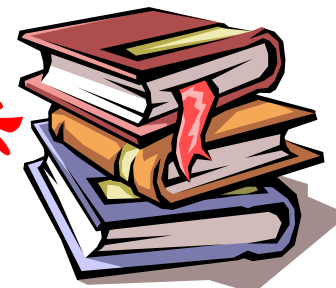


第五章 线性系统的根轨迹法

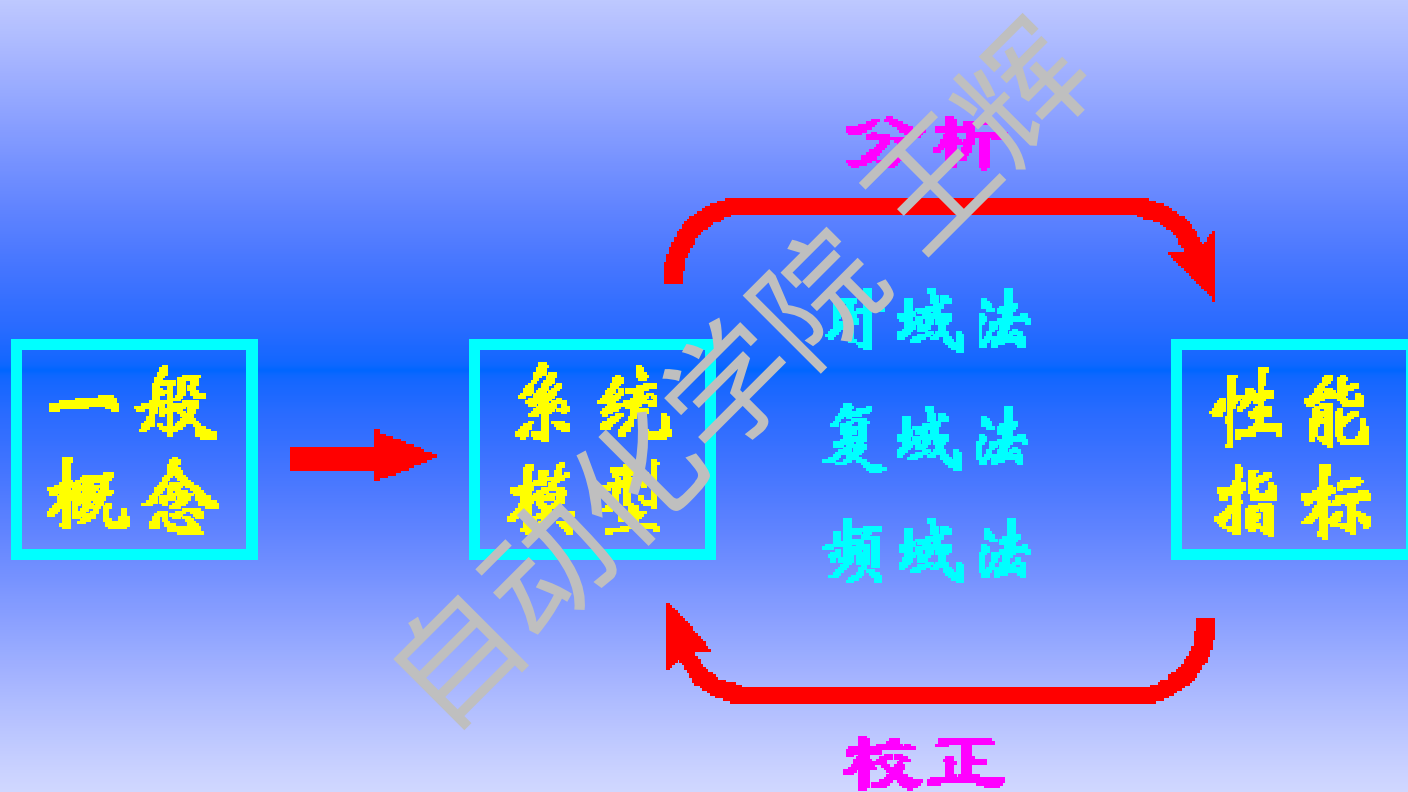


自动化学院



哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

自动控制理论的任务与体系结构



线性系统的根轨迹法主要研究问题

1. 根轨迹法的基本概念。
2. 如何根轨迹绘制？
3. 根据根轨迹分析系统性能。

§ 5.1 根轨迹的基本概念

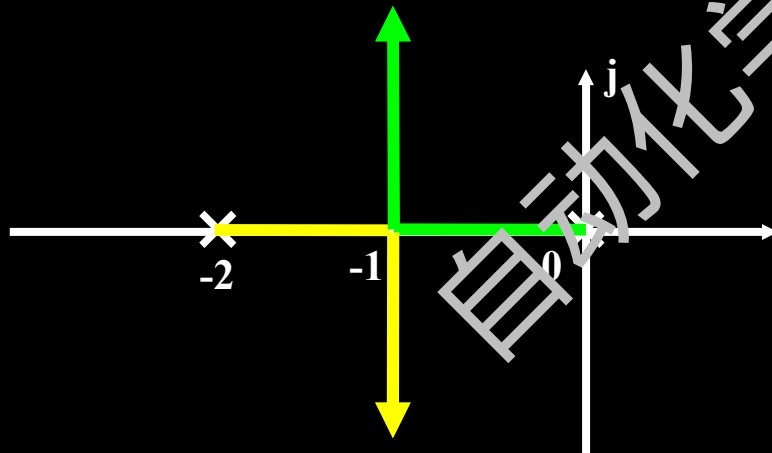
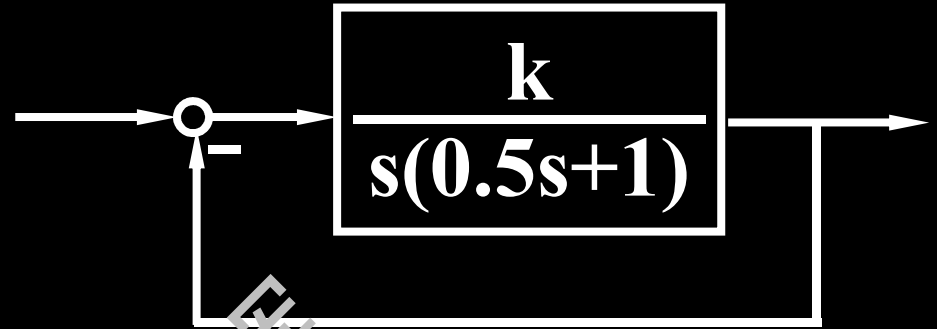
自动化学院王辉

一、根轨迹定义

特征方程: $s^2 + 2s + 2k = 0$

特征根: $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2k}$

$K: 0 \sim \infty$



二、根轨迹方程

特征方程 $1+G(s)H(s) = 0$

$$1+K^* \frac{\prod_{j=1}^m (s-z_j)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)} = 0$$

根轨迹增益 k^* 不是定数，从0变化到 ∞ ！

$$1+k^*P(s)=0$$

相角条件:

三、绘制根轨迹的条件

——模值条件与相角条件

$$\sum_{j=1}^m \angle (s - \mathbf{z}_j) - \sum_{i=1}^n \angle (s - \mathbf{p}_i) = (2k+1) \pi$$

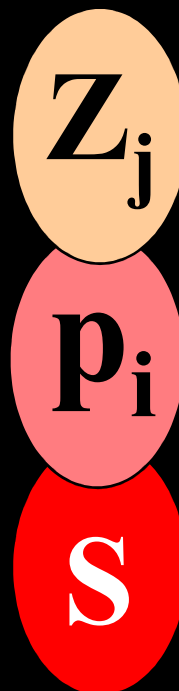
$k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

绘制根轨迹的充要条件

模值条件:

$$K^* = \frac{\prod_{i=1}^n |s - \mathbf{p}_i|}{\prod_{j=1}^m |s - \mathbf{z}_j|}$$

