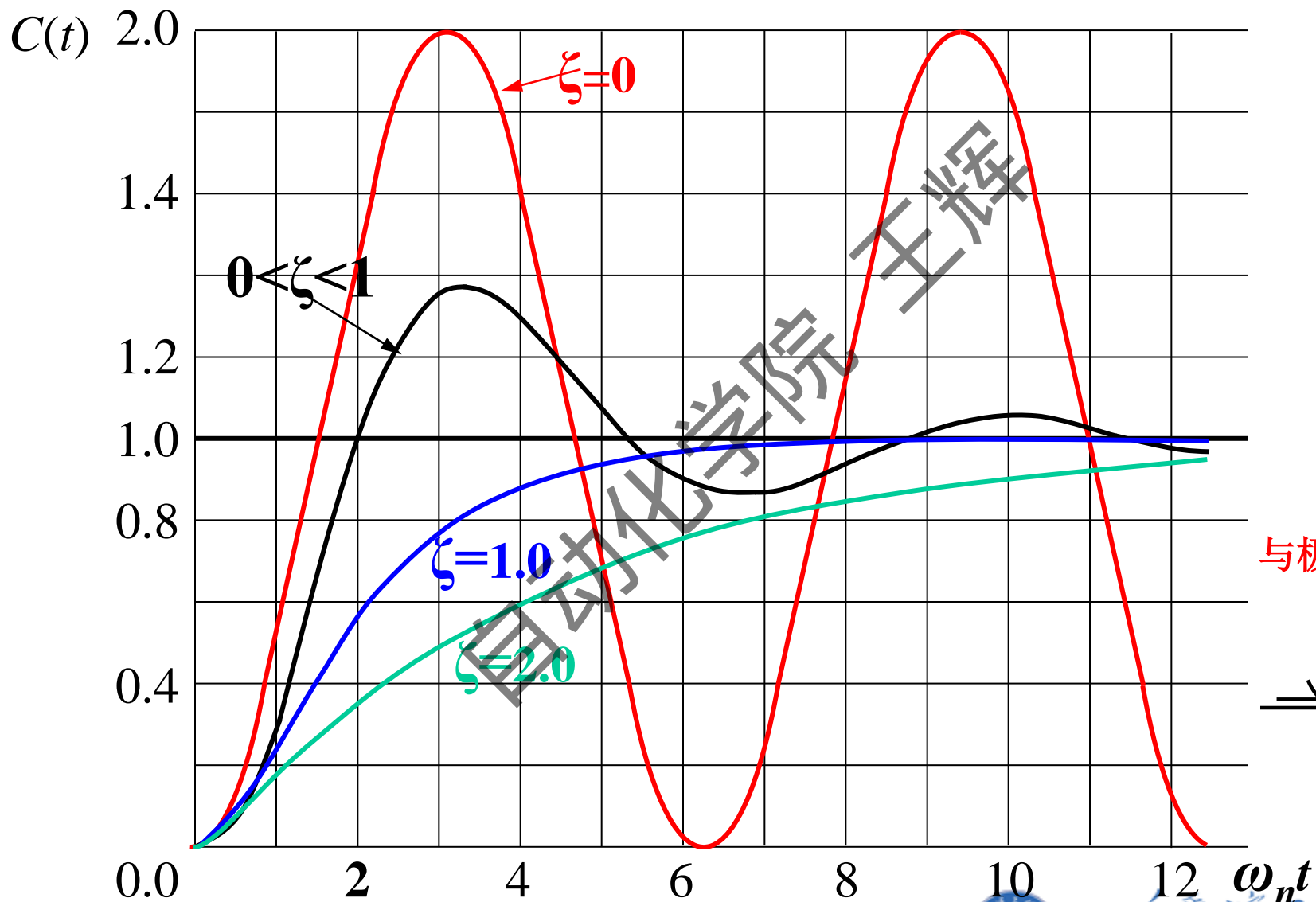
欠阻尼

$$\xi = 0$$



零阻尼

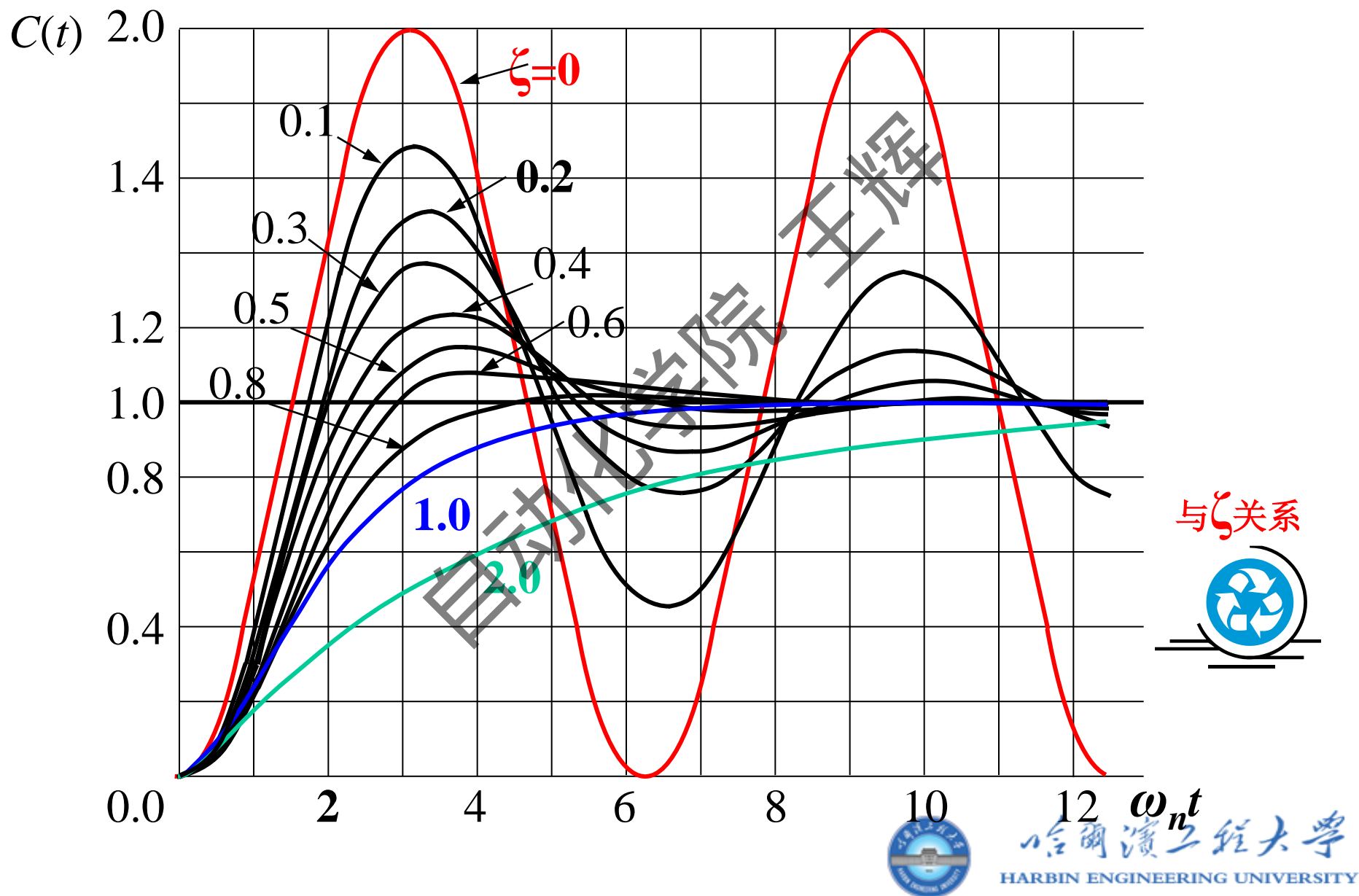
2. 二阶系统单位阶跃响应曲线类型



与极点关系



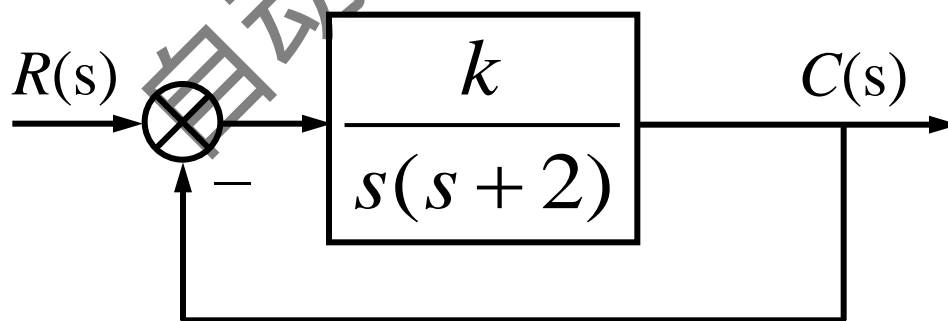
图3-10 二阶系统单位阶跃响应曲线



例:已知单位负反馈系统的开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+2)}$$

若使其单位阶跃响应无超调量，求 k 的取值范围。



欠阻尼二阶系统动态性能计算

$$t_r = ?$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

友情提醒 : $\cos \beta = \xi$, 所以 $\beta = \cos^{-1} \xi$

$$t_p = ?$$

$$\text{得 } t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

欠阻尼二阶系统动态性能计算

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

$$\text{由 } \sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

$$\sigma_p = ?$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$

$$\text{或 } \sigma\% = e^{\frac{-\pi}{\text{tg}\beta}} \times 100\%$$

二阶系统单位阶跃响应性能指标

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\sigma_p \% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}, \Delta = 0.02,$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}, \Delta = 0.05$$

$$N = \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}, \Delta = 0.02$$

$$N = \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi\zeta}, \Delta = 0.05$$



例3-1 系统结构如图3-15所示

若要求系统指标为

$$\sigma_p = 20\% ; \quad t_p = 1s ;$$

试确定系统参数 K 和 τ ,

并计算特征量 t_s , t_d , t_r , N 。

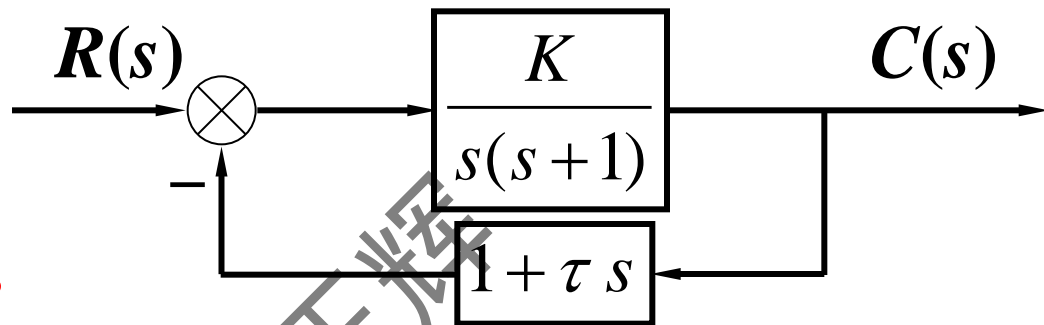


图3-15 控制系统结构图

$$\zeta = 0.456 ;$$

$$\omega_n = 3.53(\text{rad}/s) ;$$

$$K = 12.46 ;$$

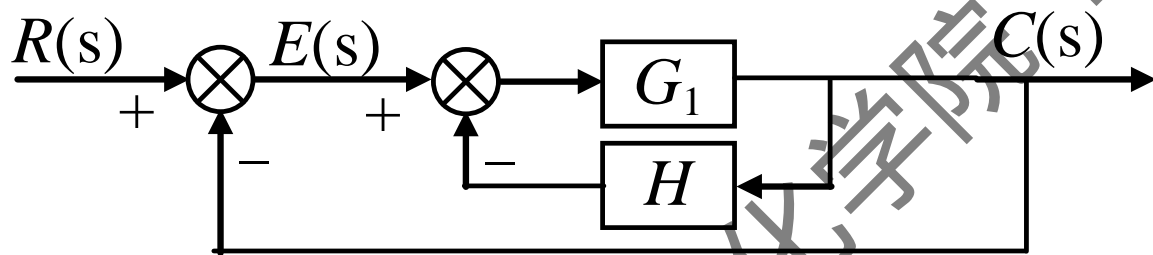
$$\tau = 0.178s$$



已知控制系统如图, 1) 确定使闭环系统具

有 $\zeta = 0.7$ 及 $\omega_n = 6 \text{ (rad/s)}$ 的 k 和 τ 值;

2) 计算系统响应阶跃输入时的超调量 σ_p 和峰值时间 t_p



$$G_1(s) = \frac{k}{s(s+6)}; H(s) = \tau s$$

$$k = 36$$

$$\tau = 0.067$$

$$\sigma_p = 4.6 \%$$

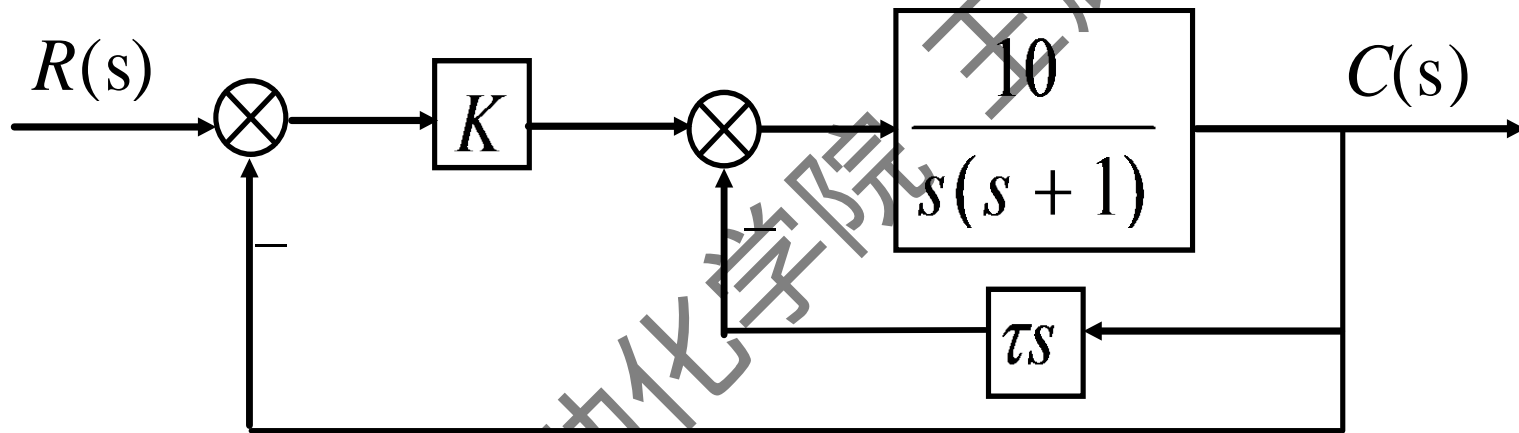
$$t_p = 0.733$$

$$\Phi(s) = \frac{k}{s^2 + (6 + k\tau)s + k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



已知控制系统的结构图如下图所示，单位阶跃响应的超调量 $\sigma_p = 9.5\%$ ，峰值时间 $t_p = 1\text{ s}$

试求：1) 根据已知性能确定参数 k 和 τ



$$\begin{cases} \zeta = 0.6 \\ \omega_n = 3.93 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1.54 \\ \tau = 0.37 \end{cases}$$

$$\sigma_p = 16.3\% \rightarrow \zeta = 0.5$$



四、二阶系统的单位脉冲响应

1) 无阻尼 ($\zeta = 0$) 脉冲响应

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

$$c(t) = \omega_n \sin(\omega_n t), t \geq 0$$

输出为等幅振荡形式(无阻尼响应)



2) 欠阻尼 ($0 < \zeta < 1$) 脉冲响应

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t, t \geq 0$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

输出为衰减振荡形式(欠阻尼响应)



二阶系统的单位脉冲响应

3) 临界阻尼 ($\zeta = 1$) 脉冲响应

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, t \geq 0$$

输出为无振荡衰减形式(临界阻尼响应)