确定根轨迹上某点对应的 K^* 值



§ 5.2 根轨迹的绘制规则

自动化学院王辉

绘制根轨迹的基本法则 180°

- 1 根轨迹的条数为特征根的个数
- 2 根轨迹连续并对称于对称实轴
- 3 根轨迹起始于开环极点或 ∞ ,终止于开环零点或 ∞ 。
- 4 $|n-m|$ 条渐近线对称于实轴,均趋于实轴上的 σ_a 点,

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{|n-m|}$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{|n-m|}$$

$$k=0,1,2,\dots$$

- 5 实轴上某段右侧零、极点个数之和为奇数,则该段是根轨迹
- 6 根轨迹的汇合与分离

求导法

$$G(s) = k \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$A'(s) \cdot B(s) = B'(s) \cdot A(s)$$

倒数法

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

例1 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.05s + 1)(0.05s^2 + 0.2s + 1)}$$

- (1) 试绘制 $K = 0 \rightarrow \infty$ 闭环系统的概略根轨迹
- (2) 求出 $K = K_{\text{临界}}$ 时闭环传函及闭环极点



绘制根轨迹的基本法则 180°

7 起始角与终止角

出射角：根轨迹离开开环复极点处的切线与正实轴的夹角

$$\theta_{pl} = -180^\circ + \sum_{j=1}^m \angle(p_l - z_j) - \sum_{i=1, i \neq l}^n \angle(p_l - p_i), k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