4) 过阻尼 ($\zeta > 1$) 脉冲响应

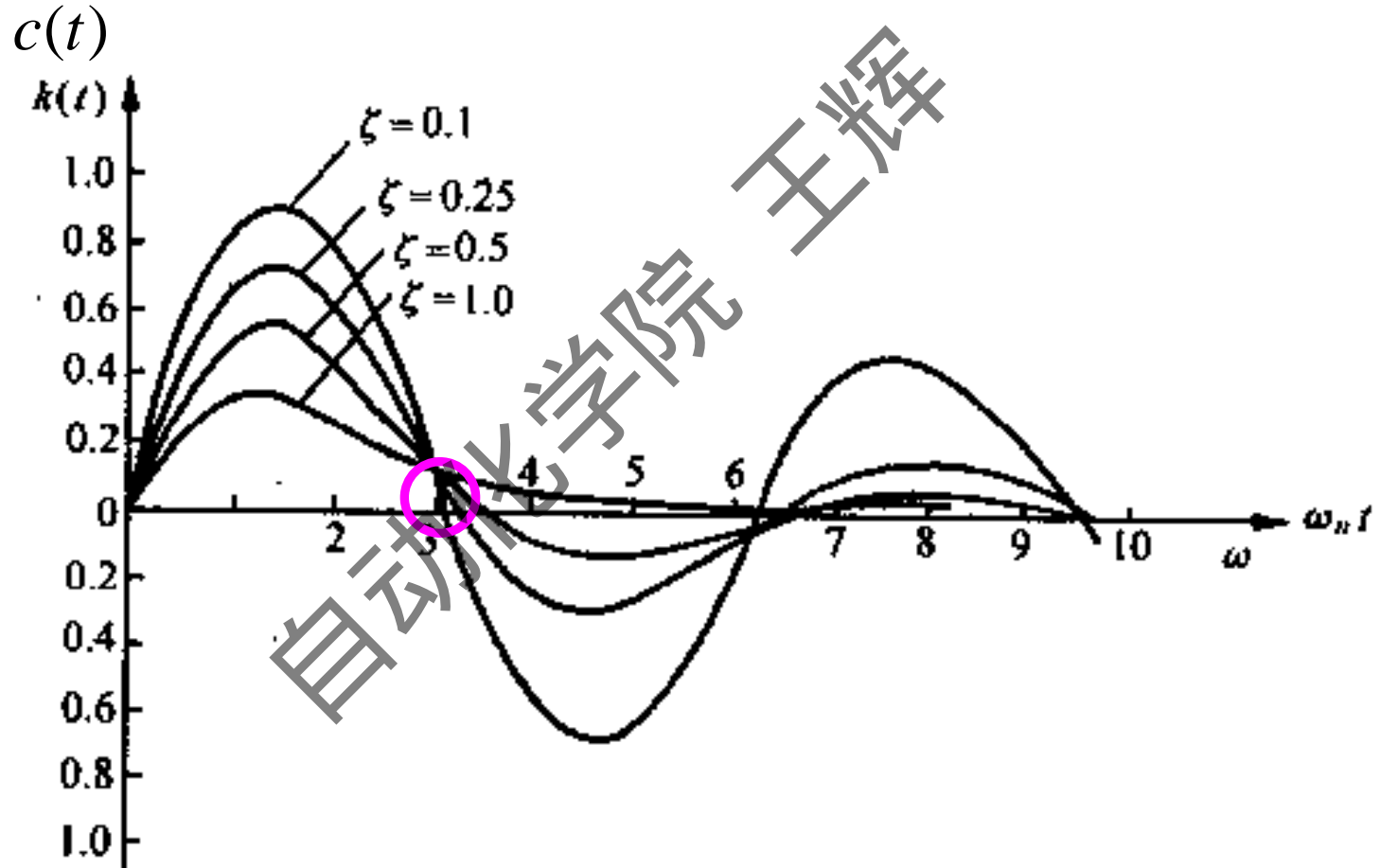
$$s_1 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}), t \geq 0$$

输出为无振荡衰减形式(过阻尼响应)

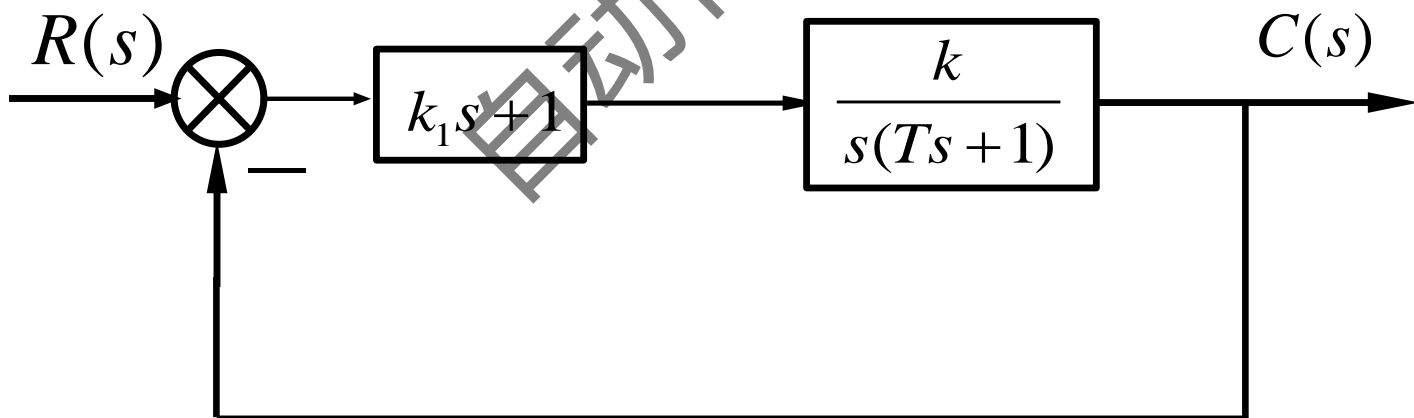
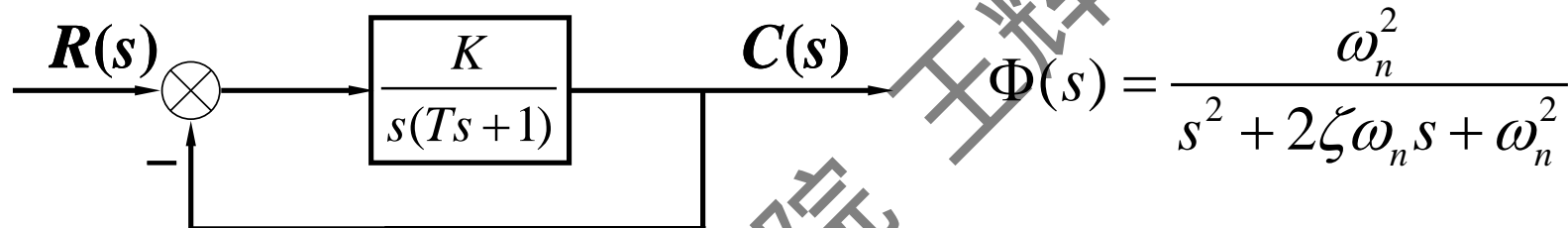


☆二阶系统的单位脉冲响应



六、具有闭环负实零点的二阶系统分析

例：已知二阶系统结构图如下：



六、具有闭环负实零点的二阶系统分析

具有一个负实零点的规范二阶系统为

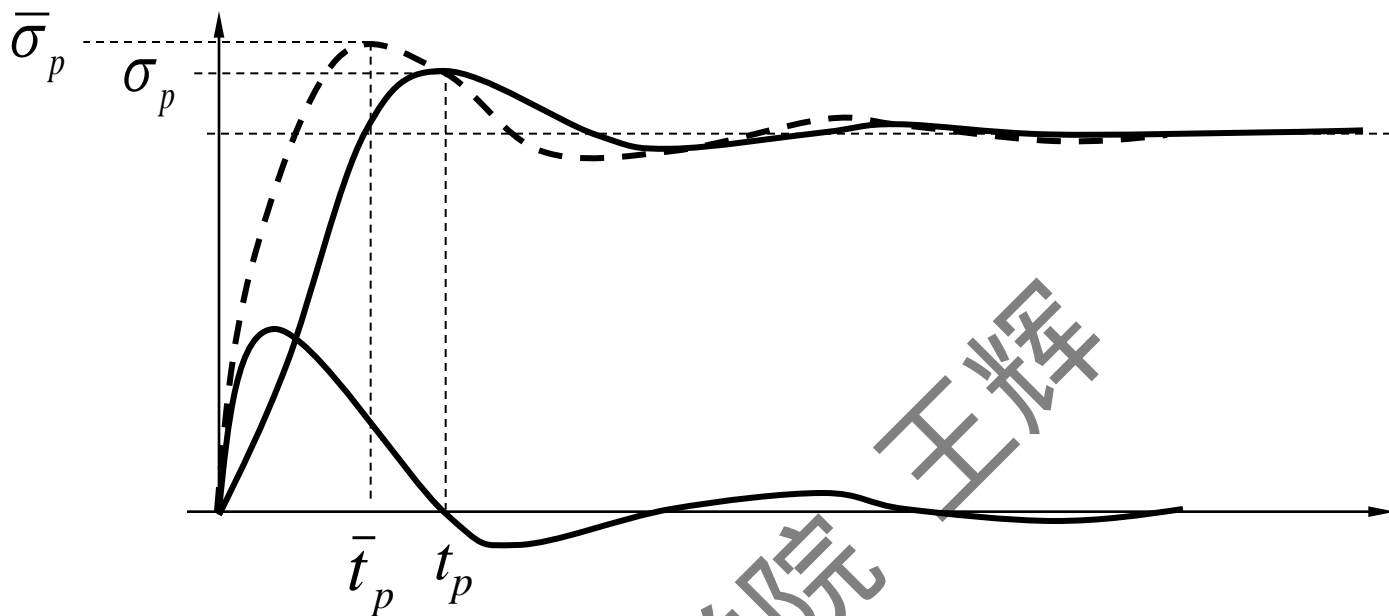
$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2 (s + z)}{z(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad z > 0;$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot 1$$

阶跃响应为典型二阶系统的阶跃响应与乘有 $1/z$ 的脉冲响应之和。

响应曲线是阶跃响应和脉冲响应两条曲线叠加组成。





具有负实零点系统的阶跃响应曲线示意图

负实零点对系统的作用为：

- (1) 使系统响应速度加快 (t_r 和 t_p 减小)；
- (2) 仅在过渡过程开始阶段有较大影响；
- (3) 系统的超调量略有增大；



► 高阶系统分析

$$C(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^q (s - s_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i e^{s_i t} + \sum_{k=1}^r C_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t + \beta_k)$$



高阶系统分析

- 响应的组成

$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i e^{s_i t} + \sum_{k=1}^r C_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t + \beta_k)$$