入射角：根轨迹进入开环复零点处的切线与正实轴的夹角

$$\theta_{zl} = 180^\circ - \left(\sum_{j=1, j \neq l}^m \angle(z_l - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(z_l - p_i) \right), k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

绘制根轨迹的基本法则 180°

8 与虚轴的交点

令 $s=j\omega$ 解出

或

可由劳斯表求出

例1 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.05s + 1)(0.05s^2 + 0.2s + 1)}$$

- (1) 试绘制 $K = 0 \rightarrow \infty$ 闭环系统的概略根轨迹
- (2) 求出 $K = K_{\text{临界}}$ 时闭环传函及闭环极点



绘制根轨迹的基本法则 180°

9 根之和与积

10 开环增益的求取

自动化学院 王辉

二、 0^0 根轨迹绘制的基本规则

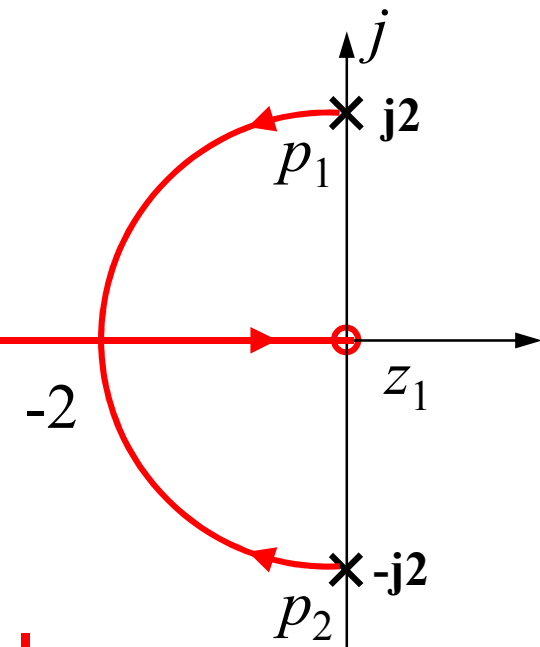
- 1: 根轨迹的分支数。
- 2: 根轨迹的对称性和连续性。
- 3: 根轨迹的起点和终点。
- 4: 根轨迹的渐近线（与实轴的交点和夹角）。
- 5: 根轨迹在实轴上的分布。
- 6: 根轨迹与实轴的交点（根轨迹在实轴上的分离点与分离角）。
- 7: 根轨迹的起始角和终止角（开环复极点的出射角和开环复零点的入射角）。
- 8: 根轨迹与虚轴的交点。
- 9: 闭环极点的和与积。
- 10: 开环增益 K 的求取。



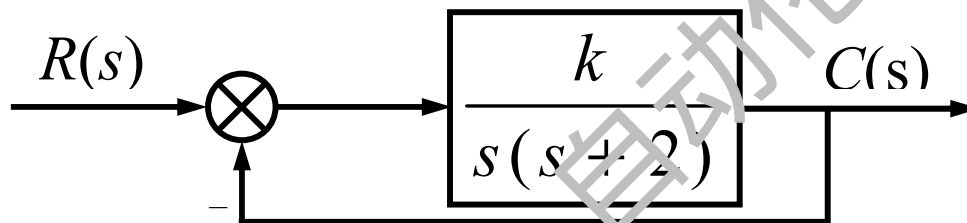
例 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{4}{s(s+a)}$$

试分析参变量对闭环极点的影响。



例：根轨迹



$$G(s) = \frac{k}{s(s+2)}$$



§ 5.3 根据根轨迹分析系统性能。

例3 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

试用根轨迹法分析系统的稳定性，并计算闭环主导极点具有阻尼比 $\xi = 0.5$ 时的性能指标。



附加开环零点的作用

$$G(s) = \frac{k}{s^2(s+3)} \Rightarrow G(s) = \frac{k(s+z)}{s^2(s+3)}$$

自动化学院 王科



例4 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{k}{s^2(s+3)}$$

试分析附加开环零点的系统的根轨迹。

自动化学院王强



附加开环零点的作用

——改变根轨迹的形状和走向

- 1). 适当的附加零点减少渐近线条数，能够改善系统的稳定性
- 2). 附加零点位置的选择应兼顾稳定性和动态性能。



作业： 某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

试绘制系统的根轨迹,并指出 k 取何值时系统稳定。

自动化学院 王辉



本章重点

- 根轨迹绘制的基本规则
- 根据系统的开环传递函数标准型, 绘制出其根轨迹曲线
- 根据系统的根轨迹进行系统性能分析