高阶系统

$$\Phi_1(s) = \frac{30}{(s^2 + 2s + 5)(s + 6)}$$

主导极点

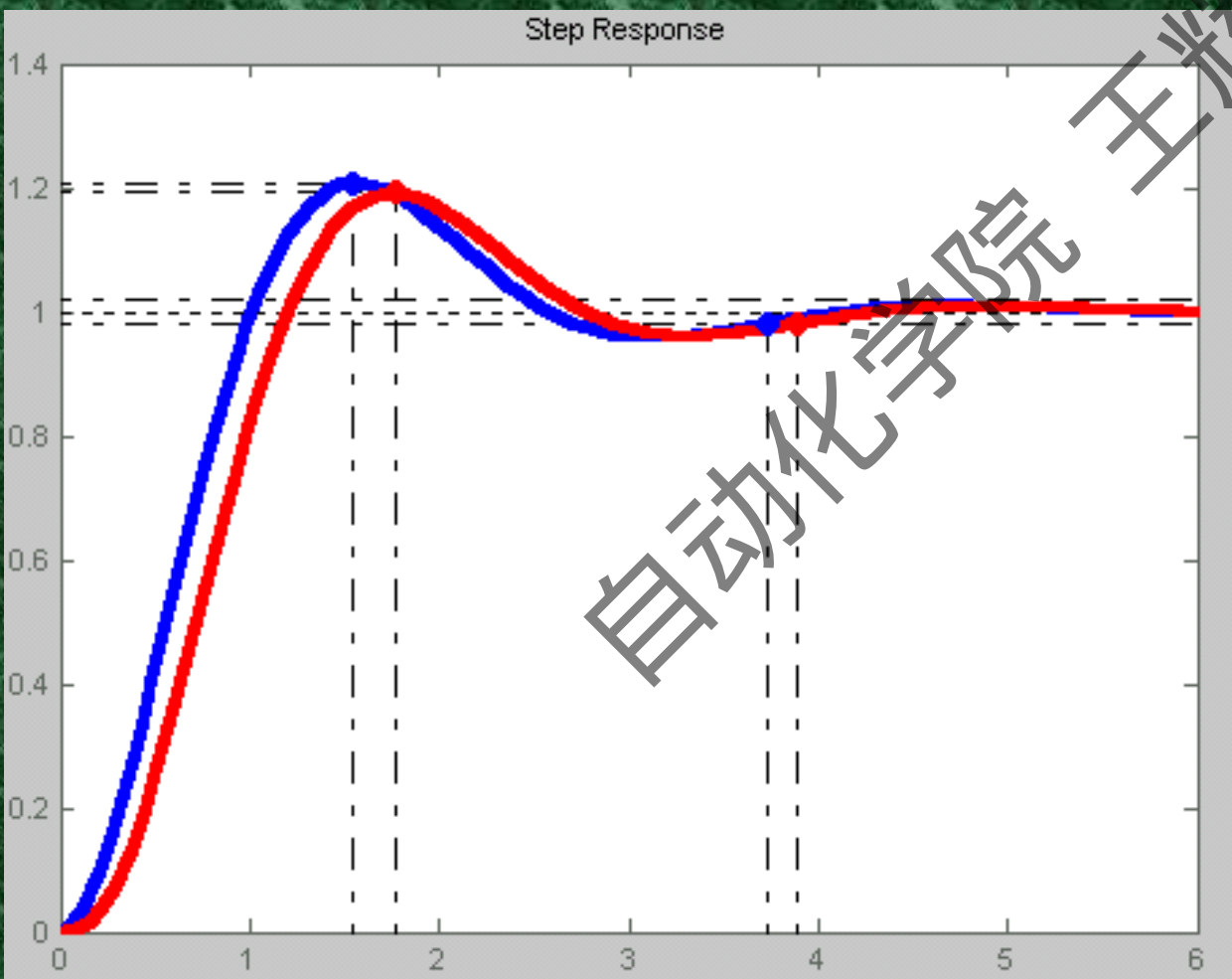
$$\sigma\% = 19.1\%$$

$$t_s = 3.89s$$

$$\Phi_2(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

$$\sigma\% = 20.8\%$$

$$t_s = 3.74s$$



增加极点对
 ξ 有何影响？

• ※ ※ 4-5 线性系统的稳定性分析

1. 稳定性的基本概念

2. 线性系统稳定性的充分必要条件

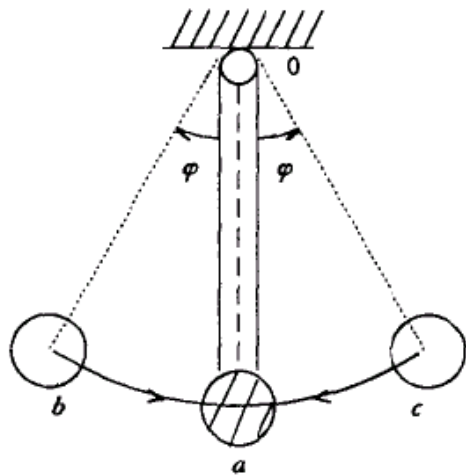
3. 劳斯稳定判据

4. 劳斯稳定判据的特殊情况

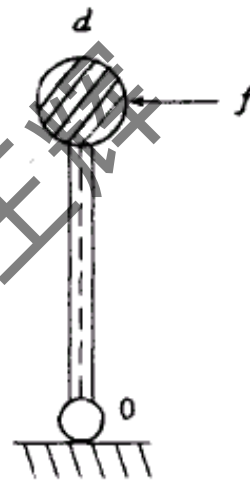
5. 劳斯稳定判据的应用

• ※ ※ 4-5 线性系统的稳定性分析

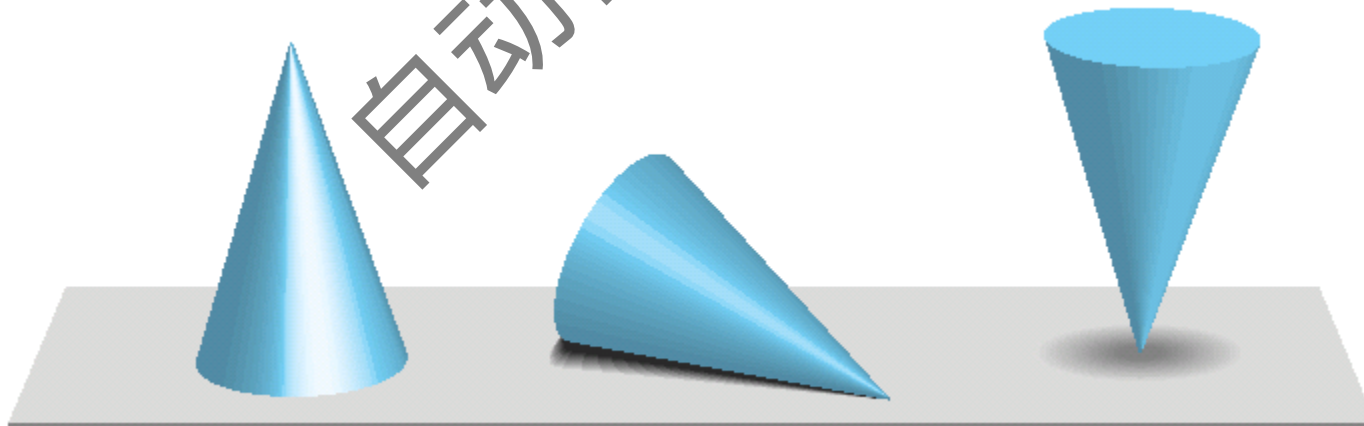
1、稳定与不稳定的现象



稳定的摆



不稳定的摆



2 稳定性的定义

若线性控制系统在初始扰动的影响下，其动态过程随时间的推移逐渐衰减并趋于零（原平衡工作点），则称系统渐近稳定，简称稳定；反之，若系统的动态过程随时间的推移而发散，则称系统不稳定。



• ※ ※ 3-5 线性系统的稳定性分析

1. 稳定性的基本概念

2. 线性系统稳定性的充分必要条件

3. 劳斯稳定判据

4. 劳斯稳定判据的特殊情况

5. 劳斯稳定判据的应用

劳斯判据

系统稳定的**必要**条件：
特征方程各项系数

s^6	1	3	5	7
s^5	2	4	6	
s^4	1	2	7	
s^3	ϵ	-8		
s^2	$2\epsilon+8$	7		
s^1	$-8(2\epsilon+8) - 7\epsilon^2$			
s^0	7ϵ			

该系统不稳定

系统稳定的**充分**条件：

有两个正实部的根

劳斯表**第一列元素均大于零**！

若变号系统不稳定！

变号的**次数**为特征根在s**右**半平面的**个数**！

• ※ ※ 3-5 线性系统的稳定性分析

1. 稳定性的基本概念

2. 线性系统稳定性的充分必要条件

3. 劳斯稳定判据

4. 劳斯稳定判据的特殊情况

5. 劳斯稳定判据的应用

劳斯表出现零行

设系统特征方程为：

$$s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 5s + 6 = 0$$

劳
斯
表

s^4	1	7	6
s^3	1	1	
s^2	1	1	
s^1	2		
s^0	1		

劳斯表出现零行
系统一定不稳定

• ※ ※ 3-5 线性系统的稳定性分析

1. 稳定性的基本概念

2. 线性系统稳定性的充分必要条件

3. 劳斯稳定判据

4. 劳斯稳定判据的特殊情况

5. 劳斯稳定判据的应用

劳斯判据的应用

已知系统特征方程如下,

(1)判断系统稳定性; (2)求出所有的根。

$$s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 4s^2 + 12s + 8 = 0$$

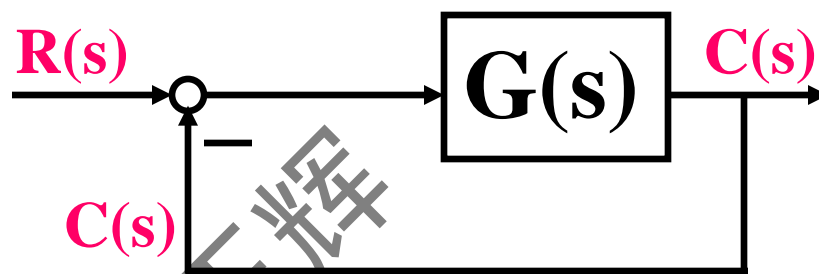
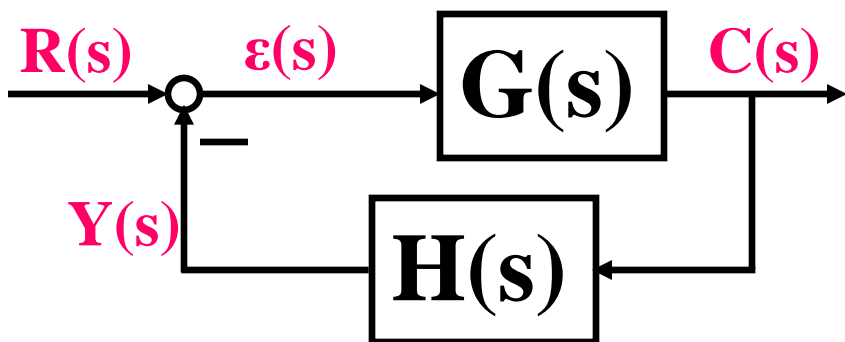
有零行不稳定!

s^6	1	2	4	8
s^5	3	0	12	
s^4	1	0	4	
s^3	0	0		
s^2	8	4		
s^1	-16			
s^0	4			

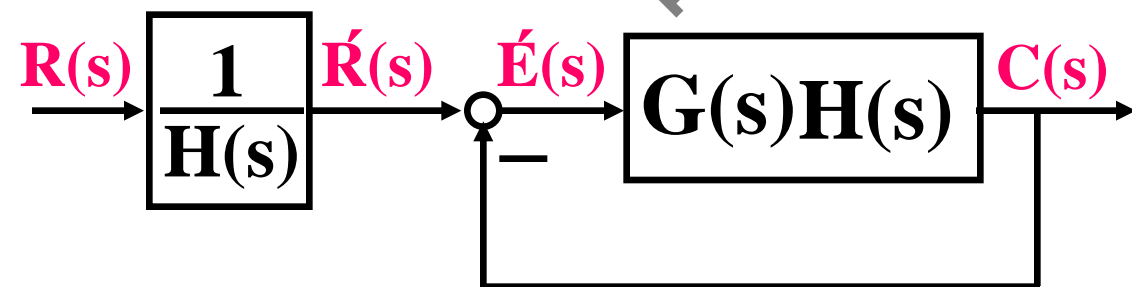
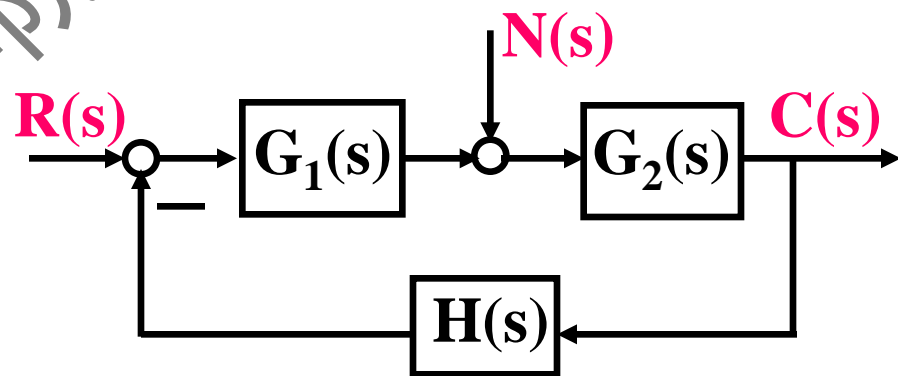
3-6 线性系统的稳态误差分析及计算

- 什么是误差、稳态误差?
- 如何计算稳态误差?
- 系统的稳态误差与什么因素有关系?
- 如何减小或者消除稳态误差, 提高系统的稳态精度?

误差定义



误差 $E(s) = R(s) - C(s)$

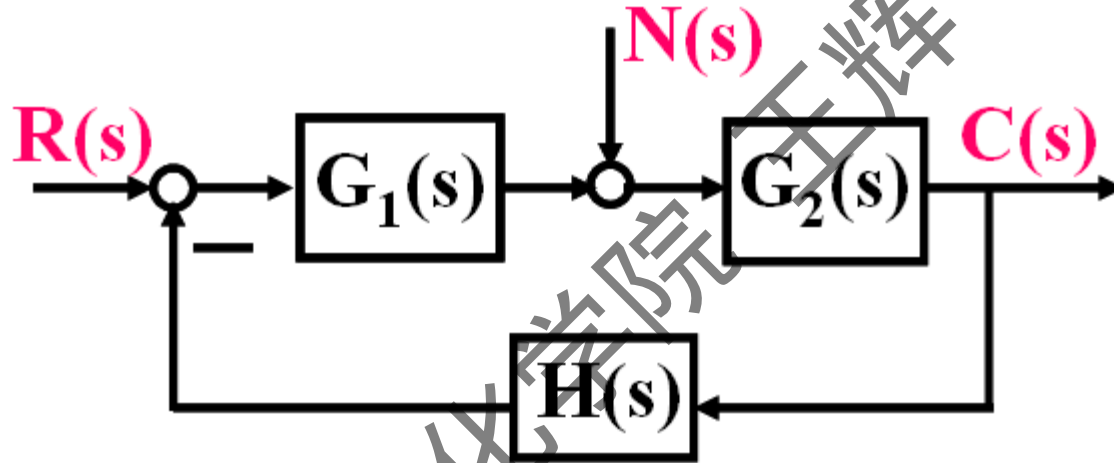


总误差怎么求？

3-6 线性系统的稳态误差分析及计算

- 什么是误差、稳态误差?
- 如何计算稳态误差?
- 系统的稳态误差与什么因素有关系?
- 如何减小或者消除稳态误差, 提高系统的稳态精度?

如何计算稳态误差？



计算误差函数的基本步骤

(1) 依据规范的方框图计算误差传递函数 $\Phi_e(s)$ ；

(2) 计算 $E(s) = \Phi_e(s)R(s)$ ；

(3) 计算误差函数 $e(t) = L^{-1}[E(s)]$ ；

若满足终值定理条件，则稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_e(s)R(s)$$

3-6 线性系统的稳态误差分析及计算

- 什么是误差、稳态误差?
- 如何计算稳态误差?
- 系统的稳态误差与什么因素有关系?
- 如何减小或者消除稳态误差, 提高系统的稳态精度?

系统型别与开环增益

设开环传递函数 $G(s)H(s) =$

$$\frac{k}{s^v}$$

$$\frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^{n-v} (T_j s + 1)}$$

$G_n(s)$

注意： $s \rightarrow 0$ 时， $G_n(s)$ 一定 $\rightarrow 1$

此时的 k 为开环增益

s^v 表示开环有 v 个极点在坐标原点

$v=0$ 称为 0 型系统

$v=1$ 称为 I 型系统

$v=2$ 称为 II 型系统

$v=3$ 称为 III 型系统

系统的稳态误差与什么因素有关

- **输入信号**作用下的稳态误差与系统结构参数的关系
- **干扰作用**下的稳态误差与系统结构参数的关系

系统的稳态误差与什么因素有关

- 输入信号作用下的稳态误差与系统结构参数的关系
- 干扰作用下的稳态误差与系统结构参数的关系

不同的型别

稳态误差

静态误差系数

	$R \cdot 1(t)$	$V \cdot t$	$A t^2/2$	$R \cdot 1(t)$ k_p	$V \cdot t$ k_v	$A t^2/2$ k_a
0型	$\frac{R}{1+k}$	∞	∞	k	0	0
I 型	0	$\frac{V}{k}$	∞	∞	k	0
II 型	0	0	$\frac{A}{k}$	∞	∞	k

系统的稳态误差与什么因素有关

- **输入信号**作用下的稳态误差与系统结构参数的关系
- **干扰作用**下的稳态误差与系统结构参数的关系

例题：已知系统结构如图所示，输入信号 $r(t)=1(t)$ ，干扰 $n(t)=1(t)$ ，求系统的稳态误差。

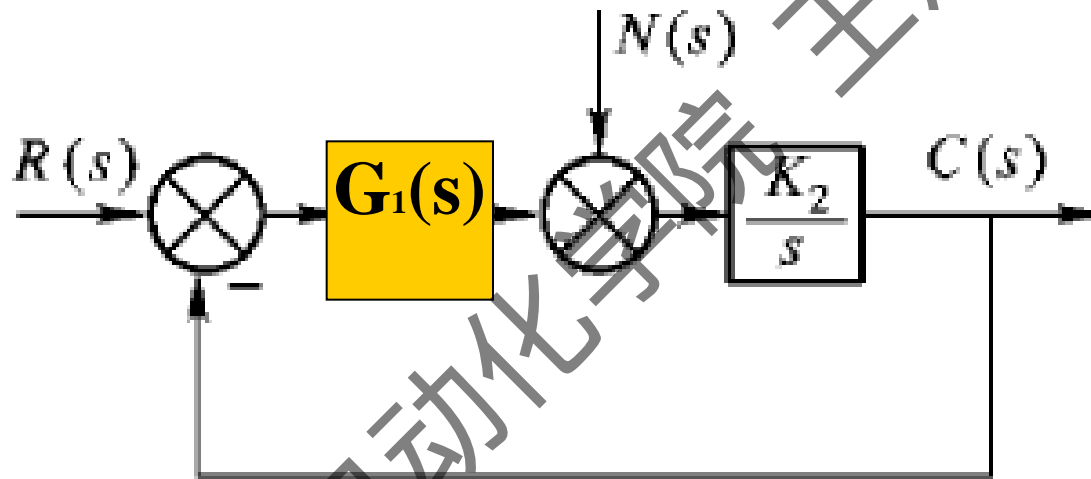


表1 输入信号作用下的 e_{ss}

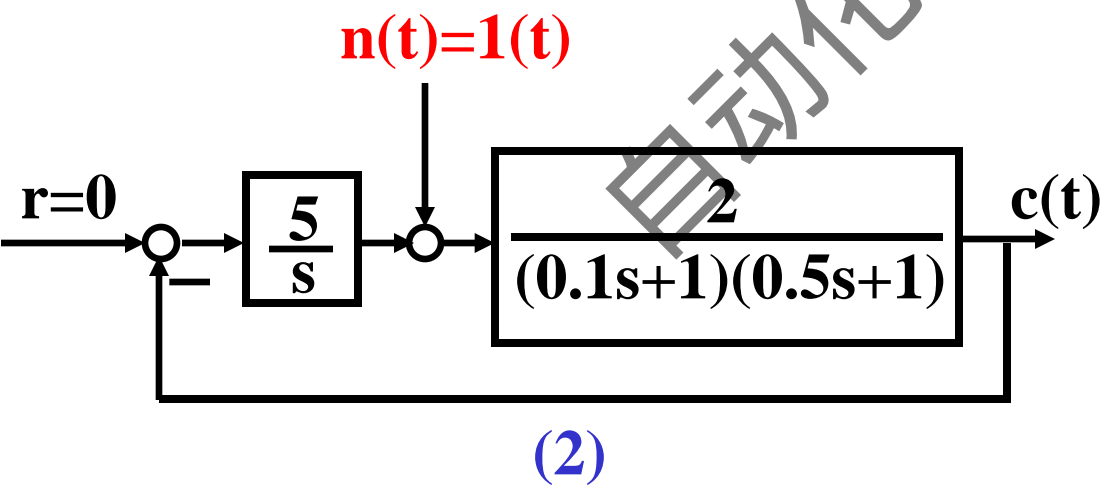
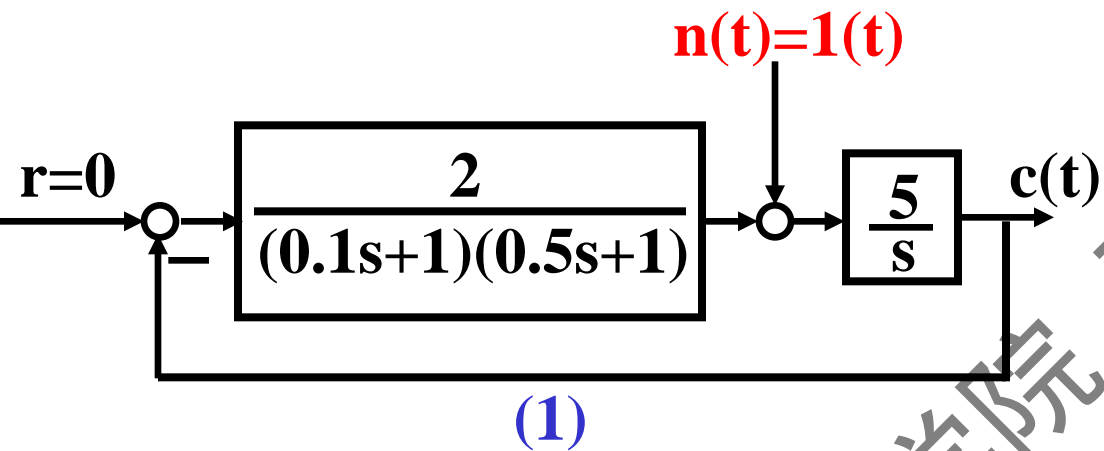
	$R \cdot 1(t)$	$V \cdot t$	$A t^2/2$
0型	$\frac{R}{1+k}$	∞	∞
I 型	0	$\frac{V}{k}$	∞
II 型	0	0	$\frac{A}{k}$

表2 扰动信号作用下的 e_{ss}

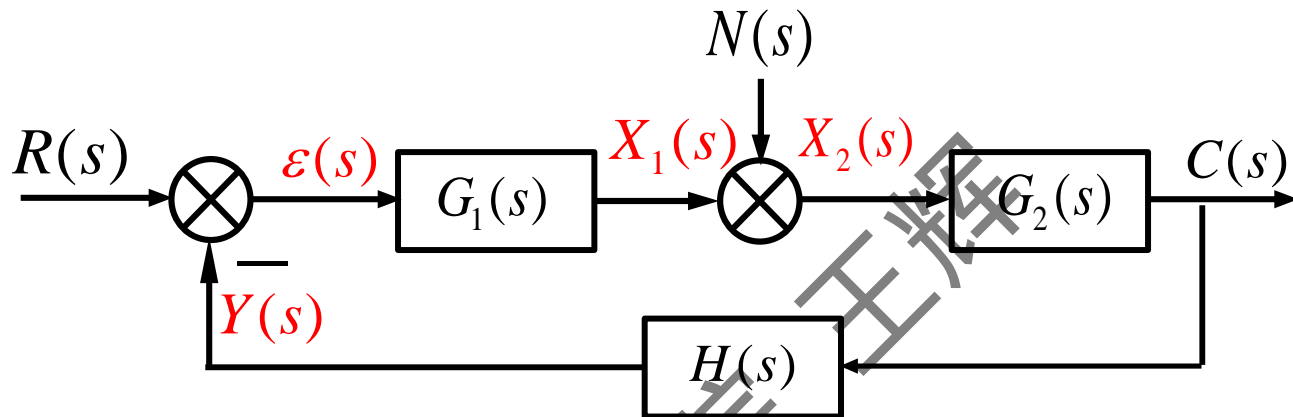
	$R \cdot 1(t)$	$V \cdot t$	$A t^2/2$
0型	$-\frac{R}{k_1}$	∞	∞
I 型	0	$-\frac{V}{k_1}$	∞
II 型	0	0	$-\frac{A}{k_1}$

例题

求图示系统的 e_{ssn} 。



2、动态误差系数法（补充）



$$E(s) = E_r(s) + E_n(s)$$



$$e_{ss}(t) = e_{ssr}(t) + e_{ssn}(t)$$



动态误差系数法

——输入 $r(t)$ 作用下的稳态误差

$$e_{ssr}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \Phi_e^{(i)}(0) r^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i r^{(i)}(t)$$

$$C_i, i = 0, 1, 2, \dots$$

—动态误差系数



动态误差系数法

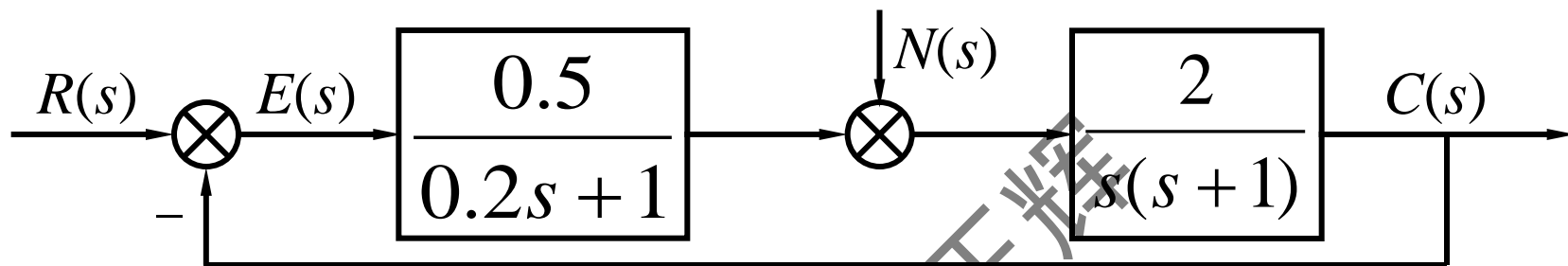
——扰动 $n(t)$ 作用下的稳态误差

$$e_{ssn}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \Phi_{en}^{(i)}(0) r^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{in} r^{(i)}(t) \quad C_{in}, i = 0, 1, 2, \dots$$

—扰动的动态误差系数



例1 已知控制系统的方框图为



计算 $r(t)=t$ 、 $n(t)=-1(t)$ 时，系统的稳态误差。

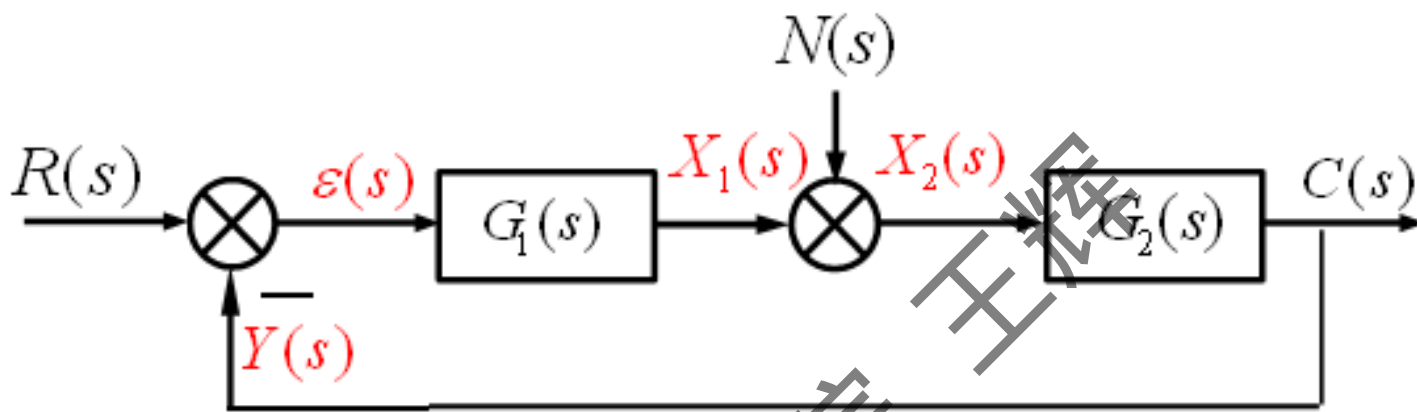


3-6 线性系统的稳态误差分析及计算

- 1、什么是误差、稳态误差？
- 2、如何计算稳态误差？
- 3、系统的稳态误差与什么因素有关系？
- 4、如何减小或者消除稳态误差, 提高系统的稳态精度？



1) 消除稳态误差的措施-提高系统型别

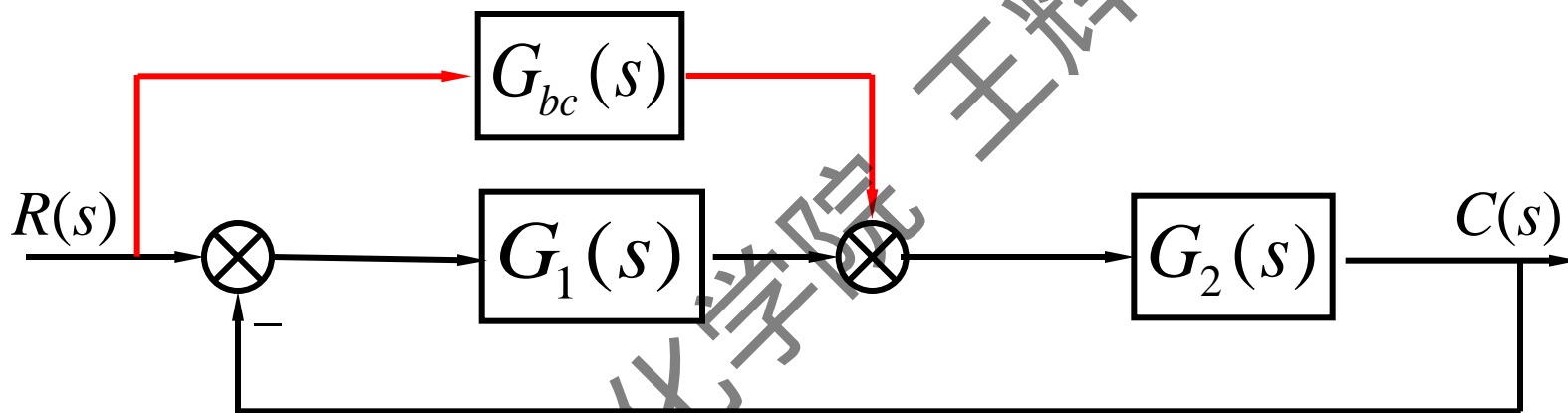


$$G_1(s) = \frac{M_1(s)}{s^{\nu_1} N_1(s)}, G_2(s) = \frac{M_2(s)}{s^{\nu_2} N_2(s)}$$

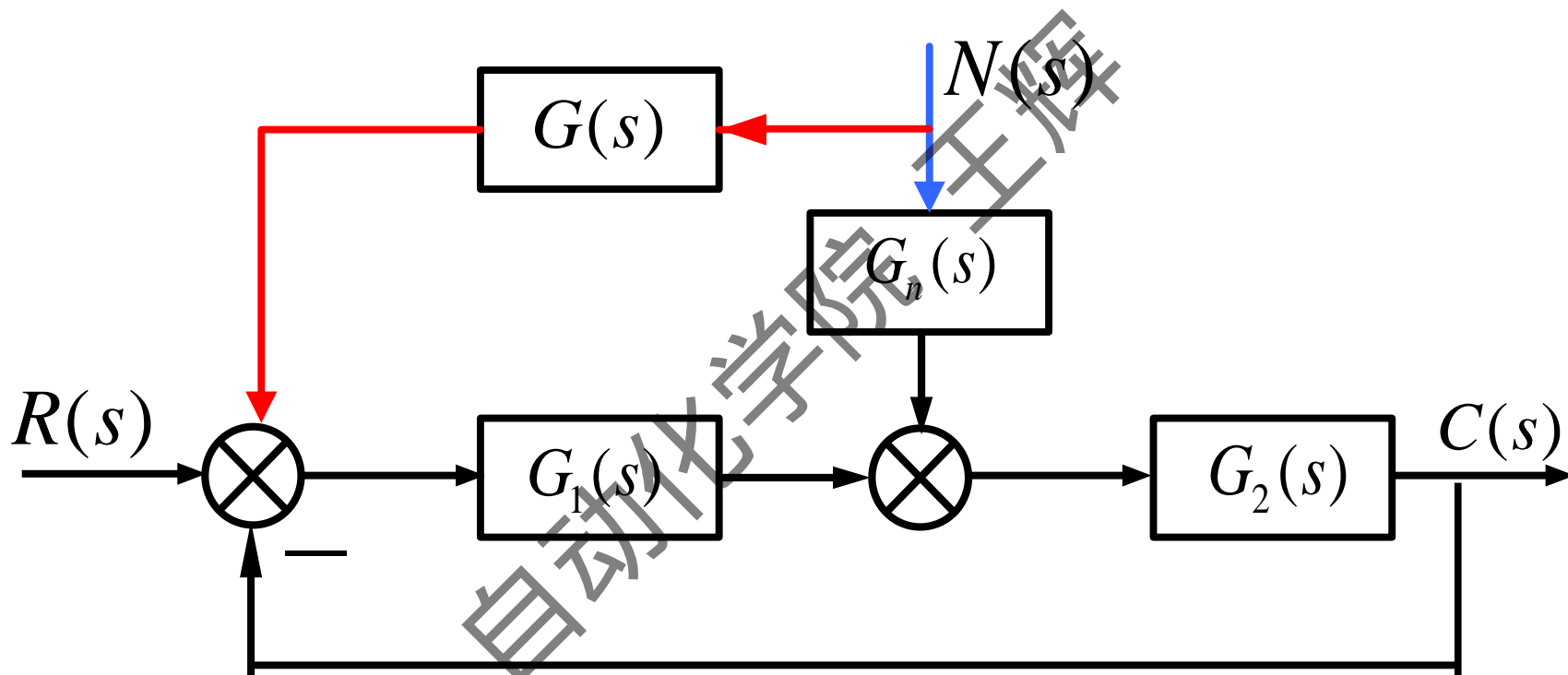


2) 消除稳态误差的措施-复合控制

按输入信号补偿的复合控制



消除稳态误差的措施-复合控制

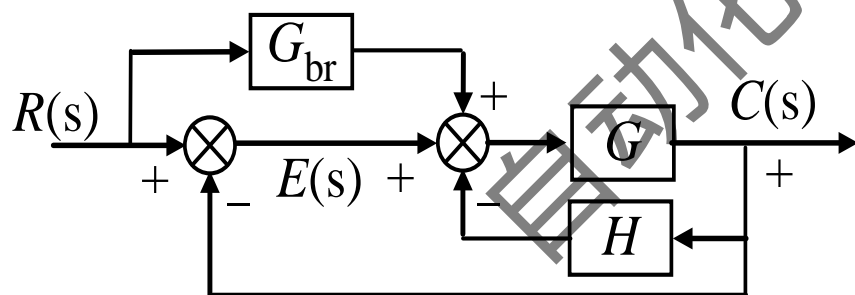


2005: 已知控制系统如图所示, 在 $G_{br}(s) = 0$ 时,

闭环系统响应阶跃输入时的超调量 $\sigma_p = 4.6\%$ 、

峰值时间 $t_p = 0.88$ 秒, 1) 确定系统的 k 值和 τ 值。

2) 欲使系统闭环系统响应速度输入的稳态误差为零, 请确定输入补偿环节的传递函数 $G_{br}(s)$



$$G_1(s) = \frac{k}{s(s+5)} \quad H(s) = \tau s$$



本章重点

- 系统时间响应的性能指标；
- 二阶系统的时域分析；
- 劳斯稳定判据
- 线性系统的稳态误差计算等。
- 掌握闭环极点与动态响应的关系。

